为了数学解题学的诞生——写在前面

无论是数学家还是中学生,天天都在解数学题,这种惊心动魄的实践活动已经产生了惊天动地的数学成果与流芳千古的教育成果.有趣的是,活动本身还没有来得及提炼出自身的完善理论——数学解题学,是根本不存在抑或完全用不着吗?可能是数学太迷人了,数学家马不停蹄地攻克一个又一个数学堡垒,既运用又创造各种解题理论,但无暇把它们独立整理出来.

也可能,这应该是数学教育家的使命.

如果把解题比做打仗,那么解题者的"兵力"就是数学基础知识,解题者的"兵器"就是数学基本方法,而调动数学基础知识、运用数学基本方法的数学解题学正是"兵法".因此,数学解题学与数学方法论是既有联系又有区别.

研究解题"兵法"、讲授解题"兵法"的开拓者是波利亚,他那风靡世界的名著一开"怎样解题"规律研究之先河.经过几十年的积累,历史要求我们从数学与教学相结合的角度,对数学解题作一些理论性的总结,正面回答多少年来人们翘首以望的问题:怎样学会解题?怎样调动乃至创造解题方法?

笔者的基本观点认为:分析典型例题的解题过程是学会解题的有效途径.至少在没有找到更好的途径之前,这是一个无以替代的好主意.以这一思想为核心,本书收集了建立理论体系的一些素材,也进行了理论体系建立的初步尝试,其中有经典著作的客观介绍(主要在第二章),有报刊资料的丰富集锦(分布在各章、包括正反两方面的材料),也有个人经验的长期积累(如解题过程的各种分析、解题坐标系的建立等).

第一章提供了解题理论研究的必要准备，包括解题理论的概念介绍，解题研究的现状分析，解题资料的初步整理，解题基本功的要素分析等.

第二章介绍了3本解题著作的解题观点，突出原作者的本质思想并强调“客观性”，尽量避免个人倾向的渗入，也不回避各家观点的差异，并有意引用原文.到第四章继续介绍两个解题观点：系统论的观点、解题坐标系的观点.与第二章相反，第四章大多是笔者个人的看法.

第三章首先研究解题程序，然后对解题过程进行思维分析、结构分析和长度分析.

第五章讨论解题方法，但不重复一般数学方法论著作的“解题方法研究”，而是进行数学方法的文化审视，提出解题方法的研究课题(方法的实质、方法的功能、方法的逻辑基础、方法的变化形式、方法的应用层次、方法的正确使用)，探讨反例的作用与构造.作为示范，对配方法进行了较为完整的理论分析.

第六章是实践上升为理论又理论指导实践的重要课题，首先分析了解题策略的特征，然后总结出10条解题策略，并从解题策略的角度，推出了求解选择题的完整体系.

第七章是习题理论，讨论了数学习题的分类，数学题解的检验，解题错误的分析、最后研究数学习题的科学性要求与编拟方法.

书末附有30道供研究的初等数学问题，大多尚无现成答案.各章的最后也配有充足的练习题，并且有意将后面的例题作为前面的习题.类似地，前后章节之间的联系、相互参见也是很多的，毕竟全书都协奏着“分析解题过程”、“开发解题智慧”的同一个主旋律.

这就是本书的基本情况.需要指出的是，虽然笔者的个人思考很早就开始了，并且自1987年以来已向学生连续作过多年讲授，但其理论性、系统性都还极为粗糙.至于个人的解题心得，与其说是记录了一些研究的成果，不如说是提出了一些思考的课题.笔者提醒自己：叙述是商讨性的、名词是描述性的，画一个问号作为丑陋的开

头，把完善、完整、完美的句号留给读者.

我们考虑，数学解题学的建设是一件理论性和实践性都很强的工作，恐怕要反复经过这样两个阶段：

1. 广泛了解各种解题观点、解题方法和解题技巧，并且亲身解出很多题(每一个企望成为解题专家的人都应该到题海里去游泳，教师进题海，正是避免学生被题海淹没的一个途径). 在这个基础上，抽象出一些规律性的结论，这些结论不是也不应是点石成金的魔杖，不是也不会是“无题不解”的万能钥匙，但应有一般性的指导意义，具体应用中还很灵验. 比如说，应用这些规律去指导解题与解题教学，确实能解决一些见所未见的新题，确实能改进一些千锤百炼的成题，有时还能突破一些长期猜想的悬题.

这是一个总结和检验的阶段.

2. 将经过验证的规律进行系统性的整理与数学化的加工，使之成为一个兼有逻辑结构和数学特征的理论体系，我们强调应当有数学特征，而不是生硬的“逻辑学＋数学例子”或“教育学＋数学例子”；同时也区别于现有的数学方法论.

这两个阶段既不能截然分开，也不是一次完成，我们现在所做的基本上是第一阶段的基础工作，还很幼稚，重要的只是，我们已经开始了，既情不自禁又欲罢不能.

既然，解题与数学同生共长，一样古老、一样辉煌；既然，数学早已有了系统完整的理论大厦，那么，“数学解题学”的落成还会远吗?

多少年之后，也许人们会发现“数学解题学”的白天鹅与“数学解题学引论”的丑小鸭之间没有多少共同的地方，但这并不要紧，重要的是，白天鹅的存在、美丽、高雅与楚楚动人.

罗增儒

目　录

第一章 绪 论

本章提供解题理论研究的必要准备,包括解题理论的概念介绍,解题研究的现状分析,解题资料的初步整理,解题基本功的要素剖析.

1－1 解题与解题理论

1－1－1 题

美国数学家哈尔莫斯(P·R·Halmos)认为,问题是数学的心脏.他说:"数学究竟是由什么组成的? 公理吗? 定理吗? 证明吗? 概念? 定义? 理论? 公式? 方法? 诚然,没有这些组成部分,数学就不存在,这些都是数学的必要组成部分,但是,它们中的任何一个都不是数学的心脏,这个观点是站得住脚的,数学家存在的主要理由就是解问题.因此,数学的真正的组成部分是问题和解."①

数学的历史发展一再印证了"问题是数学的心脏".尤其是1900年,当希尔伯特(D·Hilbert)在巴黎国际数学家代表大会上发表《数学问题》的著名演讲之后,数学问题更加成为激励数学家推进数学发展的一种原动力.希尔伯特在他的演讲中说:只要一门科学分支能提出大量的问题,它就充满着生命力;而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止.正如人类的每项事业都追求着确定的目标一样,数

① P·R·Halmos.数学的心脏.数学通报,1982,4,P.27.

学研究也需要自己的问题①.

有一个传说,虽然难以辨明真假,但却深深体现了数学家对“问题”的偏爱.据说,希尔伯特曾经找到了证明“费马猜想”②的方法,但为了让它继续激励人们去开拓新的数学分支和创造新的数学方法,他守口如瓶,秘而不宣.当他周围的挚友敦促他发表这个证明时,希尔伯特深情地说:“我们应当更加注意,不要轻易杀掉这只能为人类生出金蛋的母鸡!”

不仅对于数学科学,而且对于学校数学来说,问题也是它的心脏.波利亚强调指出:“中学数学教学首要的任务就是加强解题训练.”他有一句名言:“掌握数学就是意味着善于解题.”③

本世纪70年代,美国数学指导委员会也曾提出过:“学习数学的主要目的在于解题.”1980年4月,美国数学教师协会公布了一份文件,叫做《关于行动的议程》,明确提出“必须把问题解决作为80年代中学数学的核心”,“数学课程应当围绕着问题解决来组织”,“数学教师应当创造一种使问题解决得以蓬勃发展的课堂环境”.90年代以来,“问题解决”仍然是美国数学教育的中心.

力求提高解题教学在数学教学中的作用已经是现代数学教学理论的一个特点.现代兴起的“问题教学法”、“研究法”、“发现法”、“试错法”等教学法,都明显地突出了解题教学在数学教学中的地位.

那么,什么是数学中的问题呢?

波利亚在《数学的发现》中将问题理解为:有意识地寻求某一适当的行动,以便达到一个被清楚地意识到但又不能立即达到的目的.

---

① 转引自邓东皋等.数学与文化,北京大学出版社,1990年5月第1版,P·191,李文林、袁向东译.

② 费马猜想是:$n>2$时,方程$x^n+y^n=z^n$无正整数解.历经300多年后已为美国普林斯顿大学威尔斯(A·Wiles)教授于最近解决.

③ 见参考文献[28]波利亚.数学的发现,序言.

解决问题指的是寻找这种活动①.

威克尔格伦在《怎样解题》中说:我们考虑的所有形式的问题都可以认为由三类信息组成:关于已知条件的信息(已知表达式);关于运算的信息,这些运算从一个或多个表达式推导出一个或多个新的表达式;以及关于目标的信息(目标表达式)②.

三轮辰郎在"问题解决能力的育成"中认为:问题是指那些对于解答者来说还没有具备直接的解决办法,对于解答者构成认知上的挑战这样一种局面③.

1988年召开的第六届国际数学教育大会的一份报告指出:"一个(数学)问题是一个对人具有智力挑战特征的,没有现成的直接方法、程序或算法的未解决的情境."

还可以列出一些提法④⑤⑥,但是,不管有多少种不同的叙述,都离不开这样一个本质:问题反映了现有水平与客观需要的矛盾,问题就是矛盾.对于学生而言,问题有三个特征:

(1) 接受性:学生愿意解决并且具有解决它的知识基础和能力基础.

(2) 障碍性:学生不能直接看出它的解法和答案,而必须经过思考才能解决.

(3) 探究性:学生不能按照现成的公式或常规的套路去解,需要进行探索和研究,寻找新的处理方法.

例如,解方程:

$$x^2-3x+2=0; \qquad ①$$

---

① 见第一卷第二部分第五章,问题,P.164.

② 见参考文献[31]威克尔格伦.怎样解题,P.10,什么是问题.

③ 转引自刘学质.问题解决在美国和日本.数学教学,1993,2,P.17.

④ 余致甫主编.数学教育学概论,P.219.

⑤ 参考文献[19]张奠宙等.数学教育学,P.225.

⑥ 本书§4-1-1.

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0; \quad ②$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 1. \quad ③$$

对于初一学生来说，这三个方程都是问题，因为他们只学过一元一次方程的解法. 对于初二学生来说，他们已经学了一元二次方程的解法，方程①不成为问题；方程②由于提取出 x 之后才能化为常规的一元二次方程，因而对一部分学生将成为问题，而对另一部分学生并不成为问题；但一元三次方程③对所有初中生都是问题.

数学教学中的问题也叫做题，可以分为练习型与研究型两类.（习题的分类见第七章）

练习型的题具有教学性，它的结论为数学家或教师所已知，其之所以成为问题仅相对于教学或学生而言，包括一个待计算的答案、一个待证明的结论、一个待作出的图形、一个待判断的命题、一个待解决的实际问题等. 其中既有学生所做的作业，又有教师所讲的概念和定理. 本书中近600道例题、习题均属此列.

研究型的题具有学术性，它的结论对于数学和数学家都是未知的，其中既有数学自身理论发展的认知题，又有应用数学理论解决实际问题的应用题. 本书末附有30道供研究的初等数学问题.

把两种类型都包括进去，是“题”的广义含义；只考虑其中一种类型，是“题”的狭义理解. 在教学中基本上都是练习型的题，而在科研中则不承认已经解决的课题仍为问题. 本书的讨论出于教学目的，当然主要考虑练习型的题目，且常限于初等数学的范围. 但是，由于学生解决练习型题目的过程与数学家解决研究型题目的过程是类似的（当然在创造与发现的层次上有区别），所以，我们的研究有时也不拘泥于“题”的狭义理解. 事实上，我们的初衷正是：通过练习型例题的过程分析，去探索研究型课题的解决规律，去获得解决研究型课题的能力.

无论对题作何种意义的认识，都应该把概念的抽象概括、定理的发现证明、数学的实际应用等，纳入“题”的固有范围.

1-1-2 解　题

解题就是“解决问题”,即求出问题的答案.这个答案在数学上也叫做“解”,所以,解题也就是求出题的解.小至一个学生算出作业的答案、一个教师讲完定理的证明,大至一个数学课题得出肯定或否定的结论、一个数学技术用于工农业实际部门产生良好效益,都叫做解题.

我们说过,波利亚有一句脍炙人口的名言:“掌握数学就是意味着善于解题”,在这里,“解题”近于“掌握数学”的同义语了.确实,数学工作者每日每时都离不开解题.

解题是数学工作者数学活动的基本形式;

解题是数学工作者数学活动的主要内容;

解题是数学工作者的一个存在目的;

解题是数学工作者的一个兴奋中心.

需要提出的是,现代兴起的“问题解决”(Problem solving)比传统意义上的“解题”有了很大的发展.传统意义的“解题”注重结果、注重答案,而现代意义的“问题解决”则更注重解决问题的过程、策略以及思维的方法.

一个学生拿到一道习题之后,通过翻看习题集的答案得到了解决,当然这个答案是正确的,但能否认为他解决了问题呢?从“问题解决”的观点看来,回答是否定的.同样,一个教师讲解一条几何定理时,没有任何知识的发生过程,小黑板一挂,辅助线作好了,证明和盘托出了,也是一个不成功的“解题”.

“问题解决”有不同的解释,比较典型的观点可归纳为4种:

1. 问题解决是心理活动

指的是人们在日常生活和社会实践中,面临新情境、新课题,发现它与主客观需要的矛盾而自己却没有现成对策时,所引起的寻求处理办法的一种活动.

2. 问题解决是一个过程

美国全国数学管理者大会(NCSM)在《21世纪的数学基础》(1988)中,把"问题解决"定义为"将先前已获得的知识用于新的、不熟悉的情境的过程".这就是说,问题解决是一个发现的过程、探索的过程、创新的过程.

3. 问题解决是一个目的

美国全国数学管理者大会(NCSM)在《21世纪的数学基础》中认为:"学习数学的主要目的在于问题解决".因而,学习怎样解决问题就成为学习数学的根本原因.此时,问题解决就独立于特殊的问题,独立于一般过程或方法,也独立于数学的具体内容.

4. 问题解决是一种能力

即那种把数学用之于各种情况的能力.美国全国数学管理者大会(NCSM)把解决问题的能力列为10项基本技能之首.重视问题解决能力的培养、发展问题解决的能力,其目的之一是,在这个充满疑问、有时连问题和答案都是不确定的世界里,学习生存的本领.

上述各种看法,在形式上似乎并不一致,但它们有本质上的共同点,即在教学中为学生提供了一个发现、创新的环境与机会,为教师提供了一条培养学生解题能力、自控能力和应用数学知识能力的有效途径.

1-1-3 解题理论

传统意义上的解题,把"题"作为考察的对象,把"解"作为研究的目的.在很多情况下,对"题"的关心,对"解"的追求,超过对"解题"本身的注意.那些精明的数学成果所告诉我们的只是:"应用了什么数学方法","得到了什么数学结论".而我们困惑的却是:"怎样应用数学方法","如何发现数学结论"

本书认为,解题理论研究的对象是"解题",它的基本任务是研究解题规律,回答"怎样学会解题",基本方法是"分析解题过程".所以,本书所理解的数学解题学是,通过解题过程的分析去探索怎样学会解题的一门学问.本书将讨论解题观点、解题过程、解题方法、解题策

略、习题理论等专题.其中,将体现系统方法论的思想,并进行解题坐标系的探索.

为了方便,我们先对本书的基本名词予以集中描述.

1. 解题思想

指解题者意识里的解题根据和解题方法.作为方法,它是最高层次的解题方法.解题思想与知识的不同之处在于:解题思想是解题开始的思想,知识则是解题终端的思想.

2. 解题观点

是指对"怎样解题"、"为什么这样解题"的整体认识.它既是数学思想在解题实践中的应用,又是教学思想在解题教学中的体现.

3. 解题目的

本书指解题教学的目的(参见§2-4).

4. 解题过程

指人们寻找问题解答的活动.它通常包括从拿到题目到完全解出的所有环节与每一步骤(参见第三章).

5. 解题程序

经过规范化而成为可操作的解题过程,称为解题程序.它是解题思想的最终形式,也是思想与动作的连接点(参见第三章).

6. 解题坐标系

这是建立数学解题理论的一个模型,反映了数学化研究解题的一个愿望(参见§4-2).

7. 解题技巧

解决个别具体数学问题的手段、途径叫做解题技巧.

8. 解题方法

解题适应面较宽,可反复运用的解题技巧叫做解题方法.

9. 解题原则

几乎对一切问题都适用的解题方法叫做解题原则.就整个解题过程来说,它介于解题思想与解题方法之间(参见§2-2-3,§4-1-2,§4-2-2).

10. 解题策略

为了实现解题目标而采取的指导方针,它体现了选择的机智与组合的艺术,与解题原则属于同一层次(参见第六章).

有了这些基本名词,我们可以描绘出本书解题理论的初步框架与核心内容.

解题思想
解题策略
解题原则
解题程序
解题行动
初始状态
基础理论
基本方法
最终状态
解后研究
解题过程
解题过程的思维分析
解题过程的结构分析
解题过程的长度分析
……
从系统论观点看解题
从坐标系观点看解题

图 1-1

我们的解题理论,就是要弄清解题过程,使得整个流程成为一个有序并尽量可控的系统.

1-2 解题研究的现状分析

解题是初等数学中一个极有生命力、极富独创性和充满诗情画意的工作.因此,数学解题的研究从来就是一个十分激动人心的课题.从基层工作者到前沿数学家都情不自禁地参与其中.尽管许多盲目的、重复性的工作能否称为研究很值得怀疑,但依然表现出健康的主流.

1－2－1 解题研究的健康主流

主要表现为7个方面：

1. 数学方法论的理论研究受到了重视，得到了发展

1980年出版的《中学数学教材教法》(总论)在指出“一些基本的数学思想和数学方法”也是“基本知识”时，批评说：“中学数学内容中的这些基本方法历来没有受到足够的重视，甚至连基本的总结也做得很不够……”①这些权威教学法专家们的意见，基本上反映了1980年以前的情况.

但是，进入80年代之后，情况有了很大的改变.特别是在徐利治教授的倡导下，数学方法论的研究已经形成了一个影响全国的气候.郑毓信教授在《数学方法论》一书中有一段意味深长的开头：“数学方法论”现今对于我国数学界、特别是数学教育界已不是一个陌生的名称；然而，大多数人却未必知道，这只是一个在中国学术界得到广泛应用的名词，或者说，这在很大程度上即是一个由我国学者首先加以应用的名词.从有关材料看，徐利治教授在1980年出版的《浅谈数学方法论》中首先采用了这样一个名词……②

如今，数学方法论的研究已经得到了很大的发展，既诞生有高层次的专著，更出现大批普及型的书籍与文章.数学方法论或中学数学方法论已经成为师范院校研究生、本科生、专科生和教师进修的一门时髦课程，同时也成为中国学者在世界同行中引以自豪的一个学术特色.

2. 波利亚学说的研究和传播

波利亚的《怎样解题》，早在40年代就曾有过中译本(周佐严译，中华书局出版).60年代初叶，我国曾有人翻译《数学的发现》，但由

---

① 见参考文献[17]P.16.

② 见参考文献[2]P.1.

于种种原因未能完成[①].现在,波利亚的名著《怎样解题》(1945年)、《数学与似真推理》(1954年)、《数学的发现》(1962年)等已经翻译发行[②].其中的解题观点正在成为许多同行研究解题的指导思想;国内一些学者还召开了波利亚数学思想的讨论会;关于波利亚解题观的研究正在深入;一批波利亚型的数学工作者在成长.所有这一切,使得数学解题的研究,摆脱了就题论题的狭窄天地,进入到规律探索的较高层次.

3. 数学奥林匹克的异军突起

数学竞赛也是一种解题竞赛.这种活动的开展一方面为初等数学源源输入具有大学性质的、体现现代数学的思维方式,另一方面又调动和活化了初等数学潜在的方法与技巧.这两方面的结合,就为解题研究输入了新鲜的血液.

数学竞赛里充满着眼花缭乱的"技巧":构造、映射、递推、区分、染色、极端、对称、配对、特殊化、一般化、数字化、有序化、不变量、整体处理、变换还原、逐步调整、奇偶分析、优化假设、计算两次、辅助图表[③]……值得注意的是,这些"技巧"不是各别孤立的一招一式或妙手偶得的雕虫小技,而是一种高思维层次、高智力水平的策略思想.这一切,又为解题研究提供了新鲜而丰富的素材.

数学竞赛所造就的教练员队伍,除个别为徒有虚名之外,其主力全是出类拔萃的解题专家或炉火纯青的技巧大师,这是解题研究的一支生力军.

就是说,数学竞赛的内容、方法和队伍正以排山倒海之势推动解题研究的发展(也推动初等数学研究的发展).中国中学生在国际数学奥林匹克(IMO)中的成绩与优势,从一个侧面反映了我国解题研

---

① 江泽涵.关于波利亚的《怎样解题》和《数学的发展》的一些往事.中学数学教学(皖),1983,2,P.4.

② 见参考文献[27]、[28]、[29].

③ 见参考文献[45]罗增儒等.数学竞赛教程,§2-6,P.197.

究的兴旺发达.

4. 数学解题的研究正与思维科学的成果相结合

数学思维问题是数学教育的核心问题.斯托利亚尔在《数学教育学》一书中指出:数学教学是数学(思维)活动的教学.他在列举数学教育目的时,把发展学生的数学思维放在第一位①.

由于钱学森教授的大力倡导,"思维科学"在我国已经发展为一门独立的学科,它给数学思维的研究提供了方向性的启示.近年来,关于数学思维的模式、数学非逻辑思维(包括形象思维、直觉思维),数学思维的指向性(如定向思维、逆向思维、收敛思维、发散思维等),数学思维品质的培养(如广阔性、深刻性、灵活性、敏捷性、批判性、创造性等)等方面的研究,正在揭示数学发现的秘密,同时,也为解题能力的提高指明了途径.这不仅深化了数学解题的研究,而且也促进了解题教学的发展.

5. 解题研究的层次已经深入到策略思想的高度

我国的数学解题研究终于从一招一式的归类中摆脱出来,解题教学中的策略意识已经受到了重视,也提出了许多解题策略.在戴再平著《数学习题理论》②中列举了8条,在任樟辉的《数学思维论》③里又列举了10条.有些策略思想,如化归、RMI原理、以退求进、正难则反等还讨论得很深入、很细致,也很有数学特征,而不仅仅是"逻辑+数学例子".

6. 初等数学学术研究形成高潮

以初等数学为基本内容的中国解题研究,从80年代起,逐渐把初等数学的学术研究推向高潮,1991年8月在天津召开了首届全国初等数学学术交流会是一个重要的标志.之后,若干省市相继成立了初等数学研究会,多家刊物开辟了初等数学研究新成果专栏,多本初

① 见参考文献[18]P.28.

② 参考文献[11].

③ 参考文献[26].

等数学研究著作陆续出版①.研究初等数学已经成为许多数学家和数学教育家共同关心的一大课题.目前这种研究主要集中在3个方面.其一是继续搜寻初等数学的新结论,为初等数学的理论宝库增添新的财富;其二是阐发现代数学与初等数学的联系,为现代数学的发展提供深刻的背景;其三是既作为解题理论提炼的基本素材,又作为解题理论检测的实验园地.这三方面的工作,使得解题理论研究不再是一株只开花不结果的绿树.

7. 解题学派初步形成

方法研究、竞赛研究、高考研究、思维研究、教法研究等各路大军都在"解题"的结合点上汇聚,组成一支浩浩荡荡的解题研究实干家群体,这是解题研究的一个极为壮观的成果.各路大军各有自己的目的和方向,但都离不开解题活动.这就为解题研究带来了多角度、多层次的贡献,同时也为解题研究带去了多角度、多层次的应用,使得解题研究更加五彩缤纷,充满朝气与活力.

1-2-2 解题研究的存在问题

解题研究中的主要问题是还存在着一些片面的认识与盲目的实践.我们指出4点.

1. 取消论

认为随着数学内容的学习,数学知识的丰富,解题方法可以自然而然地掌握,解题能力可以自然而然地产生.解题的理论研究纯属多

① 比较重要的有下述5种:

[1]杨世明主编.中国初等数学研究文集.河南教育出版社,1992年.

[2]李炯生、黄国勋主编.中国初等数学研究.科学技术文献出版社,1991年.

[3]杨学枝、林章衍主编.福建省初等数学研究文集.福建教育出版社,1993年.

[4]杨之.初等数学研究的问题与课题.湖南教育出版社,1993年.

[5]陈计、叶中豪主编.初等数学前沿.江苏教育出版社,1996年.

余的标新立异.一些连中学教材的习题都不能独立完成的空头理论家,更为这种观点提供了口实.而来自学生的情况却是,许多人学了课本内容不会解题,还有的人解了许多题却说不清思路.教师中也有类似情况.

解题理论须以解题实践为基础,但是,再丰富的经验也无法代替理论,并且,缺乏正确理论指导的实践常会流于盲目.

2. 研究的误区

解题研究存在一些误区.首先一个表现是,用现成的例子说明现成的观点,或用现成的观点解释现成的例子.其次一个表现是,长期徘徊在一招一式的归类上,缺少观点上的提高或实质性的突破.第三个表现是,多研究“怎样解”,较少问“为什么这样解”.因此,尽管有丰富的解题资料,却始终未上升为系统的解题理论.

在这些误区里,“著书而不立说、撰文而不立论”.我们还看到,有些传统题目十几年乃至几十年无任何改进,从这本杂志抄到那本杂志,从老的资料抄到新的“编著”.在局部上,既有流行的错误变成了“佳题巧解”(如例 1-1,例 1-2),又有正确的解法屡遭“更正”(如例 1-3).至于“凡偶函数都没有反函数”、“方程存在域扩大是方程增根的必要条件”、“空间中,一个角的度数大于它在任一平面上的垂直投影角的度数”等错误,在中学校园里更像癌症一样顽固.

例 1-1 已知$(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$,求证 x,y,z 成等差数列.

[1979 年数学高考题]

讲解 自 1979 年以来,有 10 年的时间,人们一直认为构造方程

$$(x-y)t^2+(z-x)t+(y-z)=0$$

是好主意,可就不知道构造方程①

① 其心理障碍是潜在假设判别式 b^2-4ac 对应惟一的方程 $ax^2+bx+c=0$.其实二次方程 $x^2+bx+ac=0$,$\frac{a}{n}x^2+bx+nc=0$ 的判别式均为 b^2-4ac.

$$t^2+(z-x)t+(x-y)(y-z)=0$$

更好. 1989 年我们指出了后一解法[①],可至今仍有报刊把麻烦的前一处理称为“巧解”(参见例 3-10,P.131).

例 1-2 在实数范围内解方程

$$\frac{11x^2-6}{7-12x^2}=\sqrt{\frac{7x+6}{12x+11}}.$$

[《数学通报》1979 年 12 月号问题 26]

讲解 有的解法认为“方程两边的函数互为反函数,因而交点在 $y=x$ 上”. 其实,这是一个流行的误解,虽然早有文章指出原理的错误,而至今仍有报刊不断重复同样的疏忽(参见例 6-55,P.397).

例 1-3 求 $x^2-2x\sin\frac{\pi x}{2}+1=0$ 的所有实数根.

[1956 年北京数学竞赛题]

讲解 有这样的解法: 设 x 为实数,则所给二次方程之判别式应大于或等于 0

$$\left(2\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2-4\geqslant 0,$$

即
$$\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2\geqslant 1.$$

因为 x 为实数,故

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2\leqslant 1.$$

比较以上两式,即知

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2=1,$$

从而
$$\sin\frac{\pi x}{2}=\pm 1.$$

分别代入原式,有

---

① 写进《高二数学解题能力强化训练》(陕西师范大学数学教育研究室主编),陕西教育出版社,1990 年 12 月第 1 版,P.124.

$$\begin{cases} x^2-2x+1=0, \\ \sin\dfrac{\pi x}{2}=1, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x^2+2x+1=0, \\ \sin\dfrac{\pi x}{2}=-1. \end{cases}$$

得 $x_1=1, x_2=-1$ 为所求的实数根.□①

本来,这种解法既精巧又合理,但是,40 年来,已经反反复复有大批“读者来信”,在多家刊物上提出“更正”.理由是“原方程根本就不是二次方程”,不能用判别式.更有甚者,认为只能用配方法求解,这就把判别式与配方法对立了起来,不知道或不承认“判别式”是“配方法的结果”②(参见§5-2-1).

对例 6-26(P.370)千篇一律的“退”,其实也是误区,进比退好!

3. 考试目的

将解题的研究归结为应付升学的考查,解题的规律被简单化为“对题型、套解法”,由此产生盲目的“题海战术”、“习题效应”和解题教学新八股(图 1-2):

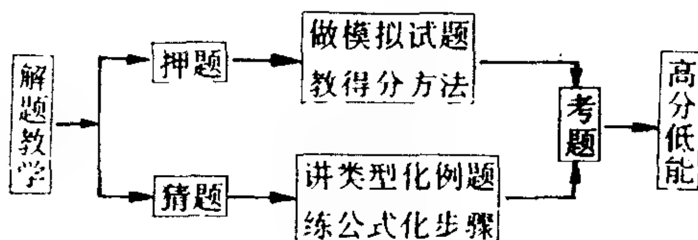


图 1-2

① 本书用□表示证毕、解完,但不表明对整个题目的分析、解释、评析也结束.比如本例中的讲解还在继续进行.

② 拙著《高中数学奥林匹克系列教材》(第一册)P.8 例 11 有例 1-3 解法正确性的浅显说明.要害是须明白,此处的判别式用了必要性,还要再验证充分性.充分性、必要性都做了就是正确的.

这种模式,将智力开发等同于技艺训练,以考试为瞄准目标,以猜题、押题为主要手段,以做模拟题所带来的偶然因素去代替数学素质的提高,即使获得了高分也扼杀了能力.其大运动量强化训练的一个不幸后果是,使数学成为中学课程中最令人生畏或最不得人心的学科之一;另一个不幸后果是,大学新生对数学学习的热情消退,在他们的入学成绩中,强烈兴趣的含量不高,叫苦连天的成分不低.

4. 理论与实践的脱节

有的同行很会解题,也解了很多题,但没有进行系统的总结,没有上升为理论.请他们谈谈如何解题时,他们只会说:"你把题目拿来".另有的同行很会总结,可解题能力较差,只会在剪刀加糨糊上下功夫,所举的例子没有一个是新的,更没有一个解法是他自己的.历史在呼唤实干家与理论家的统一.

1-2-3 存在问题的原因分析

主要有4条原因:

1. 解题研究缺乏解题理论的指导

正因为看不见理论的强有力指导,所以既有取消论,又有盲动;正因为缺少理论的指导,所以观点旧、层次低.

2. 初等数学解题研究缺乏高等数学的指导

"高等数学的思想与初等数学的技巧相结合"已经提出很多年了,波利亚关于怎样解题的书,正因为体现了"高等数学问题的研究经验"①,才写得那么引人入胜.但在许多情况下(包括师范院校初等数学研究课)这种结合仍然是貌合神离的两张皮.竞赛数学的崛起,才开始冲破这一封闭而沉闷的局面.

3. 升学压力的干扰

由于升学压力,所以有解题研究的考试目的;由于升学压力,许多杂志不愿或不敢多占篇幅发表高水平的、真正理论研究的文章;为

---

① 参考文献[27]波利亚.数学的发现,序言.

了保证发行量,不得不违心地登载既无观点又无新意的重复资料.

4. 缺少争鸣气氛

真理越争越明,没有争鸣与再争鸣,没有批评与再批评,只能导致一潭死水.如果在数学中也有一个类似"文学评论"的数学批评学,经常进行作者评论、文章(或书籍)评论、动向评论,那么,整个研究气氛将大大活泼而健康起来.

1-3 解题资料的初步整理

涉及数学解题或解题方法的文章、书籍是研究解题的原始素材.这方面的资料浩如烟海,每年有大批书籍出版,每期中学数学杂志都以大量版面刊登题解或解题.我们粗略地将这些资料分成6类.

1. 理论性的方法研究

这类著作主要是从方法论的高度研究和讨论数学的发展规律,数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新法则.通常理论性较强,层次也较高(当然这一类资料本身也是有层次的).如参考文献[1]~[16].

2. 教学性的解题总结

这类著作多从教育学、心理学或思维科学等角度,对解题进行分析研究与系统总结,常带有提高解题教学理论水平,并通过解题培养能力、发展思维的教育动机.这类资料多体现在教材教法课程中解题教学部分,或以培养能力、发展思维为主题的解题书刊中,如参考文献[17]~[26].

3. 规律性的解题探索

这类著作从数学具体解题方法、具体解题技巧中提炼出方法论的价值,勇敢探索"怎样想到这个解法"、"是什么促使你这样想、这样做"的规律,努力摸清人们发现解法、找到思路的秘密,最杰出的代表是波利亚的世界名著.如参考文献[27]~[36].

4. 技巧性的解题指导

这类书刊主要是结合题目介绍解题的具体方法与具体技巧.如参考文献[37]~[40].

5. 竞赛数学的原始积累

主要指竞赛题的解法研究和辅导讲座.自1986年中国数学会普及工作委员会第四届年会(西安会议)之后,这方面的资料如雨后春笋,如参考文献[41]~[45].有识之士已经指出,这些资料的长期积累,将诞生一门独具特色的数学——竞赛数学(又称奥林匹克数学).

6. 资料性的习题类编

这方面的书籍、文章不计其数,大多只是现成的例子和现成的观点(个别的甚至没有任何观点).有的是解题集,有的是习题集,有的是专门为升学服务的复习资料.在复习资料中,有一部分是以高考为素材的解题研究,这是具有中国特色的高考文化的重要组成部分,其中不乏珍品;而另有一部分,则体现了解题教学新八股,并为题海战术和应试教育推波助澜.

1-4 解题基本功

解题的成功取决于多种因素,其中最基本的有:解题的知识因素,解题的能力因素,解题的经验因素和解题的非智力因素,我们统称为解题基本功.

1-4-1 知识结构

人的思维依赖于必要的知识和经验,数学知识正是数学解题思维活动的出发点与凭借.丰富的知识并加以优化的结构能为题意的本质理解与思路的迅速寻找创造成功的条件.解题研究的一代宗师波利亚说过:"货源充足和组织良好的知识仓库是一个解题者的重要资本."每一个希望提高解题效率的人,都必须下决心,花大力气去做到下述3个基本要求.

1. 熟练掌握数学基础知识的体系.对于中学数学解题来说,应

如数家珍说出教材的概念系统、定理系统、符号系统. 还应掌握中学数学竞赛涉及的基础理论.

2. 深刻理解数学概念,准确掌握数学定理、公式和法则.

3. 熟悉基本的逻辑规则和常用的解题方法,积累不断涌现的数学技巧.

例 1-4　如图 1-3,在$\triangle ABC$的两边AB和AC上向外作正方形$ABEF$和$ACGH$,则边BC上的高AD平分线段FH.

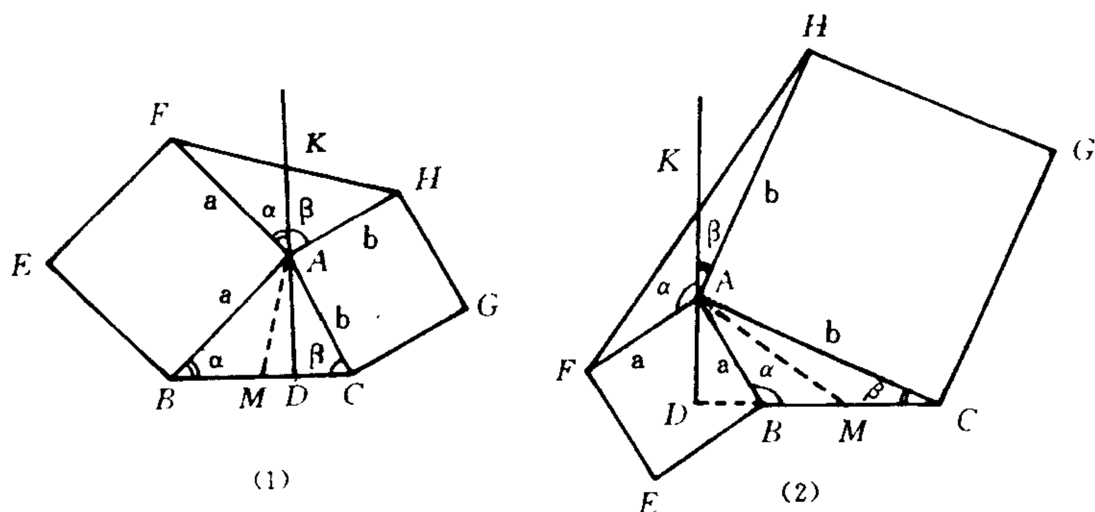


图 1-3

讲解　这是一道传统题,有不下 10 种解法. 如果我们站的观点较高,则立即可看到面积相等:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin A=S_{\triangle AFH}.$$

从而$\triangle ABC$与$\triangle AFH$剖分相等①. 又由于要证$FK=KH$,若此式成立,必有

① 若两个三角形可以分成两两对应全等的三角形,则称这两个三角形为剖分相等的三角形. 在面积理论里有一条很深刻的定理: 面积相等的三角形必是剖分相等的. 见钱端壮. 几何基础. 高等教育出版社,1959 年 3 月,P.146.

$$S_{\triangle AKF}=S_{\triangle AKH}.$$

由此,诱发我们去考虑,把$\triangle ABC$分成两个等积的三角形,分别与$\triangle AKF$,$\triangle AKH$全等.因而作AM交BC于M,使

$$\angle BAM=\angle AFK,$$

从而

$$\begin{aligned}\angle MAC&=\angle BAC-\angle BAM\\&=(180^\circ-\angle FAH)-\angle AFK\\&=\angle AHF.\end{aligned}$$

于是

$$\triangle AFK\cong\triangle BAM,\ (SAS)$$

$$\triangle AHK\cong\triangle CAM,\ (SAS)$$

得

$$FK=AM=HK.$$

命题得证.□

为了证明$FK=HK$,通过辅助线AM来过渡,这个思路是比较隐蔽的,不熟悉"面积相等必剖分相等"的中学生,要找到这个思路必多费周折,这说明,知识对解题的指导作用.

例1-5 有甲、乙、丙三种货物,若购甲3件、乙7件、丙1件,共需3.15元;若购甲4件、乙10件、丙1件,共需4.20元;现在购甲、乙、丙各一件共需几元?

[1985年全国初中数学联赛题]

讲解 设甲、乙、丙的单价分别为x元、y元、z元,依题意,有

$$\begin{cases}3x+7y+z=3.15, & ①\\4x+10y+z=4.20. & ②\end{cases}$$

对于中学生,这是一道非常规的方程问题,需要有较强的观察、分析和变形能力.可以有多种途径将其转化为常规二元方程组的求解.

途径1 将原方程变形为

$$\begin{cases}2(x+3y)+(x+y+z)=3.15,\\3(x+3y)+(x+y+z)=4.20.\end{cases}$$

于是,$(x+y+z)$的求值转化为消去$(x+3y)$.

途径2 视x,y为主元素,将原方程组变形为

$$\begin{cases}3x+7y=3.15-z,\\4x+10y=4.20-z.\end{cases}$$

解出

$$\begin{cases}x=1.05-1.5z,\\y=0.5z.\end{cases}$$

从而

$$x+z+z=1.05(\text{元}).\ \square$$

但是,如果有空间解析几何的知识,那么就可以居高临下看出,①、②表示了两个平面,而求解则是确定一个过其交线的平面(求k):

$$x+y+z=k. \tag{③}$$

写出过①、②交线的平面系

$$\lambda(3x+7y+z-3.15)+\mu(4x+10y+z-4.20)=0,$$

即

$$(3\lambda+4\mu)x+(7\lambda+10\mu)y+(\lambda+\mu)z=3.15\lambda+4.20\mu.$$

令

$$\begin{cases}3\lambda+4\mu=1,\\7\lambda+10\mu=1,\\\lambda+\mu=1.\end{cases}$$

可解得$\lambda=3,\mu=-2$,从而得③中的k为

$$k=3.15\times3-4.20\times2=1.05.$$

由此,得到简便解法:

解　①×3－②×2得

$$x+y+z=3.15\times3-4.20\times2=1.05.$$

即购甲、乙、丙各1件共需1.05元. □

没有空间知识作指导,要找到这个解法并不轻松;而有空间知识,一切都只不过是逻辑的必然。

从空间知识出发,要确定平面③有一个点就够了,故有特殊化解法令$y=0$;另外,将方程①、②、③联立,得三元非齐线性方程组有非零解,又可得行列式解法.

例1-6　已知$\{a_n\}$是等比数列.如果

$$a_1+a_2+a_3=18,$$

$$a_2+a_3+a_4=-9,$$

且$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,那么$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$的值等于(　　).

A. 8　　B. 16　　C. 32　　D. 48

[1989 年理科高考题]

解法 1　由 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{a_1}{1-q}$ 知,只需求出 q 与 a_1,又由已知

$$\begin{cases}a_1(1+q+q^2)=18, & ①\\ a_1q(1+q+q^2)=-9, & ②\end{cases}$$

相除得 $q=-\frac{1}{2}$.

代入①得

$$a_1=\frac{18}{1+q+q^2}=\frac{18}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=24. \qquad ③$$

得 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{a_1}{1-q}=\frac{24}{1+\frac{1}{2}}=16$. 选 B. □

但由求和公式

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q},$$

得

$$\frac{a_1}{1-q}=\frac{S_n}{1-q^n}, \qquad ④$$

更有

$$\frac{a_1}{1-q}=\frac{S_3}{1-q^3},$$

可见,解法 1 中求 a_1 是多余的. 如果注意到,相对来说求出 a_1 是较繁重的一步,那么,删去这一步就是一项有实质意义的改进.

解法 2　由①、②相除,得 $q=-\frac{1}{2}$,因而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在且

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a_1}{1-q}=\frac{S_3}{1-q^3}=\frac{18}{1+\frac{1}{8}}=16. \ \square$$

这几个例子显示了知识对于解题思路的寻找与解题过程的改进的基础作用. 解题基本功的大小,首先取决于知识的多寡、深浅和完善程度. 古今中外的数学家无不以渊博的知识而著称,没有知识谈不

上解题.古罗马哲学家西塞罗说:"无知是智慧的黑夜,是没有月亮、没有星星的黑夜."原俄国教育家乌申斯基指出:"智慧不是别的,而是组织得良好的知识体系."

1-4-2 思维能力

解题能力,表现于发现问题、分析问题、解决问题的敏锐、洞察力与整体把握.其主要成分是3种基本的数学能力(运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力),核心是能否掌握正确的思维方法,包括逻辑思维与非逻辑思维.其基本要求包括:

1. 掌握解题的科学程序;
2. 掌握数学中各种常用的思维方法,如观察、试验、归纳、演绎、类比、分析、综合、抽象、概括等;
3. 掌握解题的基本策略,能"因题制宜"地选择对口的解题思路,使用有效的解题方法,调动精明的解题技巧;
4. 具有敏锐的直觉.应该明白,我们的数学解题活动是在纵横交错的数学关系中进行的.在这个过程中,我们从一种可能性过渡到另一种可能性时,并非对每一个数学细节都洞察无遗,并非总能借助于"三段论"的桥梁,而是在短时间内朦胧地插上幻想的翅膀,直接飞翔到最近的可能性上,从而达到对某种数学对象的本质领悟.

例1-7 已知 x_1,x_2 是实系数二次方程

$$x^2-2mx+m+2=0$$

的两个实根.问:

(1) m 为何值时,$x_1=x_2$?

(2) m 为何值时,$x_1^2+x_2^2$ 有最小值?最小值是多少?

讲解 有两种思维水平的处理.

水平一 把问题(1)看成是一元二次方程判别式的应用.

$$\begin{aligned}\Delta&=(-2m)^2-4(m+2)\\&=4(m^2-m-2)\\&=4(m+1)(m-2)=0.\end{aligned}$$

得 $$m_1=-1, m_2=2.$$

把问题(2)看成是韦达定理与判别式的应用.

$$\begin{aligned}x_1^2+x_2^2&=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\\&=4m^2-2(m+2)\\&=4\left(m-\frac{1}{4}\right)^2-4\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

又由 $\Delta\geqslant0$ 得, $m\leqslant-1$ 或 $m\geqslant2$.

当 $m\leqslant-1$ 时, $x_1^2+x_2^2\geqslant4\left(-1-\frac{1}{4}\right)^2-4\frac{1}{4}=2$;

当 $m\geqslant2$ 时, $x_1^2+x_2^2\geqslant4\left(2-\frac{1}{4}\right)^2-4\frac{1}{4}=8$.

两相比较,得 $x_1^2+x_2^2$ 的最小值为 2. □

水平二　把问题(1)看做求 m 的应用题,为了解这个应用题我们来列方程,为了寻找方程的等量关系,才用到一元二次方程的判别式等于零.

① 等量关系:　　$\Delta(m)=0$;

② 方程:　　$4m^2-4(m+2)=0$;

③ 解方程:　　$m_1=-1, m_2=2$.

把问题(2)看做是函数的最值问题,为了求函数的最值,需要寻找函数关系和定义域,为了找函数表达式用到了韦达定理(并非必要),为了找函数的定义域,用到了方程的判别式非负.

① 找 m 的函数式:
$$\begin{aligned}f(m)&=x_1^2+x_2^2\\&=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\\&=4m^2-2m-4;\end{aligned}$$

② 找函数的定义域:由 $\Delta=4(m^2-m-2)\geqslant0$,得
$$m\in(-\infty,-1]\cup[2,+\infty).$$

③ 找最小值.

当 $m\leqslant-1$ 时, $f(m)$ 是减函数,有
$$f(m)\geqslant f(-1)=4\times(-1)^2-2\times(-1)-4=2;$$

当 $m\geqslant2$ 时, $f(m)$ 是增函数,有

$$f(m)\geqslant f(2)=4\times2^2-2\times2-4=8.$$

由于 $f(-1)<f(2)$,故当 $m=-1$ 时,函数有最小值

$$f(-1)=2.\ \square$$

对比这两种思维水平,所用到的知识是相同的,结论也都正确.但水平一仍然停留在感性概括和简单应用的阶段上,而水平二则抽象到较为恰当的程度,由于水平二把这两个具体的问题纳入到中学阶段最重要的知识体系:"方程与函数"上,运用方程与函数的观点去解决问题,既如鱼得水,又势如破竹.随着学习内容的增加,学习难度的增大,两种思维水平的差距将明显拉开.

例 1-8 在复平面上,一个正方形的四个顶点按照逆时针方向依次为 Z_1,Z_2,Z_3,O(其中 O 是原点).已知 Z_2 对应复数 $z_2=1+\sqrt{3}i$.求 Z_1 和 Z_3 对应的复数.

[1995 年数学高考理科题]

讲解 有两种思维水平的处理.

水平一 如图 1-4,由复数乘法的几何意义,有

$$\begin{aligned}z_1&=\frac{1}{\sqrt{2}}z_2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{3}i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\\&=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i,\\z_3&=\frac{1}{\sqrt{2}}z_2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{3}i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\\&=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i.\ \square\end{aligned}$$

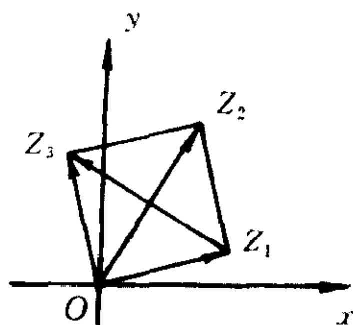


图 1-4

水平二 由复数运算的几何意义,有

$$z_3+z_1-z_2=1+\sqrt{3}i,$$

$$z_3-z_1=z_2 i=-\sqrt{3}+i.$$

加减消元得

$$z_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i,$$

$$z_3=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i. \square$$

前一解法,表现为具体解题的一招一式(数值计算),对于其他问题(特别是非复数问题)几乎没有任何启示.后一解法则体现了方程观点(上升为代数观点),为了求两个未知数,我们来建立两个方程(一般性解决),为了建立方程,我们用到了复数运算的几何意义(功能性解决).这种解题思考有普遍性的价值(见§3-2-2,P.115),并且运算也简单得连犯错误的机会都没有.

1-4-3 经验题感

解题具有实践性与探索性的特征,"就像游泳,滑雪或弹钢琴一样,只能通过模仿和实践来学到它……你想学会游泳,你就必须下水,你想成为解题的能手,你就必须去解题"[①].弗里德曼也说过:"寻找题解不能教会,而只能靠自己学会."[②]这都是强调它的实践性.

基础知识要通过解题实践来消化;

思维素质要通过解题实践来优化;

解题方法要通过解题实践来强化.

在解题实践中,既会有成功又会有失败.这两方面的积累,都能形成有长久保留价值或借鉴作用的经验.

所谓解题经验,就是某些数学知识、某些解题方法与某些条件的有序组合.成功是一种有效的有序组合,失败是一种无效的无序组合

---

① 参考文献[28]波利亚.数学的发现,序言.

② 参考文献[30]弗里德曼.怎样学会解数学题,P.73.

（它从反面向我们提供有效的有序组合）. 成功经验所获得的有序组合，就好像是建筑上的预制构件（或称为思维组块），遇到合适的场合，可以原封不动地把它用上①.

弗里德曼特别强调：解题训练的心理学研究表明，学生在解题时不具备一般能力的基本原因，在于没有经常亲自动手进行分析，没有从中归纳出一般的运算方法及其理论根据②.

例 1－9 在四边形 $ABCD$ 中，求证

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geqslant AC \cdot BD.$$

例 1－10 P 是$\triangle ABC$ 所在平面上的任一点，求证

$$BC \cdot PB \cdot PC + CA \cdot PC \cdot PA + AB \cdot PA \cdot PB \geqslant BC \cdot CA \cdot AB.$$

讲解 第一次遇到这类题目，也许你没有应用复数的经验，你只好用综合几何的方法去求解. 但是有一天，你学会了或自己发现了：当把该点的字母看成该点的复数时，例 1－9 所要证明的就是复数不等式

$$|A-B| \cdot |C-D| + |A-D| \cdot |B-C| \geqslant |A-C| \cdot |B-D| \quad ①$$

这种形式与复数的三角形不等式

$$|x| + |y| \geqslant |x \pm y|$$

类似. 下来只须证 $|x+y|$ 正是 $|(A-C) \cdot (B-D)|$，即证实恒等式

$$(A-B)(C-D) + (A-D)(B-C) = (A-C)(B-D). \quad ②$$

这并不困难. 于是有下面的证法：建立复平面，视该点上的字母为该点的复数，有

$$\begin{aligned}
左 &= |A-B| \cdot |C-D| + |A-D| \cdot |B-C| \\
&= |(A-B)(C-D)| + |(A-D)(B-C)| \\
&\geqslant |(A-B)(C-D) + (A-D)(B-C)| \\
&= |(A-C)(B-D)|
\end{aligned}$$

---

① 参考文献[34]胡炳生. 数学解题研究和发现，P.3

② 参考文献[30]弗里德曼. 怎样学会解数学题，致读者.

$$=|A-C|\cdot|B-D|=\text{右}.$$

对比①式与②式,我们从这个证明中获得了“对复数等式求模,得出不等式”的经验.有了这个经验,我们就能对例 1-10 产生类似联想,由复数不等式

$$|x|+|y|+|z|\geqslant|x+y+z|$$

出发,去找(相当于②式的)复数恒等式

$$(B-C)(P-B)(P-C)+(C-A)(P-C)(P-A)+$$
$$(A-B)(P-A)(P-B)=-(B-C)(C-A)(A-B).$$

这比验证②式的工作量大得多.但我们有了这个方向就保证了解题的成功,至于具体的实施,还可以借助更多的经验:建立复平面,用该点的字母表示该点的复数.记

$$f(P)=(B-C)(P-B)(P-C)+(C-A)(P-C)(P-A)+$$
$$(A-B)(P-A)(P-B).$$

这是关于 P 的不超过二次的多项式.又由

$$f(A)=f(B)=f(C)=-(B-C)(C-A)(A-B)$$

知,$f(P)$只能为常数,得

$$f(P)=-(B-C)(C-A)(A-B).$$

求模,有

$$\text{左}=|B-C|\cdot|P-B|\cdot|P-C|+|C-A|\cdot|P-C|\cdot|P-A|+$$
$$|A-B|\cdot|P-A|\cdot|P-B|$$
$$=|(B-C)(P-B)(P-C)|+|(C-A)(P-C)(P-A)|+$$
$$|(A-B)(P-A)(P-B)|$$
$$\geqslant|f(P)|$$
$$=|-(B-C)(C-A)(A-B)|$$
$$=|B-C|\cdot|C-A|\cdot|A-B|=\text{右}.$$

在解题中,一个人能避开歧路,绕过难点,从众多可能的途径中一举选定正确的一条,确是一定的数学经验调控的结果.解题所做的脑力工作就在于回忆他的经验中用得上的东西,并且和他的解题思维联系起来(参见§4-2-2,§6-2-1).

解题经验的积累,有利于解题念头的诱发,有助于直觉性题感的形成.题感指的是人们对问题的总体性的感受,它是思维定势正迁移的一种潜在表现,实质是一种数学观念、数学意识,常体现为整体把握及成功思路的预感、预测和预见.如像学外语的“语感”、学音乐的“乐感”.

例 1－11 在面积为 1 的$\triangle PMN$中,$\mathrm{tg}M=\frac{1}{2}$,$\mathrm{tg}N=-2$.建立适当的坐标系,求以 M,N 为焦点且过 P 的椭圆方程.
[1993 年数学高考题]

讲解 当许多考生就题论题地将问题处理得很繁时,一种总体性的感受启示我们迅速作出“一般性解决”(见§3－2－2):为了求椭圆的方程,只须求三个特征量(半长轴 a、半短轴 b,半焦距 c)中的两个,比如说求 a,c.这从哲学意义上说,问题已经解决了.由图 1－5 知

$$MN=2c,$$

$PM+PN=2a$.问题转化为初中的解三角形(功能性解决),有

$$c=\frac{\sqrt{3}}{2},\ a=\frac{\sqrt{15}}{2},\ b=\sqrt{3}.$$

这时,不管怎样建立坐标系,都很容易写出椭圆的方程.这里的关键是,解题经验的积累使我们能一开始就正确把握解题的总体方向.

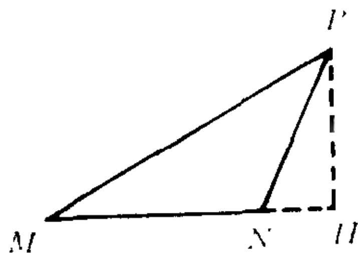


图 1－5

经验题感的一个重要构成是美感.熟谙数学美,能以美启真、以美寻真,能够从题意中领悟到审美感受,从而随之产生解题的意向(参见§6－2－10).

例 1－12 设$\{a_n\}$是由正数组成的等比数列,S_n 是其前 n 项和.证明

$$\frac{\lg S_n+\lg S_{n+2}}{2}<\lg S_{n+1}. \qquad ①$$

[1995年数学高考理科第25(1)题]

讲解 对求证式加以变形,可得

$$S_nS_{n+2}<S_{n+1}^2, \qquad ②$$

或

$$\frac{S_{n+1}}{S_n}>\frac{S_{n+2}}{S_{n+1}}. \qquad ③$$

这两个式子,哪一个更有利于求解呢?缺乏数学审美经验的中学生往往选择②而舍弃③,其实③式的左右两边,在结构上更匀称、更和谐,背景也更明显,无非就是数列

$$b_n=\frac{S_{n+1}}{S_n}$$

的单调性,这由

$$\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{a_1+qS_n}{S_n}=\frac{a_1}{S_n}+q$$

立即可以得出.因为 $a_n>0$,所以当 n 增大时,S_n 也增大,从而 b_n 是单调递减数列,式③是成立的(继续参见例4-33,P.206).

1-4-4 情感态度

这里主要指良好的心理素质,如动机、兴趣、抱负、态度、品德、意志等.这些非智力因素对于解题的作用,与其对于发明发现的作用是一样的.华罗庚教授说:"聪明在于学习,天才在于积累."1995年5月,在中国数学会60周年年会上,笔者请国际数学大师陈省身教授谈学数学的体会,大师胸有成竹地说:首先是用功,不用功什么也谈不上.我们说,学生学习数学只有通过自身的情感体验,树立坚定的信心,才可能是成功的.

波利亚也说:"认为解题纯粹是一种智能活动是错误的;决心与情绪所起的作用很重要."他强调说:"教学生解题是意志的教育.当学生求解那些对他来说并不太容易的题目时,他学会了败而不馁,学会了赞赏微小的进展,学会了等待主要的念头,学会了当主要念头出现后全力以赴.如果学生在学校里没有机会尝尽为求解而奋斗的喜

怒哀乐，那么他的数学教育就在最重要的地方失败了."①

例 1－13　已知二次方程

$$(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0 \tag{1}$$

有等根，求证 a,b,c 成等差数列.

讲解　有的书断言，考虑判别式

$$\Delta=(c-a)^2-4(b-c)(a-b)=0 \tag{2}$$

不好，应该先观察出 $x_1=1$，再用韦达定理.

其实，这是由于意志的脆弱而浪费了一个成功的思路.请看：

方程①有等根

$\Rightarrow$判别式②$\Delta=0$

$\Rightarrow$方程$[x-(a-b)][x-(b-c)]=0$有等根

$\Rightarrow a-b=b-c$.

按定义，a,b,c 成等差数列.

再说，用②式计算也并非"不怎么简单".

由
$$\begin{aligned}0&=[-(a-b)-(b-c)]^2-4(b-c)(a-b)\\&=[(a-b)-(b-c)]^2,\end{aligned}$$

得
$$a-b=b-c.$$

这正是等差数列的定义(请与例 1－1 沟通).

例 1－14　已知 $0<a,b,c,d<1$，求证

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)>1-a-b-c-d.$$

讲解　有的书刊说："所证式即

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd-abc-abd-acd-bcd+abcd>0,$$

这显然是麻烦的."然后指出用数学归纳法.

这里的"麻烦"并不"显然"，因为用式中的 7 个正项与抵消 4 个负项十分容易：在已知条件下，有 $1-b>0,1-c>0,1-d>0$，从而

$$\begin{aligned}&ab(1-c)+ad(1-b)+ac(1-d)+bc(1-d)\\&+bd+cd+abcd>0.\end{aligned}$$

---

① 参考文献[27]波利亚.怎样解题，P.92，P.93.

可见,“显然是麻烦的”等于在胜利面前宣布失败.特别要指出的是,上述处理中没有用到 $a<1$ 的条件.本例在例 4－10 中还要继续研究.

例 1－15 $\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{2}$ 的值是______.

[1991 年数学高考理科题]

讲解 这是一道有课本背景的简单题,初中时以平面几何的形式出现过,高一时以三角形式出现过,高二时以复数形式出现过,现在以反三角函数的形式出现,其答案为 $\frac{\pi}{4}$.但我们在阅卷中发现有相当一部分考生得出 1,原因可能是只算一半

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{2}\right)=1,$$

就再没有算下去了.这种丢三落四现象并不完全是知识基础问题,我们并不认为考生连 $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$ 都不懂,恐怕主要是由于紧张、粗心而产生心理上的“顾此失彼”或记忆上的“瞬时遗忘”.

例 1－16 已知 $(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$,那么 $a_1+a_2+\cdots+a_7=$______.

[1989 年理科高考题]

讲解 我们在阅卷中发现,相当一部分考生的答案为 -1.其实

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_7=-1,$$

而所求的值,应再减去 $a_0=1$,从而

$$a_1+a_2+\cdots+a_7=-2.$$

究其原因,我们认为是考生一见题型很熟悉(如 1985 年高考题中见过,例 6－11),没有认真看清小变化,就匆匆作答.结果“会而不对”.

最后这两个例子还说明,即使有了正确的解题思路也会由于心理素质而导致解题失败.

解题基本功不过硬会导致解题错误,参见§7－3及相应的习题.

习 题 一

1. 谈谈你对数学题的理解.

2. 试述解题理论的研究对象、研究方法和中心课题.

3. 谈谈你解题经历中最难忘的例子,尤其是当中的情感体验.

4. 谈谈你对解题基本功的认识,举一个你印象最深的例子来说明基本功对解题的作用.

5. 计算

$$\begin{aligned}D=&\sin(\alpha_1+\alpha_1)\sin(\alpha_2+\alpha_2)\sin(\alpha_3+\alpha_3)+\\&\sin(\alpha_2+\alpha_1)\sin(\alpha_3+\alpha_2)\sin(\alpha_1+\alpha_3)+\\&\sin(\alpha_3+\alpha_1)\sin(\alpha_2+\alpha_3)\sin(\alpha_1+\alpha_2)-\\&\sin(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_2+\alpha_1)\sin(\alpha_3+\alpha_3)-\\&\sin(\alpha_2+\alpha_3)\sin(\alpha_3+\alpha_2)\sin(\alpha_1+\alpha_1)-\\&\sin(\alpha_3+\alpha_1)\sin(\alpha_2+\alpha_2)\sin(\alpha_1+\alpha_3).\end{aligned}$$

(提示:用行列式的乘法)

6. 设 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上的任一点,求证

$$a\cdot PA^2+b\cdot PB^2+c\cdot PC^2\geqslant abc.$$

(提示:仿例 1-9,例 1-10)

7. 解方程求实数解

$$x^2+2x\sin(xy)+1=0.$$

(提示:仿例 1-3)

8. 用幂级数知识解下列各题

(1) 若正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i}\geqslant\frac{n}{n-1}.$$

$\left(\text{提示: }\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{1-x_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_i^k\right)$

(2) 对 $a>0,a\neq1,0<x<1$,比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$

的大小.

$\left(\text{提示: } \ln(1-x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}, \ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\right)$

9. 采用求导数的方法证明：若锐角 α,β 满足

$$\frac{\sin^{n+2}\alpha}{\sin^n\beta}+\frac{\cos^{n+2}\alpha}{\cos^n\beta}=1(n\in\mathrm{N}_+),$$

则 $\alpha=\beta$.

(提示：移项对 α 求导)

10. 设 a,b,c 都是实数，求证

$$(b-c)^2\geqslant(a-2b)(2c-a).$$

(提示：作方程 $[x-(a-2b)][x-(2c-a)]=0$)

11. 试分析下列证明中的错误.

题目 过一点和一条直线垂直的所有直线都在一个平面内.

证明 设过点 P 的直线 $PA_1,PA_2,\cdots,PA_n$ 与直线 l 都垂直，则 $l\perp$ 面 PA_1A_2.

假设存在直线 $PA_k(k>2)$ 不在平面 PA_1A_2 上，则由 $PA_1\perp l$，$PA_k\perp l$ 可得

$$l\perp\text{面 } PA_1A_k.$$

于是，过 P 点可作两个平面与 l 垂直，这和过一点只能有一个平面与已知直线垂直相矛盾. 得证 $PA_1,PA_2,\cdots,PA_n$ 在同一平面上.

(提示：过点 P 的直线不是可列集)

12. 如图 1-6，$A_1B_1C_1D_1$ 是长方体的一个斜截面，其中 $AB=4\text{cm}$，$BC=3\text{cm}$，$AA_1=5\text{cm}$，$BB_1=8\text{cm}$，$CC_1=12\text{cm}$，求该几何体的体积.

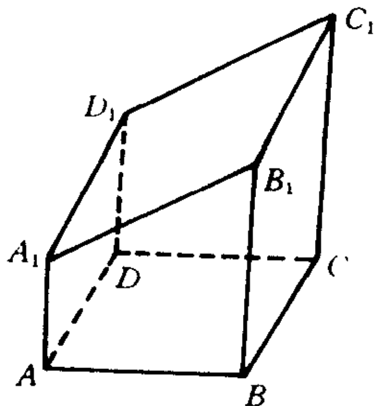


图 1-6

13. 有 $n(n\geqslant 6)$ 个人聚会,已知:

(1) 每人至少同其中 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 个人互相认识;

(2) 对于其中任意 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 个人,或者其中有 2 人相识,或者余下的人中有 2 人相识.

证明 这 n 个人中必有 3 人两两相识.
[1996 年高中数学联赛题]

14. 若点 C 在线段 AB 内,点 P 在直线 AB 外,且 $\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}$,求证: $CP\leqslant\frac{n}{m+n}AP+\frac{m}{m+n}BP$.

(提示:模仿例 1-9)

15. 用定积分方法求函数方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

的可积解,并与例 6-13 对比.

第二章　解题观点(一)

观点指观察事物所处的位置或采取的态度.解题教学中的解题观点,是指对“怎样解题”、“为什么这样解题”的整体认识和基本态度.它既是数学思想在解题实践中的应用,又是教学思想在解题教学中的体现.

本章首先研究波利亚《怎样解题》的解题观点,然后介绍唐以荣《中学数学综合题解题规律讲义》的解题观点、弗里德曼《怎样学会解数学题》的解题观点.到第四章继续研究更多的解题观点——系统论的观点、坐标系的观点.

2-1　《怎样解题》的解题观

《怎样解题》是乔治·波利亚(George Polya 1887～1985)写的一本风靡世界的名著.现代数学家瓦尔登早在1952年2月2日瑞士苏黎世大学的会议致词中就曾说过:“每个大学生,每个学者,每个教师都应该读这本引人入胜的书.”①

作为数学家,波利亚在众多的数学分支,如函数论、变分学、概率论、数论、组合数学以及计算和应用数学等领域多有建树,留下了许多以他的名字命名的术语和定理.1963年,美国数学会曾授予他最高职业奖.

① 见参考文献[27]波利亚.怎样解题,译者序.

在数学教育方面，他曾以数十年的时间悉心研究数学启发法①和数学教学，从而为数学方法的现代研究奠定了必要的理论基础. 作为一个数学教育家，他的教育思想的宗旨是“教会年轻人去思考”，培养学生的“独立性、能动性和创新精神”，根据社会需要把学生培养成合格的人才. 他认为一个人在学校所受的教育应该受益终生. 他赞成，良好的教育应该“系统地给学生自己发现事物的机会”，“应该帮助学生自己再发现所教的内容”，应该能使学生主动学习. 他特别重视发展学生的数学思维能力，强调数学教学要加强思维训练、要发展学生运用所学知识的能力，发展技能、技巧、有益的思考方式和科学的思维习惯. 他反复指出，数学教育的目的不仅仅是传授知识，还要“发展学生本身的内蕴能力”. 波利亚对教师的教和学生的学进行了综合研究，提出了著名的“学习三原则”(也可作为“教学三原则”)②和“教师十要”③.

波利亚对数学解题学的影响是通过他关于“怎样解题”的理论来实现的. 主要著作有《怎样解题》(1945 年)、《数学与似真推理》(1954年)和《数学的发现》(1962 年). 早在青年时代，由于不满足于教师那种照本宣科式的讲述和教科书上那种突如其来的、“像是帽子里跑出一只兔子”式的证明，从而开始探索数学中的发明创造问题. 面对一个数学定理和巧妙的证明，他问自己：数学家是怎样发现这个定理的？是什么促使数学家想到了这个证法？在执教之后，他竭力帮助学生弄清定理和证明的来龙去脉. 为此，他阅读了大量数学和哲学文献，并利用在各级学校任教的机会，对学生进行细致观察，终于制订

---

① 亦有翻译为探索法的，是指关于“发现和发明的方法和规律”的研究. 其关键是对思维的规则进行明确的描述，从而实现对合理方法天才的、不自觉的应用向有意识的自觉应用转化.

② 见参考文献[28]波利亚. 数学的发现，第二卷，P.155，即主动学习、最佳动机、阶段序进.

③ 见参考文献[28]波利亚. 数学的发现，第二卷，P.173.

出了"现代启发法"纲领和解题艺术的大成——"怎样解题"表.到1945年发展成为名著《怎样解题》(How To Solve it)一书.这本书的问世,标志着作者关于解题论和数学发现学说的形成.此后,波利亚继续撰写论文和专著,使自己的学说更加系统完整、丰富多彩、博大精深.随着时间的推移,今天已经看得很清楚,20世纪40年代波利亚学说的出现是世界数学史和数学教育史上一个意义重大的事件.在数学解题方面,波利亚是一面旗帜,是一代宗师.

2-1-1 "怎样解题"表

弄清问题

第一,你必须弄清问题.

未知数是什么?已知数据是什么?条件是什么?满足条件是否可能?要确定未知数,条件是否充分?或者它是否不充分?或者是多余的?或者是矛盾的?

画张图,引入适当的符号.把条件的各个部分分开,你能否把它们写下来?

拟定计划

你以前见过它吗?你是否见过相同的问题而形式稍有不同?

你是否知道与此有关的问题?你是否知道一个可能用得上的定理?

看着未知数,试想出一个具有相同未知数或相似未知数的熟悉的问题.

这里有一个与你现在的问题有关,且早已解决的问题.

你能不能利用它?你能利用它的结果吗?你能利用它的方法吗?为了能利用它,你是否应该引入某些辅助元素?

第二，找出已知数与未知数之间的联系.

如果找不出直接的联系，你可能不得不考虑辅助问题.

你应该最终得出一个求解的计划.

你能不能重新叙述这个问题？你能不能用不同的方法重新叙述它？

回到定义去.

如果你不能解决所提出的问题，可先解决一个与此有关的问题.你能不能想出一个更容易着手的有关问题？一个更普遍的问题？一个更特殊的问题？一个类比的问题？你能否解决这个问题的一部分？仅仅保持条件的一部分而舍去其余部分，这样对于未知数能确定到什么程度？它会怎样变化？你能不能从已知数据导出某些有用的东西？你能不能想出适于确定未知数的其他数据？如果需要的话，你能不能改变未知数或数据，或者二者都改变，以使新未知数和新数据彼此更接近？

你是否利用了所有的已知数据？你是否利用了整个条件？你是否考虑了包含在问题中的所有必要的概念？

实现计划

第三，实行你的计划.

实现你的求解计划，检验每一步骤.

你能否清楚地看出这一步骤是正确的？你能否证明这一步骤是正确的？

回　顾

第四，验算所得到的解.

你能否检验这个论证？你能否用别的方法导出这个结果？你能不能一下子看出它来？

你能不能把这结果或方法用于其他的问题？

《怎样解题》一书就是围绕着上述“波利亚”表进行的.作为初步

说明,波利亚说:“只要应用得当,如果你向自己提出表中的这些问题与建议,它们可以帮助你解决你的问题;而如果你向你的学生提出同样的问题与建议,你就可以帮助解决他们的问题.”① 因而,当教师向学生提出表中的问题或建议时,有可能达到两个密切相关的目的:“第一,帮助学生解决手头的问题;第二,培养学生将来能够独立解题的能力.”②

波利亚本人认为,此表有两个特点:普遍性与常识性③.

“普遍性 表中所提问题与建议的重要特点之一是普遍性,例如:未知数是什么?已知数是什么?条件是什么?这些问题都是普遍适用的,对于所有各类问题,我们提出这些问题都会取得良好效果.它们的用途不限于任何题目.我们的问题可以是代数的或几何的,数学的或非数学的,理论的或实际的,一个严肃的问题或仅仅是个谜语.这没什么差别,上述问题都是有意义的,而且有助于我们解题.”

“常识性 表中的建议是自然的、简单的、显而易见的并且来自于普遍常识.例如这条建议:看着未知数!试想出一个具有相同未知数或类似未知数的熟悉的问题,这条建议不管怎样总是劝告你去做你想做的事,而对于你认真要解决的问题并未提出具体的劝告.你是不是肚子饿了?如果你希望搞点吃的,你就会想起你所熟悉的搞到食物的一些办法.你是不是有一个几何作图题?如果你想作一个三角形,你也会想起你所熟悉的一些作三角形的办法.你是否有一个任意的问题?你若希望找出某个未知数,你就会想起找出这样一个未知数或你所熟悉的类似未知数的一些办法.如果你这样做了,那你的路子也是对头的;这个建议是个好建议,它向你提出一个常能成功的程序.”

例 2-1 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正数,满足

$$a_1a_2\cdots a_n=1, \qquad ①$$

①②③ 见参考文献[27]波利亚.怎样解题,引言,P.4,P.2,P.3

求证　$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geqslant 3^n$.　②

[1989 年全国高中数学联赛题]

讲解　我们来实践一下波利亚的解题表.

第一,你必须弄清问题

1. 这是一个什么问题?①

这是一个代数问题,一个条件不等式证明题.

2. 已知条件是什么?

共有两个:

(1) $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正数;

(2) $a_1a_2\cdots a_n=1$.

3. 求证是什么?

是一个不等式

$$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geqslant 3^n.$$

其左边是 n 个因式的积,每一个因式有相同的结构 $(2+a_i)$;而右边是一个与 a_i 无关的常数 3^n,其中“3”是一个特征数.

第二,拟定计划

4. 你以前见过它吗? 你是否见过相同的问题而形式稍有不同?②

以前没有见过.我们或者取 $n=2,3$ 作试探,或者回想起原高中统编教材《代数》(甲种本)第二册P.14第 24 题见过一道条件相同,而结论不同的不等式证明题③:

---

① 波利亚说:“回答一个你尚未弄清的问题是愚蠢的.”又说:“最糟糕的情况是:学生并没有理解问题就进行演算或作图.一般说来,在尚未看到主要联系或者尚未作出某种计划的情况下,去处理细节是毫无用处的.”见《怎样解题》P.6.

② 解题所作的脑力工作就在于回忆他的经验用得上的东西,并且和他的解题思维联系起来.

③ 后来的课本已将这道习题删去,但 1989 年的参赛选手全都做过.

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant 2^n. \quad ③$$

5. 你能不能利用它?

记得作业题的证明是,由

$$1+a_i\geqslant 2\sqrt{a_i},$$

得 $$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\geqslant 2^n\sqrt{a_1a_2\cdots a_n}=2^n.$$

若如法泡制①,可由

$$2+a_i\geqslant 2\sqrt{2}\sqrt{a_i}, \quad ④$$

得 $$\prod_{i=1}^{n}(2+a_i)\geqslant(2\sqrt{2})^n\sqrt{a_1a_2\cdots a_n}=(2\sqrt{2})^n>3^n.$$

6. 实现你的求解计划,检验每一步骤.你能否清楚看出这一步是正确的,你能否证明这一步骤是正确的?

其实,由 $8<9$ 知 $2\sqrt{2}<3$,从而

$$(2\sqrt{2})^n<3^n.$$

可见,形式套用有关作业题不能成功,缩小过头了.

7. 尚未成功不等于彻底失败,你能找出没有成功的原因吗?(第五公设试证没有成功,却诞生了更加伟大的非欧几何)

首先,我们看到用二维平均不等式

$$2+a_i\geqslant 2\sqrt{2}\sqrt{a_i},$$

没有出现求证不等式所需要的特征数"3".

其次,由 $2\sqrt{2}<3$ 使我们进一步想到 $(2\sqrt{2})^n$ 不是 $(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)$ 的最小值,它是一个比 3^n 更小的下界,这也就说明,用④式时缩小得过头了.事实上,式④不能取等号,否则

$$a_i=2(i=1,2,\cdots,n),$$

有 $$a_1a_2\cdots a_n=2^n\neq 1,$$

与已知矛盾.

这就从反面告诉我们,要考虑当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时,求证式能

---

① 在阅卷中确有相当一部分考生是这样"证"的.

取等号的条件,因而,基本不等式的应用,应使 $a_i=1$ 时取等号.

8. 重新回到课本习题,再考虑你能利用它吗?你能利用它的方法吗?如果你不能直接利用它,那么你能不能作适当的变通?

为了出现特征常数"3",为了使等号成立时 $a_i=1$,思维受到了挑战,拆项的念头迟早会产生

$$2+a_i=1+1+a_i\geqslant 3\sqrt[3]{a_i},$$

从而
$$\prod_{i=1}^{n}(2+a_i)\geqslant 3^n\sqrt[3]{a_1a_2\cdots a_n}=3^n.$$

第三,实现计划(略)

第四,回顾

9. 你能否用别的方法导出这些结论?

可以.因为这里是一个与自然数有关的命题,所以我们会想到用数学归纳法①(此外,还有其他办法,如柯西不等式、磨光变换等).

(1) 当 $n=1$ 时,命题显然成立(取等号).

(2) 假设 $n=k$ 时,命题成立.即 $a_i>0$,且当

$$a_1a_2\cdots a_k=1 \quad ⑤$$

时,有
$$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_k)\geqslant 3^k. \quad ⑥$$

则当 $n=k+1$ 时,有

$$a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}=1, \quad ⑦$$

与⑤联立,得 $a_{k+1}=1$.

从而
$$\begin{aligned}&(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_k)(2+a_{k+1})\\=&(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_k)(2+1)\\\geqslant&3^k\cdot 3 \quad (\text{由⑥式})\\=&3^{k+1}.\end{aligned}$$

这表明 $n=k+1$ 时命题成立.

由数学归纳法知,命题对一切自然数成立.

10. 你能否检验这个论证?

---

① 下面的证法,取自阅卷现场.

回顾第二步中⑤式与⑦式联立的推理,会发现违反了同一律(偷换概念),即第 k 号命题中的 a_i 与第 $k+1$ 号命题中的 a_i 虽然使用了同一个字母,但一般地字母所代替的数值是不相同的.如果保持⑤式,那么⑦式实际上是

$$a'_1a'_2\cdots a'_ka'_{k+1}=1. \qquad ⑧$$

所以,不能由⑤与⑧联立得出 $a'_{k+1}=1$.

11. 此题到底能不能用数学归纳法?

回答是肯定的,对第二步作调整如下,其基本想法是把⑦中某两个 a_i 的积看成⑤式中的某一个 a_i.

当 $n=k+1$ 时,由

$$a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}=1$$

知,其中必有 $a_i\leqslant 1$ 且 $a_j\geqslant 1(1\leqslant i\neq j\leqslant k+1)$,不妨设

$$a_1\leqslant 1,\ a_2\geqslant 1,$$

有
$$(1-a_1)(1-a_2)\leqslant 0,$$

得
$$1+a_1a_2\leqslant a_1+a_2.$$

从而
$$\begin{aligned}&(2+a_1)(2+a_2)\\=&4+2(a_1+a_2)+a_1a_2\\\geqslant&4+2(1+a_1a_2)+a_1a_2\\=&3(2+a_1a_2).\end{aligned}$$

得
$$(2+a_1)(2+a_2)(2+a_3)+\cdots+(2+a_k)(2+a_{k+1})$$
$$\geqslant 3(2+a_1a_2)(2+a_3)\cdots(2+a_k)(2+a_{k+1}).$$

由于 $(a_1a_2),a_3,\cdots,a_k,a_{k+1}$ 满足归纳假设,有

$$(2+a_1a_2)(2+a_3)\cdots(2+a_k)(2+a_{k+1})\geqslant 3^k,$$

从而
$$(2+a_1)(2+a_2)(2+a_3)\cdots(2+a_k)(2+a_{k+1})$$
$$\geqslant 3\cdot 3^k=3^{k+1}.$$

由数学归纳法知,原不等式成立.

12. 抓住数学归纳法中的关键步骤 $1+a_1a_2\leqslant a_1+a_2$,可以改写成"磨光变换"的形式.

(1) 当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ 时,显然

$$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)=3^n.$$

命题成立.

(2) 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全为1,则必有一个大于1,也必有另一个小于1,不妨设

$$a_1>1,\ a_2<1.$$

记　$a'_1=1,a'_2=a_1a_2,a'_3=a_3,\cdots,a'_n=a_n$.

则由　$(1-a_1)(1-a_2)<0$,

得　$1+a_1a_2<a_1+a_2$,

从而

$$\begin{aligned}&(2+a_1)(2+a_2)\\&=4+2(a_1+a_2)+a_1a_2\\&>4+2(1+a_1a_2)+a_1a_2\\&=3(2+a_1a_2)\\&=(2+a'_1)(2+a'_2),\end{aligned}$$

有　$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geqslant(2+a'_1)(2+a'_2)\cdots(2+a'_n)$.

这时,$a'_1,a'_2,\cdots,a'_n$ 至少比 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 多一个1.

(3) 若 $a'_1,a'_2,\cdots,a'_n$ 不全为1,则重复上述步骤,得 $a''_1,a''_2,\cdots,a''_n$ 至少比 $a'_1,a'_2,\cdots,a'_n$ 多一个1,且

$$(2+a'_1)(2+a'_2)\cdots(2+a'_n)\geqslant(2+a''_1)(2+a''_2)\cdots(2+a''_n).$$

(4) 重复上述步骤,最多进行 $n-1$ 次,即可把 $a_1,a_2,\cdots,a_n$(凹凸不平)变为(磨光)n 个1,且

$$\begin{aligned}&(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\\&\geqslant(2+a'_1)(2+a'_2)\cdots(2+a'_n)\\&\geqslant\cdots\\&\geqslant(2+1)(2+1)\cdots(2+1)\\&=3^n.\end{aligned}$$ [①]

这样,我们便有了两个完全不同的解题方法,一个是着眼于“2”,拆2为(1+1),而 a_i 是任意的;另一个是着眼于 a_i,对 a_i 磨光,而

① 上述4步正是磨光变换的标准步骤.

“2”可换为任意实数.这两种方法的倾向和价值是不一样的,前者利用了“2”为自然数的特殊性,过程简单;后者更有一般性,但对本例显得麻烦.

13. 你能不能把这个结果或方法用于其他的问题?

两种方法都可以把“2”推广为 $m\in \mathrm{N}_+$,由

$$m+a_i=\underbrace{1+\cdots+1}_{m个}+a_i\geqslant(m+1)\sqrt[m+1]{a_i},$$

有
$$\prod_{i=1}^{n}(m+a_i)\geqslant(m+1)^n. \tag{9}$$

但是,这种推广是平凡的,按照这种拆 m 为 $m=1+\cdots+1$ 的模式,不能解决 m 为正实数的情况①,更不能解决此题的一般形式:

推广题 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n;b_1,b_2,\cdots,b_n$ 均为正数,求证

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}.$$

简证 由
$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}}{\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)}}\\&=\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1+b_1}\cdot\frac{a_2}{a_2+b_2}\cdots\frac{a_n}{a_n+b_n}}+\\&\quad\sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1+b_1}\cdot\frac{b_2}{a_2+b_2}\cdots\frac{b_n}{a_n+b_n}}\\&\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_1+b_1}+\frac{a_2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n}{a_n+b_n}\right)+\\&\quad\frac{1}{n}\left(\frac{b_1}{a_1+b_1}+\frac{b_n}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n+b_n}\right)\\&=1.\end{aligned}$$

变形即得,等号成立当且仅当$\begin{cases}a_1=a_2=\cdots=a_n,\\b_1=b_2=\cdots=b_n.\end{cases}$

---

① 数学通报,1990,10,数学问题678:若 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,$m\in\mathrm{R}^+$ 且 $\prod_{i=1}^{n}a_i=1$,试证 $\prod_{i=1}^{n}(m+a_i)\geqslant(m+1)^n$.

反过来,当然可以用这个方法去证原例题.

14. 在你找到第一个蘑菇(或作出第一个发现)后,要环顾四周,因为它们总是成堆生长的[①].

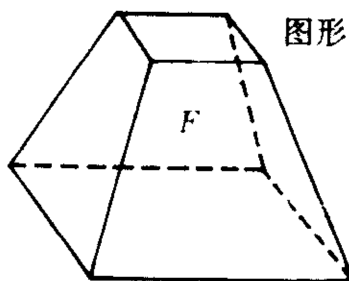
用推广题的方法,可以解决更多的问题,参见例 4-39.

例 2-2　给定正四棱台的高 h,上底的一条边长 a 和下底的一条边长 b,求正四棱台的体积 F[②](学过了棱柱、棱锥的体积).

讲解　第一,弄清问题

问题 1　你要求的是什么?

要求的是几何体的体积,在思维中的位置用一个单点 F 象征性地表示出来(图 2-1).



图示
F

图 2-1

问题 2　你有些什么?

我们在图形上增加 3 个已知量 a,b,h. 相应地,在图示处添上 3 个新点 a,b,h. 它们与 F 之间有一条鸿沟,这象征着尚未解决问题. 我们的目标就是将未知量 F 与已知量 a,b 和 h 联系起来(图 2-2).

第二,拟定计划

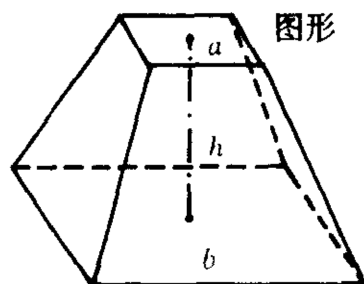
问题 3　怎样才能求得 F?

由于我们知道棱柱、棱锥的体积公式,而棱台的几何结构告诉我们,棱台可以看成用一个平行于底面的平面从一个大棱锥中截去一

---

① 参考文献[27]波利亚. 怎样解题,P.226,谚语的智慧,有的译为格言的学问.

② 转引自参考文献[28]波利亚. 数学的发现,第二卷,第七章.



图示 F

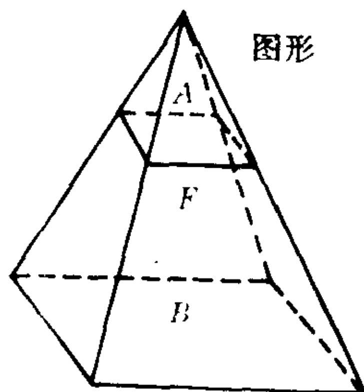


图 2-2

个小棱锥所生成.如果我们知道了这两个棱锥的体积 B 和 A,我们就能求出棱台的体积

$$F=B-A.$$

我们在图上引进两个新的点 A 和 B,用斜线把它们与 F 联结起来,以此表示这三个量之间的关系(图 2-3).



图示

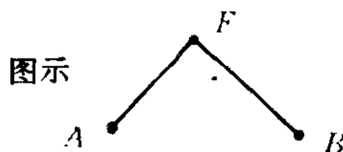




图 2-3

问题4　怎样才能求得 A 与 B?

依据棱锥的体积公式,只需求出两个棱锥的高.特殊地,一旦求出小棱锥的高 x,大棱锥的高显然为$(x+h)$.

我们在图示上引进一个新的点 x,用斜线把 A 和 x,A 和 a 联结起来,表示由 x 和 a 能得出 A;类似地,用斜线分别联结 B 和 b,B 和 h,B 和 x,表示 B 能由 b,h 和 x 得出(图 2-4).

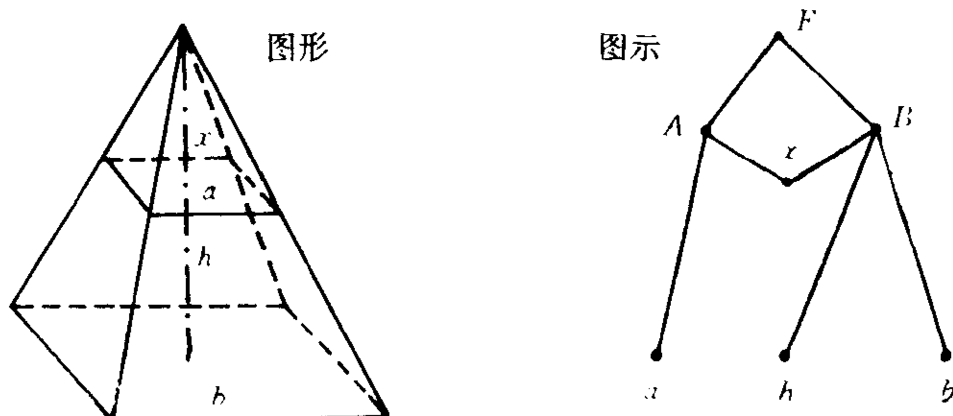


图 2-4

问题5　怎样才能求得 x?

为使未知数 x 与已知数 a,b,h 联系起来,我们进行"平面化"的思考,用一个通过高以及底面一边上的中点的平面去截这两个棱锥,有$\triangle VPO_1 \backsim \triangle VQO_2$,从而(见图 2-5)

$$\frac{x}{x+h}=\frac{a}{b}.$$

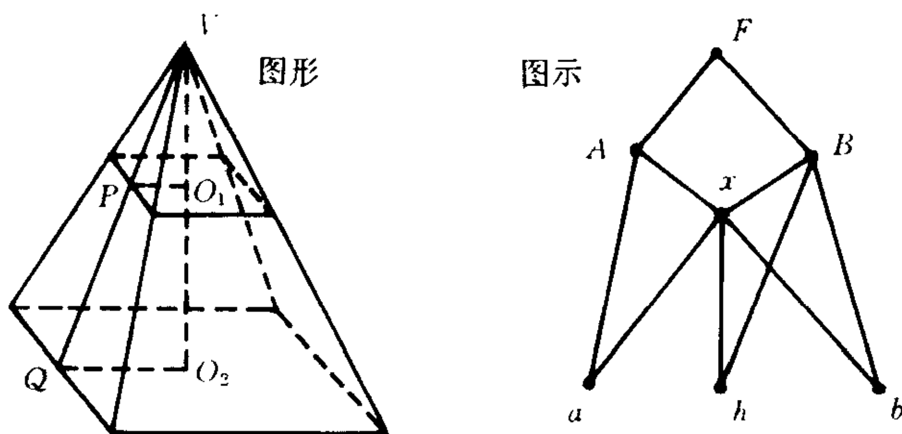


图 2-5

这样,我们就可由已知的 a,b 和 h 去求得 x. 在图示中,便可用斜线把 x 和 a, x 和 h, x 和 b 联结起来,至此,我们就在 F 和已知数 a,b,h 之间建立起了一个不中断的联络网.

第三,实现计划

1. 由 a,b,h 表示 x:

$$\frac{x}{x+h}=\frac{a}{b}\Rightarrow x=\frac{ah}{b-a}.$$

2. 由 a,x 表示 A,由 b,x,h 表示 B:

$$A=\frac{a^3h}{3(b-a)},\qquad B=\frac{b^3h}{3(b-a)}.$$

3. 由 A,B 求 F:

$$\begin{aligned}F&=B-A\\&=\frac{(b^3-a^3)h}{3(b-a)}\\&=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2).\end{aligned}$$

第四,回顾

1. 在方法上,这是“分析法”的一次成功应用.从结论出发往前找充分条件,为了求 F,我们需要求 A,B;为了求 A,B,我们需要求 x;最后 x 可求,问题的思路就畅通了.书写恰好次序相反.这个例子显示了分析与综合的关系,“分析自然先行,综合后继;分析是创造,综合是执行;分析是制定一个计划,综合是执行这个计划”①.

2. 数学思想上,这是“组合与分解”的一次成功应用.首先把棱台补充(组合)为棱锥,然后再把棱锥截成(分解)棱台,这种想法在求棱锥体积时已经用过,它又一次向我们展示,“能割善补”是解决立体几何问题的一个诀窍.

3. 在公式的一般性上,当 $a=0$ 时,得出棱锥的体积;当 $a=b$ 时,得出棱柱的体积.这也是“特殊化”的检验②.

2-1-2 波利亚解题思想初探

对于波利亚的解题表及有关著作,人们从不同的角度阐发了波

①② 见参考文献[27]波利亚.怎样解题,P.145,P.60.

利亚解题思想的本质、真谛、核心等.我们归结为4个要点：程序化的解题系统，启发式的过程分析，开放型的念头诱发，探索性的问题转换.

1. 程序化的解题系统

怎样解题表，就"怎样解题"、"教师应教学生做些什么"等问题，设计了一个4步骤的程序——弄清问题、拟定计划、实现计划、回顾，从而描绘出解题理论的一个总体轮廓，也组成了一个完善的解题教学系统.这个系统集解题思想、解题过程、解题思路、解题方法等于一身，融理论与实践于一体，即使在具体而细节的问题上，这个程序也有利于纠正学生中一些普遍性的毛病，如急于计算出结果而不认真分析题意，盲目推理而不注意拟定计划，束手无策而不善于加工信息，以及忽视研究问题的细节与发展等.另外，这种程序把最后一步，即全面地、有分析地领会所得解法，作为解题工作的必要环节而固定下来，也是一个非常有远见的做法，反映了作者长期数学研究的宝贵经验.

波利亚把教会学生解题看做是教会学生思考，培养他们独立探索能力的一条主要而有效的途径.在《数学的发现》一书中，他设计了一个学会解题的程序：从模仿到模式，再向着一般方法，其精神实质与解题表是一脉相承的.这两本书都论述"怎样解题"，都给出了程序，但波利亚本人并没有试图绘出解题的一套琐碎而呆板的模式，而是制定了一个"探索法小词典"，读者可以通过阅读词典来开阔思路、指导实践，自己学会怎样解题.这两本书"只不过指出了一般的方向，而留给学生去做的还很多"①.

2. 启发式的过程分析

波利亚本人在《怎样解题》一书的序言中说过："作者还记得自己的学生时代，那时他是一个有雄心的学生，渴望去弄懂数学和物理.他听课、读书，尝试去了解所提出的种种解答与事实，但有一个问题

① 见参考文献[27]波利亚.怎样解题，P.4.

却一再使他感到困扰,这就是:'是的,这个解答好像还行,它看起来是正确的,但怎样才能想出这样的解答呢? 是的,这个实验好像还行,它看起来是个事实,但别人是怎样发现这样的事实的? 而且我自己怎样才能想出或发现它们呢?'今天作者正在大学里讲授数学,他认为或者期望他的某些热衷的学生会提出类似的问题,并且他试图去满足他们的好奇心,不仅试图去弄清楚这个或那个问题的解答,而且要了解这个解答的出发点与方法,并把这些向其他人加以阐述,于是终于导致他写出本书."

这段自述清楚表明,波利亚是自觉地承担起"复兴"启发法的重任的,他所要进行的工作正是,剖析解题的思维过程,通过了解解题过程来研究"发现和发明的方法和规则".波利亚问"怎样才能想出这样的解答呢?""我自己怎样才能想出或发现它们呢?"既驱使人们去分析解题过程,又要求人们去总结发现的规律.

波利亚自己,则以数学大师的风采,流畅生动的文笔,把解题的数学思维过程剖析得淋漓尽致,一张"怎样解题"表,一个思维活动的"正方形"(见§3-2-3)①,一个慢镜头的"师生"对话录,既是对解题过程的深刻揭示,又是对解题规律的简练概括.

波利亚书中的例题,其实就是对典型例题进行解题过程的分析.

3. 开放型的念头诱发

"可能会有这样的情况:一个学生想出了一个异常好的念头,于是跳过所有的预备步骤,解答就脱口而出了.如此幸运的念头当然是求之不得的,但是也可能发生很不如愿和很不走运的事,即学生通过上述4阶段中的任何一个阶段都没有想出好念头"②.波利亚强调指出:"老师为学生所能做的最大的好事是通过比较自然的帮助,促使他自己想出一个好念头."③波利亚的解题表一口气使用了30多

① 参考文献[28]波利亚.数学的发现,第二卷,P.104.

② 见参考文献[27]波利亚.怎样解题,P.6.

③ 见参考文献[27]波利亚.怎样解题,P.9.

个问号,每一个都在向读者诱发解题的念头."我们表中的问题和建议并不直接提到念头;但实际上,所有的问题和建议都与它有关[1].了解问题是为好念头的出现作准备;制订计划是试图引发它;在引发之后,我们实现它;回顾此过程和求解的结果,我们是试图更好地利用它"[2].

这里说的念头,其实就是开展积极活跃的思维活动.产生念头与找出解题途径完全可以理解为同义语.那么产生念头的基础是什么呢?波利亚的回答是:"过去的经验和已有的知识","如果我们对该论题知识贫乏,是不容易产生好念头的.如果我们完全没有知识,则根本不可能产生好念头."[3]

那么,"念头有什么用"?波利亚说:"它会给你指出整个或部分解题途径,它或多或少地清楚地向你建议该怎么做.念头多多少少还是完整的.如果你有一个念头,你就够幸运的了."[4]波利亚一再告诫我们:"无论如何,你应当感谢所有的念头,感谢那些次要的念头,感谢那些模糊的念头,也感谢那些使模糊念头得以纠正的补充性念头.即使你暂时还没有发现什么有价值的新念头,但如果你对问题的概念更完全了,或者更连贯、更和谐或者更平衡了,那你也应当表示感谢."[5]"也许有些念头会把你引入歧途[6]",但这并不可怕,"在明显失败的尝试和一度犹豫不决之后"会"突然闪出一个'好念头'[7]",最糟糕的是没有任何念头,还"笨头呆脑地干等着某个念头的降临,而不会做任何事情去加速其来到".[8]

波利亚一再提到"好念头",其实这就是直觉、顿悟或灵感."想出一个好念头是一种'灵感运动'"[9]."想象力有了一个突然的跳跃,产生了一个好念头,这是天才的一次闪烁"[10]."什么是好念头?是我们观点上的重大突变,我们看问题方式的一个骤然变动,在解题步骤方

---

① 在《怎样解题》一书中,出现"念头"这个词不下四五十次.

②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩见参考资文献[27]波利亚.怎样解题,P.159,P.9,P.35,P.36,P.36,P.9,P.94.,P.58,P.59

面的一个刚刚露头的有信心的预感”.①

波利亚关于念头的种种议论,正是开展积极思维活动的激发与激活.

4. 探索性的问题转换

这里说的“问题转换”,在《怎样解题》书中也叫“变化问题”、“题目变更”,它揭示了探索解题思路的途径与实质.波利亚强调:“解题的成功要靠正确思路的选择,要靠从可以接近它的方向去攻击堡垒.为了找出哪个方面是正确的方面,哪一侧是好接近的一侧,我们从各个方面、各个侧面去试验,我们变化问题.”②“变化问题使我们引进了新的内容,从而产生了新的接触,产生了和我们问题有关的元素接触的新可能性”.③“新问题展现了接触我们以前知识的新可能性,它使我们作出有用接触的希望死而复苏.通过变化问题,显露它的某个新方面,新问题将重新使我们的兴趣油然而生”④.

在“怎样解题”表中,波利亚拟出了启引我们不断转换问题的一批问句与建议:把问题转化为一个等价的问题,把原问题化归为一个已解决的问题,去考虑一个可能相关的问题,先解决一个更特殊的、或更一般的问题……那些启发新念头的问句,也往往与问题转换有关.“如果我们不用‘题目变更’,几乎是不能有什么进展的”⑤——这就是波利亚的结论.

综上所述,“解题系统”是波利亚解题思想的整体轮廓,“分析解题过程”是波利亚解题思想的内在核心,“念头诱发”是波利亚解题思想的外在表现,“问题转换”是波利亚解题思想的具体实现.这张表体现了解题过程是积极思维活动的实质,也抓住了思维活动中最富于创造性的成分——提出问题,并且为不断提出问题、不断解决问题的积极思维活动提供了一个合理的框架(关于解题过程中思维活动的性质请参见§3-2-3).

①②③④⑤ 见参考文献[27]波利亚.怎样解题,P.158,P.209,P.209,P.210,P.157.

数学家的真实的思维过程,常常被最终的简洁成果掩盖着,我们虽然不知道,但是我们可以模拟、可以仿真,从而做出示范.下面一个直接取自波利亚原文的例子,将有助于我们熟悉一下研究的气氛.

例2-3　《数学的发现》(第二卷)P·84 §10·2的例子.

我要冒昧地向读者谈一个小小的经验.我将叙述一个简单但又不太平常的几何定理,并把一系列引导到它的证明的想法重新整理出来.我将缓慢地,非常缓慢地去作,逐个地,一个接一个地把线索揭示出来.我想在我讲完整个情节之前,读者就会抓住主要想法了(除非有什么特殊情形).但是这个主要想法比较出人意外,所以读者在这里可以体验到一个小小发现的喜悦.

题A　如果3个有相同半径的圆过一点,则通过它们的另外3个交点的圆具有相同的半径.[1927年匈牙利竞赛题]

这是我们要证的定理.它的叙述简短而明确,但是没有把细节充分清晰地表达出来.如果我们作一图(图2-6),并且引进适当的符号,便得到下列更明确的复述:

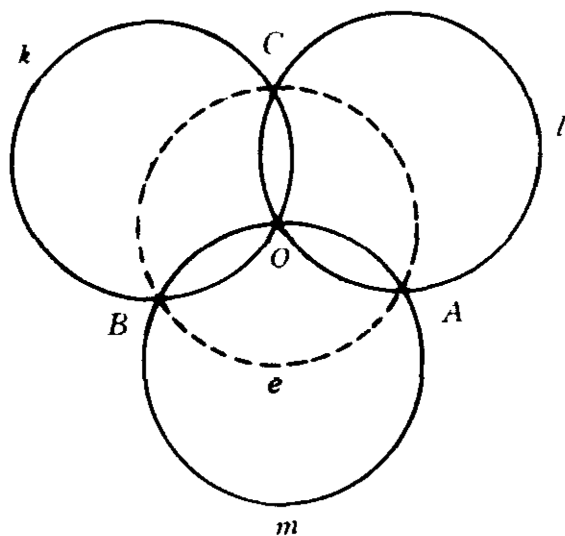


图2-6

题B　3个圆k,l,m具有相同的半径r,并通过同一点O.此外,l和m相交于点A,m和k相交于点B,k和l相交于点C.则通

过 A,B,C 的圆 e 的半径也是 r.

图 2－6 画出了 4 个圆 k,l,m 和 e 以及它们的 4 个交点 A,B,C 和 O. 这个图画得不甚圆满，它既不简练，也不完全；有些东西好像漏掉了；某些本质性的东西似乎没有画进去.

我们处理的是圆，圆是什么？圆由中心和半径确定，它所有的点到中心的距离都等于半径的长. 我们在图上看不到这个共同的半径 r，这样我们就没有把假设中的一个基本部分考虑进来. 因此让我们引进各圆的中心，k 的圆心 K，l 的圆心 L 和 m 的圆心 M. 我们应当在哪儿画出半径 r 呢？我们似乎没有理由把 3 个给定圆 k,l 和 m 中任一个及 3 个交点 A,B 和 C 中任一个放在优于其他圆及点的地位上，于是我们就把 3 个圆的中心分别与 3 个交点联结起来：K 联结 B,C 和 O，等等.

结果得到的是一张拥挤的图（图 2－7）. 这里面有这么多的线段和弧，使得我们很不便于去“观察”它，所以这张图“还是站不住脚”. 它有点像老式杂志上的某些画面，这种画有不止一种效果，如果你按通常的方式去看它，它是一个图像，可是如果你转到另一个位置再换一种特殊方式去看它，那么另一个图像就会突然闪现在你面前，并对第一个图像发表某些诙谐的评论[①]. 你能从我们这张塞满了直线段和圆的图中看出有第二种含意的图像吗？

……

我们也许会一下子看出隐藏在塞满了的画面里的真正图形，也可能是逐渐地把它认了出来. 我们可能是在努力解题的过程中，也可能是在一些次要的、非实质性的机会中达到了它. 比如当我们想去重画一下我们的不完满图形时，我们也许会注意到整个图形是由它的直线形部分确定的（图 2－8）.

---

① 这里有注意的转移或“认知框架”的转移，比如图 [图] 一会是平面的、一会是空间的，一会是凸出来的，一会是凹进去的.

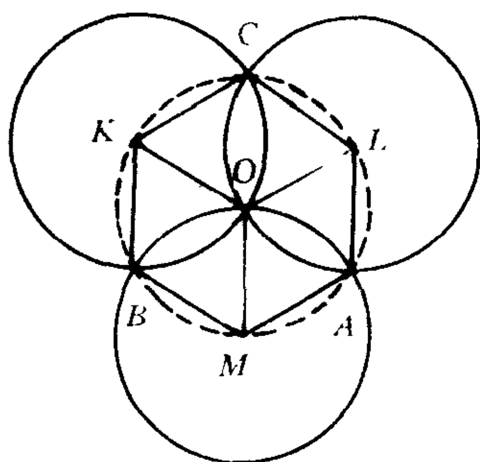


图 2-7

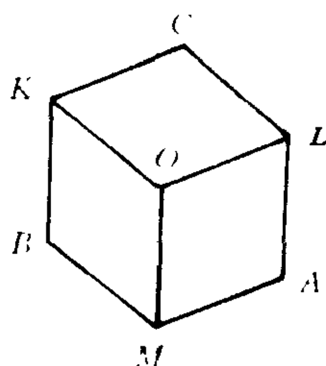


图 2-8

注意到这一点看来是重要的,因为它确实把几何图形简化了,而且还可能改进了它的逻辑状况.它使我们能把定理复述为下列形式.

题C　如果9条线段

$$KO,\quad KC,\quad KB,$$
$$LC,\quad LO,\quad LA,$$
$$MB,\quad MA,\quad MO,$$

都等于 r,则必存在一点 E,使得下列3条线段

$$EA,\quad EB,\quad EC$$

都等于 r.

定理的这种叙述法把我们的注意力引向图2-8.这个图形是有吸引力的,它使我们想起一些熟悉的东西.(想起什么?)

当然,在图2-8中,由假设,某些四边形如 $OLAM$ 的四条边相等,它们是菱形.菱形是我们熟悉的对象,认出它之后,我们就能更好地"观察"这个图形了.(整个图形使我们想起什么?)

菱形的对边是平行的.依据这一点,我们就能把图2-8中的9条线段分成3类,同一类中的线段譬如像 AL,MO 和 BK 是彼此平行的.(现在这个图形使我们想起什么?)

我们不应该把我们要去求的结论忘掉了.让我们假定这个结论是对的.在图中引进圆 e 的中心 E,和以 A,B,C 为端点的 3 条半径,我们就得到了(假设的)更多的菱形,更多的平行线段,见图2-9.(现在整个图形使我们想起什么?)

……

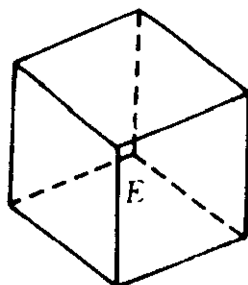


图 2-9

当然,图 2-9 是平行六面体 12 条棱的一个投影图形,它的特殊性在于所有的棱的投影长度都相等.

因此,图 2-8 是一个"不透明的"平行六面体的投影,我们只看到了它的 3 个面,7 个顶点和 9 条棱,还有 3 个面,1 个顶点和 3 条棱在这个图中看不出来,所以图 2-8 只是图2-9的一部分,但是这一部分就决定了整个图形.如果这个平行六面体和投影方向是选择得使得 9 条棱的投影如图 2-8 所示那样都等于 r(根据假设它们应该这样),那么剩下的 3 条棱的投影也一定等于 r.这 3 条长为 r 的线是从看不见的第 8 个顶点的投影出发的,而这个顶点的投影 E 就是通过点 A,B 和 C 半径为 r 的圆的中心.

这样,我们就证明了定理.这个证明意外地用了一个美术家的概念,把平面图形看做是立体的一个投影.

(这个证明用了立体几何的概念.我希望这样做没什么大错误,即使有错也容易纠正.现在我们可以很简单地把中心 E 的位置定下来,而且很容易不依赖任何立体几何的知识去检查 EA,EB 和 EC 的长度.不过这里我们不再这样做了!)①□

① 笔者在此给出一个向量解法,它不难改写为综合几何的方式.如图 2-6,有$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OK})-(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OL})=\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{LK}$.同理$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{ML}$,$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{KM}$.得$\triangle ABC\cong\triangle KLM$,两三角形的外接圆为等圆.

这个例子充分体现了波利亚解题的风格.下面,我们收集了对波利亚解题著作的各种看法,作为本节的结束.

1. 郑毓信教授在"评 Polya 的代表作《数学的发现》"一文中认为该书有3点不足[①]:

(1) 突出重点与面面俱到.

从总体上说,《数学的发现》一书的论述是重点突出的——突出了解题的理解、学习与教学;然而,在有些章节、特别是在关于思维活动的分析中,有时也给人以一种力求面面俱到的感觉.例如,书中包括了一些没有分析的描述(如第10章关于决定性思想的出现的描述),这样就在一定程度上冲淡了主题.如果删除这些部分的话,全书可能会显得更加精练.

(2) 解决问题与发现问题.

就数学发现而言,问题的发现与问题的解决具有同样的重要性(甚至更为重要);但是在《数学的发现》一书中,虽然也对问题的发现(特别是类比与归纳法的应用)作了一定的分析(第15章),但从整体上说,对此是重视不够的.另外,对于怎样由实际问题去抽象出相应的数学问题,作者也有所忽视.

(3) 自发与自觉.

由于作者对辩证思维只是一种自发、而不是自觉的运用,因此也就势必有它一定的局限之处:具体地说,在方法论(特别是思想方法)的分析中,有时就未能上升到应有的高度.

2. 斯托利亚尔在《数学教育学》(P.199)中认为:波利亚的书是对数学教育学的极重要的贡献,它应该是每个教或者想教学生解题方法的人都要专门研究的对象.但这本书也会让那些想在一般解法里寻找解任何题的钥匙的人失望.如果我们已完成了波利亚的一切建议,这也并不意味着我们已经会解任何题了.书中种种建议的作用只是它们能够促进形成在求解过程中推理的结构,使解题者正确地

---

① 见数学研究与评论,1983,1,P.213.

求解,提高寻找成功的可能性并减少求解作用的时间.

3. 过伯祥在《数学教育研究导引》(P.247)中说过:今天看来,我认为,波氏思想在国内中学数学教育界的影响既不广泛,也并不深刻.除了受各级考试制度的束缚等原因,波氏著作本身也不无一些关系.

波氏著作中一批典范例子的问题、证明与解的发现过程的分析,的确讲解得非常精彩.然而,有的例子,中学课程是不涉及的(如多面体的欧拉公式、等周问题等),我国的中学数学教师中的多数人,向来比较现实,就这样,"阳春白雪"、"和"的人自然就少了些了.

再则,读波氏著作中关于解题过程的理论的一般说明的大段文字(有的地方似可更精练一些的),最好需有个人长期独立解难题的体验为背景,才易于与书中的论述、语言发生共鸣.

4. 王梓坤院士在《高等数学解题过程的分析和研究》(钱昌本著)序中说:国际上,关于数学教育的名著也寥若晨星,影响较大的,也许数美籍匈牙利数学家、教育家波利亚(G·Polya)的三部姐妹作《数学与猜想》、《怎样解题》、《数学的发现》,它们影响很大,确是名作,不过他熟悉的是西方的教育,对中国的教育、中国人思维的特点,并不太了解.因此,我们更需要切合我国实际的相应著作.

5. 庞征球等在"波利亚数学教育思想简略述评"① 中认为:从波利亚的科学研究活动看,他的世界观充满了唯物论和辩证法.但由于他生活的历史年代和社会环境的影响,他的个别数学教育观点,难免有以偏概全之弊.如前所述,数学教育的目的,应当培养学生在知识、技能、能力和个性品质等几方面的协调发展.学生只有在丰富的知识的基础上,才能形成技能与能力,才能协调整个思维系统智力功能的发展以形成良好的认知结构……波利亚则过分渲染和强调技能与能力,而对基础知识的传授有所忽视,贯穿他的教育思想中这一基本观点是值得商榷的.

① 见数学教育学报,1993,3,P.34

6. 天津宝坻县教师进修学校高级教师杨世明(笔名杨之)认为,波利亚著作的核心思想是“动因说”,努力摸清促使人们发现解法,找到思路的动因①.

7. 舟山师专过伯祥老师对波利亚的数学发现图式提出“念头说”,认为有关念头的种种议论,蕴涵着波利亚数学发现思想的真谛②.

对波利亚的解题观,过伯祥老师还提出“变更题目”的观点,并且认为是否真正领悟波利亚的解题思想中的这一精髓,是检测我们是否理解波利亚的解题观的惟一试剂③.

8. 任樟辉在参考文献[26](P.103)中写道:美国数学教育家乔治·波利亚在著名的“怎样解题表”中已经提出了许多与知识组块思想关联的启发性问题.允许学生考虑诸如“与此有关的问题”、“相同的问题而形式稍有不同”、“熟悉的问题”、“更普遍的问题”、“更特殊的问题”、“类比的问题”、“问题的一部分”等.我国也有人作这方面的数学教育实验研究,证实了在解代数方程应用题时,学生先要从问题中看出某种熟悉的东西,然后以此为索引,唤起相应的解题方法,作出解答.而“此题像什么类型?”“这题像××类型吗?”等问题有助于不能解题的学生认出模式,正确解题④.还有人提出了“反应块与块状思维”及“平面三角反应块体系”⑤.

2.1.3 设计更多的解题表

我国著名学者徐利治教授曾经提出研究波利亚的两项重要任务,一是培养和造就一批波利亚型的数学工作者,二是按照波利亚的

---

① 杨之.信息与解题.福建中学数学,1987,4,P.14

② 过伯祥.波利亚的数学发现图式.国内外中学数学,1985,4,P.6

③ 过伯祥.波利亚的解题观.中等数学,1988,2.P.2.

④ 施铁如.解代数应用题的认识模式.心理学报,1985,3.

⑤ 见参考文献[23]、[24].

思想改革数学教材和教学方法.能够把这两项任务结合起来的一个措施是，对于不同的课程，对于教学的不同阶段，设计具体的解题表.

作为示例，下面介绍5张表，表1是针对数学某一专题的(应用题)，表2是针对教学某一阶段的(平面几何入门)，表3具有某种一般性，表4是面对大学数学的，表5是一般性的.

1. 列方程解应用题的解题表

"怎样解应用题"是从小学就开始的一个难点课题.初一的一次方程(组)，初二的二次方程(组)、初三的解三角形都有应用题，这一方面给教学带来了困难，另一方面又为发展学生思维提供了机会."正是由于有问题、有困难，才为积极的思维训练提供了优质的素材，才为发展学生的思维能力和提高学生的数学素质提供了良好的机会."①"勇敢地面对数学思想最为丰富、最为深刻的地方，进行深入的挖掘和充分的暴露，正是讲授艺术最迷人、最勾魂也最惊心动魄的'无限风光'."②事实证明，解应用题能力强的学生，上高中之后，找函数解析式和列曲线方程(解析几何)的能力也强.

给学生介绍一些基本的应用题类型和相应的解法，不是不可以，而是不能仅仅停留在这一低层次的水平上，根本出路在于提高学生分析问题的能力，更具体一点就是寻找等量关系的能力，更直观一点就是用两种方法计算同一件东西的思想与技术.为此，我们效仿波利亚的解题表，给初中生设计了一个表③：

表1 "怎样解应用题"表

(1) 已知是什么？求解是什么？

用字母($x,y,\cdots$)表示未知数，并把它(们)看作已知数参加运算，写出有关代数式.

---

①② 罗增儒.讲授艺术的认识与实践.见讲授艺术论(王国俊主编)，P.63，P.64.陕西师范大学出版社，1992年1月第1版.

③ 见山西中学数学1991年试刊第2期.

(2) 找出所有等量关系.

基本关系是什么?(决定题目性质的关系)

相等关系是什么?哪些是通过关键词语明显给出的?哪些是条件之间的关系隐蔽限定的?哪些是由数学公式、物理定律提供的?哪些是变动中的不变量或不变性质所暗示的?

列个表,画张图.

(3) 把题目中的已知数、未知数代入等量关系中去,整理出方程(组).

单位统一了吗?

(4) 解方程(组),写出解题过程,检验是否有实际意义.

想一想,还有更好的解法吗?

例2-4　A,B 两地间的路程为 18 千米,甲从 A 地、乙从 B 地同时出发相向而行.二人相遇后,甲再走 2 小时 30 分到达 B 地,乙再走 1 小时 36 分到达 A 地.求二人的速度.

讲解　设甲的速度为 x 千米/小时,乙的速度为 y 千米/小时.题目的基本关系是:

$$\boxed{\text{路程}=\text{速度}\times\text{时间}}$$

相遇时,甲、乙各走了 $t_0=\dfrac{18}{x+y}$ 小时(相向而行在相遇处各走的时间相同是不变关系)

相等关系1　由"相遇"(关键词语)提供.

(1) 甲、乙所走的时间相等.

甲走 AC 的时间为$\dfrac{18}{x}-2.5$(小时),

乙走 BC 的时间为$\dfrac{18}{y}-1.6$(小时),

有

$$\frac{18}{x}-2.5=\frac{18}{y}-1.6=\frac{18}{x+y}. \qquad ①$$

(2) 甲、乙所走的路程之和等于全程,有

$$AC+CB=AB,$$

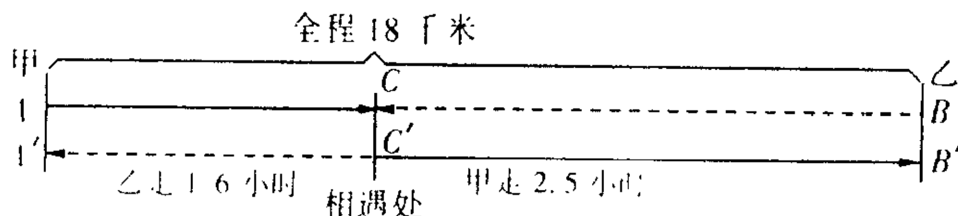


图2-10

$$1.6y+1.5x=18. \quad ②$$

相等关系2　由甲、乙的路程共同提供.

(3) 甲在相遇后走的路程＝乙在相遇前走的路程，有

实线 $C'B'$ ＝虚线 BC，

$$2.5x=\frac{18y}{x+y}. \quad ③$$

(4) 乙在相遇后走的路程＝甲在相遇前走的路程，有

虚线 $C'A'$ ＝实线 AC，

$$1.6y=\frac{18x}{x+y}. \quad ④$$

将③、④式分别相除、相乘，可得“条件之间隐蔽限定”的等量关系（速度之间的关系）：

$$5x=4y. \quad ⑤$$

$$x+y=9. \quad ⑥$$

由⑤、⑥立即可解出 $x=4$，$y=5$.

相等关系3　分别由甲、乙的路程提供

(5) 甲在相遇前的路程＋甲在相遇后的路程＝全程，有

$AC+C'B'=AB$，

$$\frac{18x}{x+y}+2.5x=18. \quad ⑦$$

(6) 乙在相遇前的路程＋乙在相遇后的路程＝全路，有

$$BC + C'A' = AB,$$

$$\frac{18y}{x+y} + 1.6y = 18. \tag{8}$$

请对比①与⑦、⑧的关系.

相等关系 4　分别由甲、乙的时间提供.

(7) 甲在相遇前走的时间 + 2.5 = 甲走全程时间,有

$$\frac{18}{x+y} + 2.5 = \frac{18}{x}. \tag{9}$$

(8) 乙在相遇前走的时间 + 1.6 = 乙走全程时间,有

$$\frac{18}{x+y} + 1.6 = \frac{18}{y}. \tag{10}$$

请对比⑦与⑨,⑧与⑩的关系.

这样,我们从路程、时间、速度及其关系中已经找到了 10 个等式(并不独立),有了这么多的方程,本题的求解也就不难了.而有了找等量关系的基本功,解应用题的难点也就容易突破了.具体讲解时,可辅以下表:

基本关系	路程 = 速度 × 时间					
项目	路程		速度		时间	
	甲	乙	甲	乙	甲	乙
状态 0	18		x	y	$\frac{18}{x}$	$\frac{18}{y}$
状态 1 (相遇)	$\frac{18x}{x+y}$	$\frac{18y}{x+y}$	$x+y$		$\frac{18}{x+y}$	
状态 2 (继续前进)	$2.5x$	$1.6y$	x	y	2.5	1.6
寻找等式 布列方程	通过横竖关系可找到上述 10 个等量关系,或通过一个量的两种表示法得出方程					

2. 平面几何入门教学的问题表

平面几何教学“入门难”是引起广泛关注的教研课题.根据解题过程的基本结构,编拟一个解题程序——问题表,将有助于难点的突破.教师可以利用表中的问题来引导学生找到解题途径,培养逻辑思维能力,学生也可以独立使用表中的问题和提问的程序来学会解题,发展逻辑思维能力.

表2 “怎样解几何题”表①

(1) 审题

已知是什么? 结论是什么? 把它们表示在图形上.图具有一般性吗?

题意中出现哪些名词概念? 它们的定义是什么? 用定义代替这些名词后复述问题.

从图形中能够看出题目叙述中没有直接写出的条件吗? 已知图形可分解成哪些基本图形?

(2) 探索

哪些定理(或公理、定义、问题)的结论与这里的结论相似? 利用这些要什么条件? 条件具备吗? 还需要创造什么样的条件?

你是否已运用了所有的已知条件? 这些条件可以引出哪些结论?

试作一条辅助线.

(3) 表达

写出证明,每一步的理由充分吗?

这张表可以随着学习的深入而不断充实和加长.

3. “观察——联想——转化”解题三部曲②

解题经验表明,人在解题时的思维活动,大致按“观察——联想

① 张乃达、王左芬.突出学科的基本结构,发展逻辑思维能力.福建中学数学,1983,4,P.5.

② 见参考文献[34]胡炳生.数学解题研究和发现,P.9~P.12.

——转化”的步骤进行.这两种过程之间,靠解题设计——数学化设计和标准化设计,把它们联系起来.

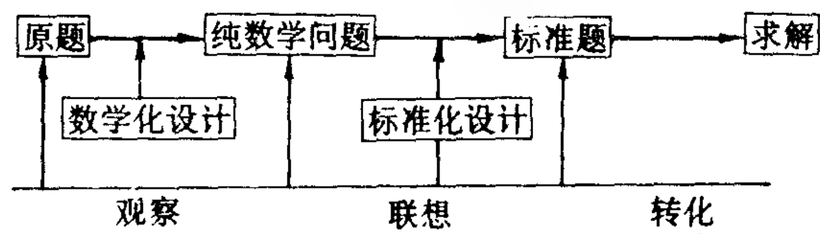


图 2-11

思维活动要靠问题来激发,没有问题,就没有积极的思维活动.在我们解题的整个思维活动中,总是不断设问,不断回答和解决这些问题,并设计各种图、式,不断改进它们,来使解题获得进展.在“观察——联想——转化”的过程中,通常可以提一些什么有价值的问题呢?下面是一张问题表:

表3 解题思考步骤、程序表

步骤	思考程序
观察	(1) 要求解(证)的问题是什么？它是哪种类型的问题？ (2) 已知条件(已知数据、图形、事项、及其与结论部分的联系方式)是什么？要求的结论(未知事项)是什么？ (3) 所给图形和式子有什么特点？能否用一个图形(几何的、函数的或示意的)或数学式子(对文字题)将问题表示出来？能否在图上加上适当的记号？ (4) 有什么隐含条件？
联想	(1) 这个题以前做过吗？ (2) 这个题以前在哪里见过吗？ (3) 以前做过或见过类似的问题吗？当时是怎样想的？ (4) 题中的一部分(条件，或结论，或式子，或图形)以前见过吗？在什么问题中见过的？ (5) 题中所给出的式子、图形，与记忆中的什么式子、图形相像？它们之间可能有什么联系？ (6) 解这类问题通常有哪几种方法？可能哪种方法较方便？试一试如何？ (7) 由已知条件能推得哪些可知事项和条件？要求出未知结论，需要知道哪些条件(需知)？ (8) 与这个问题有关的知识(基本概念、定理、公式等)有哪些？
转化	(1) 能否将题中复杂的式子化简？ (2) 能否对条件进行划分，将大问题化为几个小问题？ (3) 能否将问题化归为基本命题？ (4) 能否进行变量替换、恒等变换或几何变换，将问题的形式变得较为明显一些？ (5) 能否形——数互化、利用几何方法来解代数问题？利用代数(解析)方法来解几何问题？ (6) 利用等价命题律(逆否命题律、同一法则、分断式命题律)或其他方法，可否将问题转化为一个较为熟悉的等价问题？ (7) 最终目的：将未知转化为已知.

4. 怎样解大学数学题表

舍恩菲尔德把大学数学中最常用的启发式原理制成了一个有趣的表①.

表4　常用的启发法

分　　析

(1) 尽可能画一个图.

(2) 检查特例:

① 选择特殊值来造成问题的例证,获得对它的"感觉".

② 检查极限情况以探索可能范围.

③ 使任一整数参数依次等于1,2,3,…以寻找一个归纳模式.

(3) 尝试简化问题:

① 利用对称性,或

② "不失一般性"的论证(包括缩尺).

探　　索

(1) 考察本质上相同的问题:

① 把问题的条件用等价条件代换.

② 用不同方式重新组合问题的各要素.

③ 引进辅助要素.

④ 重新表述问题,方法是:

ⅰ) 改变观点或符号;

ⅱ) 考虑反驳论证或对比论证;

ⅲ) 假定你有了一个解,确定它的性质.

(2) 考察稍加修改的问题:

① 选择次要目标(获得条件的部分满足).

② 放宽一个条件,然后尝试重新加上它.

③ 把问题域进行分解,再对各种情况进行研究.

---

① [美]P.J. 戴维斯、R. 赫什著,王前、俞晓群等译. 数学经验. 江苏教育出版社,1991年12月第1次印刷,P.257.

(3) 考察全面修改的问题:

① 用少数变量构造一个类似的问题.

② 固定某个变量之外的所有变量,以确定这个变量的影响.

③ 尝试利用任何有关问题,它们具有类似的

ⅰ) 形式;

ⅱ) "已知条件";

ⅲ) 结论.

记住:当处理较容易的有关问题时,你应当尝试利用已知问题的结果和解题方法.

验证你的解答

(1) 你的解通得过这些特殊检验吗?

① 是否利用了所有的有关条件?

② 是否同合理的估值或预测相一致?

③ 是否经得住对称性、维度分析或缩尺检验?

(2) 你的解通得过这些一般检验吗?

① 它能否用不同的方式得到?

② 它能否为特例所证实?

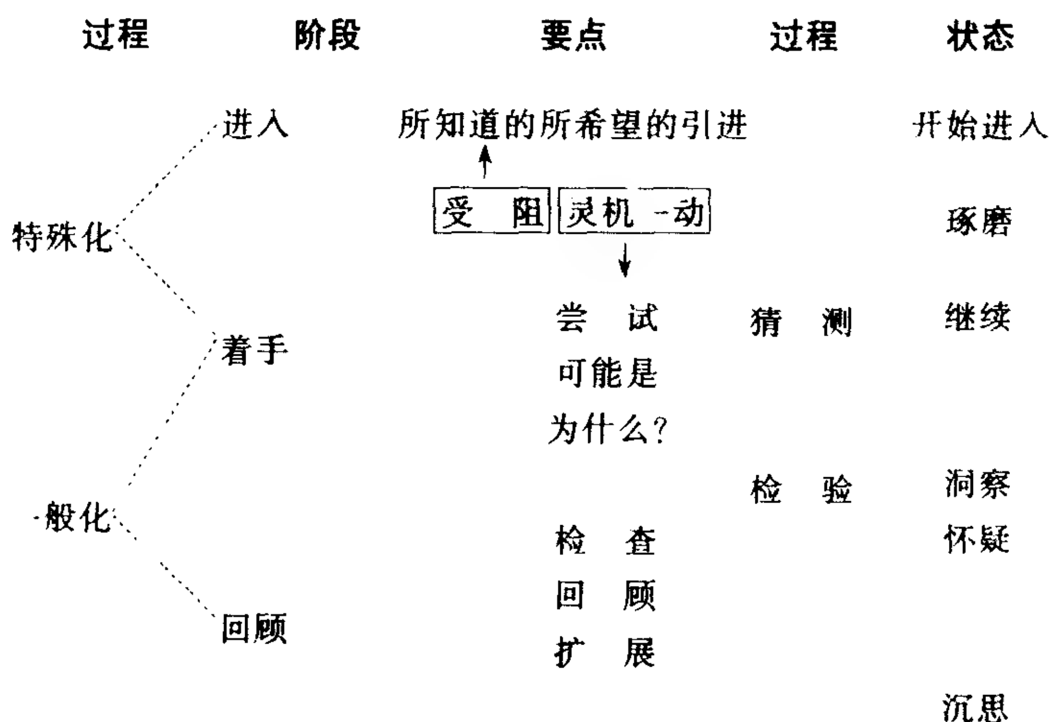
③ 它能否归结为已知结果?

④ 它能否用来产生你已知的某些事物?

5. 梅森的解题模式

在波利亚的影响下,不少学者投入了数学解题的研究.英国开放大学数学教学中心主任梅森在这方面的工作,可以看成是波利亚思想的直接继承和发展.梅森把解题过程划分为进入、着手和回顾三个阶段,给出了如下的解题模式(表5):

表5　梅森的解题模式



在上述解题模式中,梅森突出强调了所有这三个阶段对于特殊化与一般化这样两个基本过程的依赖性.他指出:首先,只有通过特殊化,才能很好地了解所面临的问题,即什么是已知的,什么又是所要求取的;其次,也只有通过特殊化,才能认识导致一般化的模式,并通过所说的一般化获得相应的猜想;最后,对所得到的猜想又必须借助进一步的特殊化去进行检验,而又只有借助新的一般化才能对已经获得的结果加以推广.同时,也只有从更一般的角度去考虑问题,才能更好地理解已经获得的结果.因此,梅森认为,数学思维事实上就可归结为:特殊化、一般化、猜测和确认.这方面的详细内容,可参阅梅森所著的《Thinking Mathematically》.

2-2　《中学数学综合题解题规律讲义》的解题观

《中学数学综合题解题规律讲义》的作者唐以荣教授(1918.5～

1991.6)，早年曾就读于西南联合大学师范学院数学系，有10余年中学教学的经历，1989年离休前是四川省重庆师范学院数学系教授，主讲初等数学、中学数学教材教法等课程.

唐教授多年潜心中学数学综合题解题规律的研究，1982年出版了《中学数学综合题解法新论》（重庆出版社），提出"连续化简"是解题的基本规律，随后又把"中学数学综合题解题规律研究"作为该系的科研项目，动员四川省和全国的有关同志进行研究，并开设同名选修课，出版同名书籍，掀起了一股颇具规模的解题规律研究的热潮，唐教授本人曾应邀到12个省（市）的52所高校和数以百计的中学讲课.《人民日报》、《光明日报》等16家报刊、电台都曾作过报道.

唐教授于1991年2月25日曾给笔者寄来长文《论解中学数学综合题的思维规律体系》，对其本人的解题观点进行了系统的总结，下面的客观介绍以此文及《中学数学综合题解题规律讲义》为依据.至于评价则留给读者.

2-2-1 连续化简

唐教授认为，中学数学综合题求解的基本规律是存在的，并且就是"连续化简"，"连续化简是解各种综合题的思考过程的共性".

连续化简是指在合逻辑的前提下，连续地把原题转化为比较易证的题目，一直到所得的新题目已经成为一项基础知识为止.为了使"连续化简"取得统一的陈述形式，特作如下约定：

约定1 称在合逻辑的条件下，用比原题 T 稍稍易解的题 T_1 代替原题为：化简 T 成 T_1.

约定2 称"化简待解题 T 为 T_1，化简 T_1 成 T_2，…，化简 T_k 成 T_{k+1}，T_{k+1} 是基本题"为连续化简的思考过程.

这里的 $T_1, T_2, \cdots, T_k$ 称为中继题，其条件与结论分别称为中继条件与中继结论.

例2-5 已知

$$\frac{a}{1+a+ab}+\frac{b}{1+b+bc}+\frac{c}{1+c+ca}=1, \tag{①}$$

求证　$abc=1$.　②

讲解　假定这样开始思考:“要证②,先证什么?”

只要对照①与②,不难发现,上述思考离开了题目的一个明显特征:式①的数学结构的复杂程度远远超过了②.为了抓住这项实际存在的特征,开始的思考,至少应修改成下述:

“要证②,应先证怎样一个稍稍复杂的式子?”

作出这样的思考,不仅表明解题者已经抓住了上述特征,特别是还说明解题者对于应形成怎样的思考过程,已有了全盘的考虑:从简单的②出发,一步一步向式①靠拢,形成这样一个“连续化繁”的思考过程,发现合要求的解答.因之,这项思考比之前项见子打子式的思考(即片面的“有的放矢”)来得优越.

可是,由于②很简单,就缺乏足够的特征确定合要求的答案.比如,若把答案看成是:

“先证　$abc=x-(x-1)$”.

虽然有道理,但 x 到底是怎样的数呢?谁也无法确定.

的确可以作出这样的答案:

“先证　$abc-1=0$”.　③

但是,要证③应先证怎样一个稍稍复杂的式子呢?比较易于考虑到的答案是:

“先证　$(abc-1)f(a,b,c)=0, f(a,b,c)\neq 0$”.

这答案的确有道理,但 $f(a,b,c)$ 是怎样的式子呢,既不能由③的特征也不能由②的特征把它确定下来.

可见,在解有一项复杂的条件而结论简单的题目时,要求形成:“把这项结构简单的结论一步一步地化为提高了复杂程度的过渡性结论,最后与原条件发生直接的因果联系”这样一个“连续化繁”的思考过程至少十分困难.核心理由是:简单的结论,缺乏足够的特征可以作为我们确定那一系列一个比一个稍稍复杂的过渡性结论的根

据.前述的“x”和“$f(a,b,c)$”都无法确定,正是这一点的十分恰当的反映.

让我们试试另一种截然相反的,由结构复杂的式①出发的“连续化简”的思考过程,看有没有形成的可能性.

显然,这样的思考过程应开始于提问:“式①可化为怎样一个稍稍简单的式子?”

式①的特征(左边为三个分式的和,右边为1)说明:答案允许为

$$\frac{a}{1+a+ab}+\frac{b}{1+b+bc}-\frac{1+ca}{1+c+ca}=0. \quad ④$$

式④比式①简单:它右边为0,这就为经过运算对左边分解因式、引出降次的等于0的式子准备了条件;并且右边出现减号,为通分后抵消分子中成相反数的项准备了条件.

式④可化为怎样稍稍简单的式子?

考虑到第3个分式可看成同分母的两个分式的和,为了抵消运算后的分子,可化式④为

$$\frac{a}{1+a+ab}-\frac{ca}{1+c+ca}+\frac{b}{1+b+bc}-\frac{1}{1+c+ca}=0. \quad ⑤$$

式⑤可化为怎样稍稍简单的式子?运算表明,它应是

$$\frac{1}{1+c+ca}\left(\frac{a-a^2bc}{1+a+ab}+\frac{abc-1}{1+b+bc}\right)=0. \quad ⑥$$

式⑥可化为怎样稍稍简单的式子?稍加推敲,不难发现:括号内的两个分子有公因子“$1-abc$”,可见式⑥可化为稍稍简单的式子

$$\frac{1-abc}{1+c+ca}\left(\frac{a}{1+a+ab}-\frac{1}{1+b+bc}\right)=0. \quad ⑦$$

式⑦可化为怎样稍稍简单的式子?运算表明合要求的式子应是

$$\frac{-(1-abc)^2}{(1+a+ab)(1+b+bc)(1+c+ca)}=0. \quad ⑧$$

由于式⑧中分母的3个因式就是已知条件式①里面的分母,不允许为0,可见

$$1-abc=0.$$

因而②成立. □

以上说明,在解只有一项结构复杂的条件而结论简单的题目,形成连续化简的思考过程是可行的,因为一个复杂的式子往往有足够的特征作为确定一个稍稍简单的过渡性条件的根据.

例2-6　在△*ABC*中,已知

$$a^2-a-2b-2c=0, \qquad ①$$

$$a+2b-2c+3=0, \qquad ②$$

求△*ABC*最大角的(度数)[①].

讲解　本例结论是求最大的角,而条件却是关于边的等量关系,根据三角形的边、角大小关系可知应先由二项条件求出最大的边.考察两项条件①,②的特征,可以发现共性:b,c的系数的绝对值都是2,运用这特征,可引出

$$2b+2c=a^2-a, \qquad ③$$

$$2c-2b=a+3. \qquad ④$$

由③,④可得

$$c=\frac{a^2+3}{4}, \qquad ⑤$$

$$b=\frac{(a+1)(a-3)}{4}. \qquad ⑥$$

又 $a>0(b>0,c>0)$, ⑦

由④,⑦得　$c>b$. ⑧

由⑥,⑦得　$\begin{cases}(a+1)(a-3)>0,\\ a>0.\end{cases}$

即　$a>3$. ⑨

由⑤,⑨知　$c-a=\dfrac{(a-1)(a-3)}{4}>0$, ⑩

得　$c>a$. ⑪

---

① 见参考文献[32]唐以荣.中学数学综合题解题规律讲义,P.64.

由⑧,⑪得 c 边是$\triangle ABC$ 的最大边,从而$\angle C$ 为最大角.据余弦定理

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{b^2-(c-a)(c+a)}{2ab}.$$

由⑤知 $$c+a=\frac{(a+3)(a+1)}{4}. \qquad ⑫$$

将⑥,⑩,⑫代入余弦定理,知

$$\cos C=\frac{(a+1)^2(a-3)^2-(a^2-1)(a^2-9)}{16\cdot\frac{a(a+1)(a-3)}{2}}=-\frac{1}{2},$$

所以,最大角 $C=120^\circ$. □

这是一个典型的"二导一"推理,几乎每一个中间结论都由两个(或两个以上)条件推出.西南师范大学严栋开教授认为"二导一式法"是"作者苦心孤诣呕心呕肝创造出来的"[①].此例的继续分析请见第3章例3-9.

类似地,考察了各类典型例子之后,唐教授总结出"解题的基本规律"[②]:

1. 解题的思考过程是一个连续化简的过程,即在完全合逻辑的前提下,连续地用稍稍易作的题目代替原题,一直到所得新题成为一项基础知识为止的过程.

2. 上述连续化简必须充分研究和运用题目本身的特征提供的信息,达到见缝插针的程度.

3. 在着重运用题目的条件和结论的一方的特征进行连续化简时,也应恰当地兼顾另一方的特征所能提供的信息.

4. 解条件单一、复杂而结论单纯的题目时,应该对条件实行连续化简,即连续地用条件稍稍简单(易于进一步化简)而结论不变的题目代替原题,一直到所得新题目已经成为一项基础知识为止.如例2-5.

---

①② 见参考文献[32]唐以荣.中学数学综合题解题规律讲义,P.1.

5. 解条件单一、单纯而结论复杂的题目时，应该对结论进行连续化简. 如

例2-7 已知 $n\in\mathrm{N}_+$，$n>1$，$a>1$，求证

$$\frac{1+a^n}{a+a^2+\cdots+a^{n-1}}\geqslant\frac{2}{n-1}. \quad ①$$

6. 解条件在两项以上、各项条件都与结论无直接联系的题目时，连续化简的主要形式是连续地以条件中的某两项(或它们的推论)的共同的结论代替原条件因而逐渐减少条件的数目(保持原结论不变)，最后把原题化为一项基础知识. 如例2-6.

7. 解条件在两项以上，有的条件与结论有直接的非因果联系的题目的连续化简的形式，是连续地把结论与和它有联系的条件联系起来，以发现足以使结论成立的另一项条件，用它代替原结论，并进而采取类似的化简，一直到所得新题目成为一项基础知识为止. 如

例2-8 已知点 P 在椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上，F，F' 为这曲线的焦点，$\angle FPF'=\theta$，$\triangle FPF'$ 的面积为 S，求证 $S=b^2\tan\frac{\theta}{2}$.

(以上两例的解法见后面的叙述)

2-2-2 解题的基本方法

基本的解题法分为两大类四种.

第一类 等价变形式解题法. 包括两种：

1. 等价变形式顺推法：常用于解条件单一、复杂而结论单纯的题目和具有这种性质的题目. 其推理形式为“$A\Rightarrow B$”. 如例2-5.

2. 等价变形式逆推法：常用于解条件单一，单纯，而结论复杂的题目. 其推理形式为“要证 A 先证 B”. 如例2-7可作这样的思考：

要证①，先证稍稍简单的

$$(n-1)+(n-1)a^n\geqslant 2(a+a^2+\cdots+a^{n-1}). \quad ②$$

要证②，先证稍稍简单的

$$(n-1)+(n-1)a^n-2(a+a^2+\cdots+a^{n-1})\geqslant 0. \quad ③$$

要证③，先证稍稍简单的

$$(1-a)+(1-a^2)+\cdots+(1-a^{n-1})+(a^n-a)$$
$$+(a^n-a^2)+\cdots+(a^n-a^{n-1})\geqslant 0. \quad ④$$

要证④，先证稍稍简单的

$$(1-a)(1-a^{n-1})+(1-a^2)(1-a^{n-2})+\cdots$$
$$+(1-a^{n-1})(1-a)\geqslant 0. \quad ⑤$$

由 $a>1$ 及

$$(1-a^k)(1-a^{n-k})\geqslant 0 \qquad (1\leqslant k\leqslant n-1)$$

知⑤成立，从而①成立. □

第二类 二导一式解题法. 包括两种：

1. 二导一式顺推法：常用于解条件在两项以上，各项条件与结论无直接的非因果联系的题目. 其推理形式为"A 且 B⇒C". 如例 2-6.

2. 二导一式逆推法：常用于解条件在两项以上，有的条件(或其直接推论)与结论有直接的非因果联系的题目，其推理形式为"要证 A，已知 B，先证 C". 如例 2-8，要证

$$S=b^2\tan\frac{\theta}{2}, \quad ①$$

而列举椭圆的基本性质可以得到下述条件：

$$PF+PF'=2a, \quad ②$$
$$S=0.5PF\cdot PF'\sin\theta, \quad ③$$
$$FF'=2C, \quad ④$$
$$a^2=b^2+c^2, \quad ⑤$$

……

把①与式③联系起来考虑，知要证①可先证

$$0.5PF\cdot PF'\sin\theta=b^2\tan\frac{\theta}{2}. \quad ⑥$$

运用三角公式知要证⑥可先证

$$PF\cdot PF'\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}=b^2\sin\frac{\theta}{2}. \quad ⑦$$

当 $\theta=0$ 时,⑦的两边为 0,因而成立;当 $\sin\frac{\theta}{2}\neq 0$ 时,⑦等价于

$$PF\cdot PF'\cos^2\frac{\theta}{2}=b^2. \tag{8}$$

考虑到 $2\cos^2\frac{\theta}{2}=1+\cos\theta$,又由余弦定理知 $\cos\theta$ 与 $PF\cdot PF'$ 有直接联系,可知要证⑧应先证

$$PF\cdot PF'(1+\cos\theta)=2b^2. \tag{9}$$

由
$$\cos\theta=\frac{PF^2+PF'^2-EF'^2}{2PF\cdot PF'}$$
可知,要证⑨可先证

$$(PF+PF')^2-EF'^2=4b^2. \tag{10}$$

由条件②,④知⑩等价于

$$4a^2-4c^2=4b^2. \tag{11}$$

由条件⑤知⑪成立,因而⑩,⑨,…,①成立. □

这 4 种基本解题法都是"连续化简"的不同形式,它们适用的类型包括了大部分综合题. 更为复杂的综合题或者可用这 4 种基本解题法之一解决,或者兼用这 4 种基本解题法的两种以上加以解决. 而更多的解题方法,如待定系数法、三角证题法、特殊与一般相结合的解题法、反证法、数学归纳法、递推法、类比法、消元法、抽屉法等,唐教授认为是基本解题法的变形①.

2-2-3　进行连续化简应遵循的基本原则

总的原则:把一个正确的题目当成一个统一的整体,作出一个正确的解答不可避免地要使题目的各个部分的特征尽可能发生联系以充分发挥各自的作用,这种"充分"要求达到"见缝插针"、"无孔不入"的程度.

---

① 见参考文献[32]唐以荣. 中学数学综合题解题规律讲义, 第三章, P.104.

具体的原则有下述5条：

1．直接求简原则

即直接运用题目自己的特征引出简易的或有助于进一步化简的中继条件或中继结论．

2．兼顾原则

即同时运用题目的各部分的关系，运用题目的各部分与已知知识的关系引出它们的共同的推论作为中继条件或中继结论；同时研究题目的条件或结论的不同情况．

3．同型原则

即当题目的各部分属于不同类型因而无法发生联系时，使它们属于同一类型因而发生联系．

4．适当分组与适当合并原则

在处理代数式（等式或不等式）时，往往需要作适当分组与适当的合并以促进连续化简．

5．使用辅助件原则

即根据需要适当地使用辅助元素、辅助条件、辅助命题、辅助图形、辅助式等，以促进连续化简（包括为使用前几项原则创造条件）．

实际解题时往往需要同时运用几项原则．

2－3 《怎样学会解数学题》的解题观

弗里德曼［原苏联］等著的《怎样学会解数学题》[①]一书提出或引述了许多关于解题的精彩看法．

1．在“致读者”中，认为“学会解答任何一道习题是不可能的．”“应当学会这样一种对待习题的态度，即把习题看做是精密研究的对

---

① 国内有两种翻译本，其一是《怎样学会解数学题》，黑龙江科技出版社，1981年，陈淑敏、严世超译．其二是《怎样解数学题》，北京师范大学出版社，1988年，丁家泰、赵素兰译．

象,而把解答习题看做是设计和发明的目标".在第二章又提出"寻找解题不能教会,而只能靠自己学会.我们这本书的目的不是为了教读者,而是为了帮助读者学会解题".[①]并且说:"解题是一种创造性的活动,而寻找题解是一个发明的过程.让我们在解题的过程中学会创造和发明吧!"[②]

由这些论述可以看到,作者强调了解题的实践性和创造性.

2. 解答数学习题的实质是什么呢?作者认为"解数学题,这就是要找到一种一般数学原理(定义、公理、定理、定律、公式)的序列,把这些原理用于习题的条件或者条件的推论(解题的中间结果),得到习题所要的东西,即习题的答案".[③]这是"关于解答数学习题实质的初步的、最一般的说明".[④]

记 x 为条件,y 为答案,若存在数学原理 $f_1, f_2, \cdots, f_n$,使

$$y = f_n f_{n-1} \cdots f_2 f_1(x),$$

则 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 就是这道习题的原理系列,$f_k f_{k-1} \cdots f_1(x)$ $(1 \leqslant k < n)$为中间结果或条件的推论.

例2-9　分解因式 $x^3 - 24 + 6x^2 - 4x$ 的解题表.

解题步骤	一般数学原理	习题条件或者条件的推论	结果
1	加法的交换律和结合律	$x^3-24+6x^2-4x$	$(x^3-4x)+(6x^2-24)$
2	从括号里提取公因式的法则	$(x^3-4x)+(6x^2-24)$	$x(x^2-4)+6(x^2-4)$
3	同上	$x(x^2-4)+6(x^2-4)$	$(x^2-4)(x+6)$
4	分解平方差的法则	$(x^2-4)(x+6)$	$(x+2)(x-2)(x+6)$
5	等式的传递性	已得到的所有等式	$x^3-24+6x^2-4x$ $=(x+2)(x-2)(x+6)$

①②③④　见参考文献[30]弗里德曼.怎样学会解数学题,P.73,P.111,P.36,P.37.

可见,解答这个因式分解题的实质,就是找出5项数学原理序列,依次作用于多项式,得出最后答案:

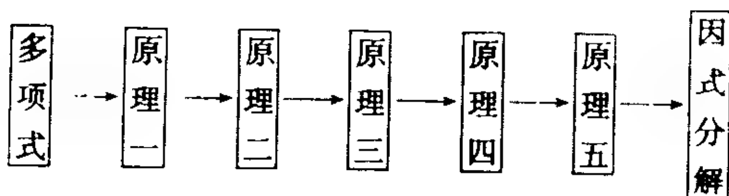


图2-12

这个数学原理序列是怎样找到的,如何确认它们是正确的,作者提出了8阶段解题程序(图2-13).

3. 解题过程的结构."如果把解题过程理解为从开始得到习题到完全解完这道题的过程,那么这个过程显然不单是由叙述已经找到的题解组成的,而是由一系列的阶段组成的,叙述题解只是其中的一个阶段."①其全过程可分成8个阶段②:

第一阶段——分析习题;

第二阶段——作习题的图示;

第三阶段——寻找解题方法;

第四阶段——进行解题;

第五阶段——检验题解;

第六阶段——讨论习题;

第七阶段——陈述习题答案.

第八阶段——分析题解.

可以将这个解题过程图示如下③:

①②③ 见参考文献[30]弗里德曼.怎样学会解数学题,P.38,P.39,P.112.

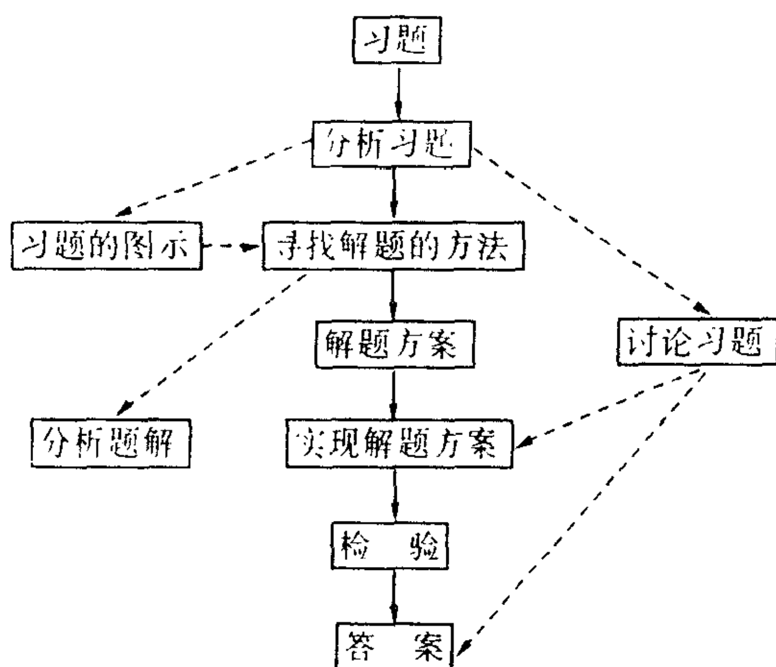


图 2 -13

4. 如何寻找解题方案呢? 作者引述有关成果,提出了4个特别有益的建议:

(1) 识别习题的类型

"如果我们着手解答一道习题,那么,第一件事就想知道:这是道什么题? 它是什么形式,属于哪种类型? 换句话说,就是需要识别给定习题的类型"①."要知道,识别了习题的类型,在多数情况下,我们就得到了解题的方法,因为在数学教材里,对于许多类型的习题都有解答它们的一般法则"②.

(2) 归结为已经解过的题③

原苏联著名数学家、莫斯科大学教授C·A·雅诺夫斯卡娅(1896—1966)有一次向奥林匹克数学竞赛参加者发表了《什么叫解题?》的演讲.她的答案显得惊人地简单,完全出乎听众的意料:解题

①②③ 见参考文献[30]弗里德曼.怎样学会解答数学题,P.73,P.73,P.79.

就是把题归结为已经解过的题.

如果我们开始解一道解,分析的结果不能从中识别出类型,换句话说,发现给定的习题属于我们所不熟悉的类型,对于这种类型我们不知道解答它的一般方法,那我们应当怎么办呢?只有设法归结为熟悉的早已解过的习题(利用变换、改编或其他方法).雅诺夫斯卡娅正是建议这样做的.

当然,雅诺夫斯卡娅的建议完全正确,也非常简单,可是实际运用起来却不这么简单.要知道,对于这种把不熟悉的习题归结为熟悉的、已经解决的习题的做法来说,没有一种确定的法则.但是,如果仔细地、深入地分析习题,认真地思考解答的每一道习题,在自己的头脑中清醒地记住用来寻找解题的所有方法,记住习题都是用什么方法解出来的,那么,读者一定会逐渐地获得这种归结的能力.

例 2-10 在任意凸五边形中,按顺时针方向标记顶点和各边的号码.用线段连接第一条边和第三条边的中点,第二条边和第四条边的中点.然后同样用线段连接这两条线段的中点.如果第五条边的长度等于 a,求最后这条线段的长度.

讲解 作习题的图示,因为没有图示分析这道题很困难.如图 2-14,已知

$$A_1B_1 = B_1A_2,$$
$$A_2B_2 = B_2A_3,$$
$$A_3B_3 = B_3A_4,$$
$$A_4B_4 = B_4A_5,$$
$$B_1M = MB_3,$$
$$B_2N = NB_4,$$
$$A_1A_5 = a,$$

求 $MN = ?$

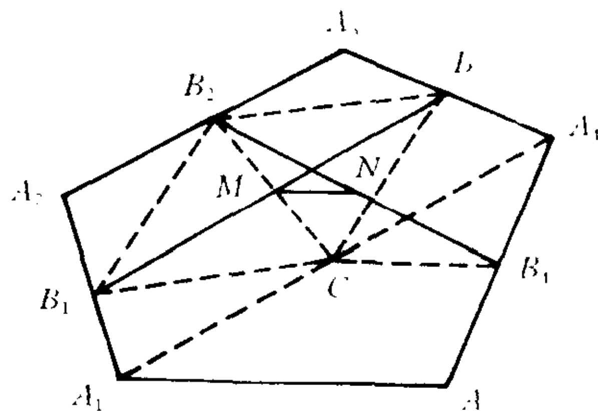


图 2-14

看过习题,作出它的图示,我们可以看出,这道题属于我们不熟悉的类型.能把它归结为什么样的熟悉的习题呢?

再看一遍条件,我们注意到其中涉及边的中点.我们以前在哪儿遇到过边的中点呢?在三角形中位线,梯形中位线的习题里遇到过.或许读者还解过这样的习题,其中谈到用依次连接任意四边形各边中点的方法得到的图形.本题给我们的是任意五边形,怎么办呢?

自然产生由五边形削减成四边形的想法.连 A_1A_4,在所得的四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 中,前 3 条边的中点用 B_1,B_2 和 B_3 标出.第 4 条边 A_1A_4 的中点用 C 标出.如果依次连接四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 各边的中点,就得到平行四边形 $B_1B_2B_3C$.

由平行四边形对角线互相平分知,B_2C 的中点就是 B_1B_3 的中点 M,连 CB_4,则 MN 是$\triangle B_2CB_4$ 的中位线,有

$$MN \underset{=}{\parallel} \frac{1}{2}CB_4.$$

而 CB_4 是$\triangle A_4A_1A_5$ 的中位线,有

$$CB_4 = \frac{1}{2}A_1A_5,$$

得

$$MN \underset{=}{\parallel} \frac{1}{4}A_1A_5,$$

即

$$MN \parallel A_1A_5 \text{ 且 } MN = \frac{a}{4}.$$

这就不仅求出 $MN = \frac{a}{4}$,而且还得出 $MN \parallel A_1A_5$.

(3) 石堆里抓老鼠①

"如果遇到不熟悉的和费解的习题,那么,所有已知的建议和提示都无济于事了.那到底怎样寻找题解呢?"

奥林匹克数学竞赛最早发起人之一,苏联著名数学家塔尔塔科夫斯基教授在回答这个经常提出的问题时,打比方说,"寻找题解就好像去抓藏在石堆里的老鼠."这有两种方法:

"可以把这个石堆的石头一块接一块地逐渐地搬开,直到露出老鼠来.这时,你们再扑上去,抓住它……(如例 2－6 解法 1)

---

① 见参考文献[30]弗里德曼.怎样学会解数学题,P.90.

可是,也可以用另一种方法,就是围绕石堆不停止地来回走动,并留心观察,看看什么地方露出老鼠尾巴没有.一旦发现老鼠尾巴,你们就用手抓住它,并把老鼠从石堆里拖出来."(如例2-6解法2)

这要求我们,既善于把一个问题分解为一些小问题(然后分别求解小问题),又要善于分析问题的实质,直捣问题的关键.

(4) 解题是一个改编习题的过程①

"用心理学研究人的解题过程已经有一百多年了.这些研究的成果揭示了许多引人注目的规律,找到了解题过程许多重要的特点.苏联著名心理学家鲁宾什节依(1889—1960)提供的这个过程的一般特点特别引人注目.他说明了人们解题是一个改编习题的过程,在这个过程中,通过综合习题条件和要求之间的联系,对这些条件和要求进行不间断的分析."

例2-11 一套徽章分放在一些小盒里,每个小盒有10个格.在小盒的某些格子里有一个徽章,其他格还是空的.放这套徽章的任何两个小盒至少能以同样的格子里有或者没有徽章互相区别.显然,每个小盒里徽章最多数是10,最少数是0(空盒).放这套徽章的小盒有多少?

这道题多少有些难度,我们将其改编为类似的更具有实际的意义的习题:代替小盒的每一格分别安上一个小电灯泡,这时,小电灯泡的一种可能状态(亮或不亮)对应于格子里有或者没有徽章,结果得到这样的习题:

例2-12 一所住宅里有10个电灯泡.住宅照明有多少种不同的方法?即使最低限度用一个电灯泡的状态来区别照明方法,照明的两种方法也算是不同的.每个电灯泡可能亮,也可能不亮.所有的电灯都不亮这种情况也是一种照明方法.

这个问题更直观了,但解法也不是显而易见的.为了更易于计算照明的不同方法(即盒子数),我们用"+"表示亮灯,"-"表示关灯,

① 见参考文献[30]弗里德曼.怎样学会解数学题,P.103.

问题转化为由“+”“-”组成的10元排列，得到这样一道题：

例2-13　有一个10列的矩阵，在这个矩阵里每个元素的位置都置有“+”号或者“-”号.矩阵的任意两行至少有一个相同的列，它们的符号不同.这个矩阵最多有多少行?

这是一道较标准的数学题了，如果对它的求解仍感不够显然的话，那么可把“+”号看成1，“-”号看成2(不能看成0)，得到这样一道题：

例2-14　由数码1、2能组成多少个不同的十位数?

这是一道标准的题目，解法也是现成的.因为每一数位上都只能有1、2两种可能，由乘法原理得十位数共$2^{10}=1024$个.

这样，例2-11中的小盒有1024个，例2-12中的照明方法有1024种，例2-13中的矩阵有1024行.这里，例2-12，例2-13，例2-14是通过对例2-11的改编而得到的，或者说，是用模拟它的方法实现的.

2-4　解题目的

解题教学中的解题目的，反映了解题观点，并且服务于数学教学的总目标.解数学题的目的是什么呢?

有的学生回答是：考试得分；

有的教师回答是：巩固知识；

更普遍的回答是：求出答案.

从教学角度看，这些回答都有不够完整的地方.其实，求出答案仅仅是数学问题本身的目的.即使是数学家的研究工作，有时也不完全把找到答案作为目的.众所周知，一个猜想尚未解决时，就像一台发动机在高效运转，它极大地刺激了数学方法的发明和数学分支的创立，其价值有时远远超过猜想的解决本身.所以，“四色定理”宣布被电子计算机证实时，有些数学家深感惋惜；所以，希尔伯特不愿“杀掉”那只“能为人类生出金蛋的母鸡”——费马猜想(§1-1-1).

作为数学教学中的习题，其答案全都是现成的，教学参考书还常有详细的过程．波利亚正因为不满足于只给出现成答案，才决心“教会年轻人去思考”，写出了怎样解题表，因而，解出数学习题本身不是全部或最终目的，而是一种训练手段，这种训练的目的主要有3条：

（1）知识理解的巩固性目的；

（2）能力培养的发展性目的；

（3）思想教育的陶冶性目的．

这些目的不是做一二道习题就能达到的，但做每一道习题都应该力求有所体现．

这些目的与整个数学教学的目的是一致的，因此，解题训练要与基础理论的学习结合起来，融知识的应用过程与知识的发生过程于一体．

这种目的观要求我们重视解题中的思维过程，重视解题在发展学生的思维、培养学生的能力、促进学生良好品质结构方面的作用．在解题中，数学的精练、准确和严谨，有利于培养严密的逻辑思维能力；数学的抽象性可以培养学生的抽象思维能力；数学的广泛应用可以培养学生理论联系实际，分析问题和解决问题的能力．这一切又都有助于学生养成科学的思维习惯．

这种目的观还要求我们注重数学文化的教养价值，注重数学发现中的美学因素（参见§6－2－10），把数学素质的培养放在首位，数学的精神、思想和方法是人类文化的宝贵构成，它不仅是数学家的基本修养，也是各行各业创造性劳动的文化基础（大众数学！）．确实，数学解题训练有利于知识的理解和巩固，有利于能力的培养和发展，但这两者都还有更深一层的意义——把人的思维潜能充分开发出来．所以说，数学是思维的体操；所以说，学习数学就是要让人变得更加聪明；所以说，解题训练的就是开发数学智慧的过程．（参见§3－4，§5－2）

明确解题目的，就不会仅仅满足于求出答案，也能够使广大师生从分数的沉重压力下解放出来．当问题还没有解出来时，我们能够坚

忍不拔、锲而不舍；当答案已经找到时，我们能够从解题过程中自觉吸取营养，并饶有兴趣地进行新的探索：解题中用到了哪些知识？它们是怎样联系起来的？解题的关键在哪里？思路是怎样打通的？推理是否严谨？思维有无多余回路？还有别的解法吗？还有更简捷的解法吗？这种解法能用于其他问题吗？这个问题能够推广吗？改变一下条件如何？改变一下结论如何？……当你的思想已沉浸在无边的探索时，你也就从解题中获得了崇高的享受，并接受到数学文化的熏陶.

例 2－15　计算　$\tan 67°30' - \tan 22°30'$.

讲解　这是高中课本中的一道很平常的习题，几乎未听说过哪位学生不会做.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{\sin 67°30'}{\cos 67°30'} - \frac{\sin 22°30'}{\cos 22°30'} \\
&= \frac{\sin 67°30' \cos 22°30' - \cos 67°30' \sin 22°30'}{\cos 67°30' \cos 22°30'} \\
&= \frac{\sin(67°30' - 22°30')}{\frac{1}{2}(\cos 90° + \cos 45°)} \\
&= \frac{2\sin 45°}{\cos 45°} = 2. \ \square
\end{aligned}
$$

那么，我们解这道题的目的是求出这么个“2”吗？找到这个“2”就可以长嘘一口气，匆匆合上作业本了吗？如果这样，我们就将失去做这道题本来应该得到的更多、更宝贵的东西．无异于“进宝山而空返”.（题做出来就是进了宝山，匆匆合上作业本就是到而空返）

容易想到，我们是要通过本题的运算来熟悉三角公式，来熟练三角变形，提高运算能力的．既然如此，我们就应该回过头来，自觉吸取营养．作为示范，我们有下面阶段递进的 3 点分析.

分析 1　分析解题过程，我们看到，两个由三角函数表示的无理数的差，经过一步一步的变形，终于显示出其为自然数的实质．当中主要的变形有 3 个：

(1) 把切函数变为弦函数，用同角关系公式；

(2) 合并,将差的形式变为商的形式;

(3) 分子、分母分别用三角公式改变角,使成为特殊角以便计算.用到了和差角公式、积化和差公式.

理解其中的实质步骤,求解下述1989年的高考题应不会有什么困难:

例2-16 证明

$$\tan\frac{3x}{2}-\tan\frac{x}{2}=\frac{2\sin x}{\cos x+\cos 2x}.$$

证明

$$\tan\frac{3x}{2}-\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}}-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos x)}$$

$$=\frac{2\sin x}{\cos x+\cos 2x}.\ \square$$

这里,在作业题与高考题之间,只不过是数字一般化为字母,计算改为证明,所进行的步骤,所用到的公式全都是一样的.旧的问题可以作为解决新问题的借鉴!然而,解题过程的分析远未结束.

分析2 如果进一步对高考题作研究,可以看到3个实质性的步骤(差异分析§6-2-2):

(1) 用同角关系公式消除等式两边函数名称上的差异;

(2) 用和差角公式、积化和差公式消除等式两边角的形式上的差异;

(3) 通分消除等式两边运算方式上的差异.

易知,消除第(2)个差异是主要矛盾,抓住主要矛盾,对所用到的三类公式重新组合,可得高考题的新证法:

另证[1]　由三角公式

$$\sin x=\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2},$$

$$\frac{1}{2}(\cos x+\cos 2x)=\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2},$$

相除　$$\text{右边}=\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}}-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\text{左边}.\ \square$$

这种解法不仅体现了较强的解题能力，而且便于发现：解法本身对于题目中具体数字的依赖是非实质的(要害只是$\frac{3x}{2}$与$\frac{x}{2}$的差为x，完全可以一般化为$x+\theta$与θ)，推广立即成为可能.

分析3　作推广，由

$$\sin x=\sin(x+\theta)\cos\theta-\cos(x+\theta)\sin\theta,$$

$$\frac{1}{2}[\cos(x+2\theta)+\cos x]=\cos(x+\theta)\cos\theta,$$

相除，得

推广1　$$\frac{2\sin x}{\cos x+\cos(x+2\theta)}=\tan(x+\theta)-\tan\theta.$$

取 $\theta=\frac{x}{2},\frac{3x}{2},\frac{5x}{2},\cdots,\frac{(2n-1)x}{2}$ 并相加，得

推广2　$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2\sin x}{\cos x+\cos 2kx}=\tan\frac{(2n+1)x}{2}-\tan\frac{x}{2}.$$

或　$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin x}{\cos x+\cos 2kx}=\frac{\sin nx}{\cos nx+\cos(n+1)x}.$$

同理，有

(1) $$\frac{2\sin x}{\cos(x+2\theta)-\cos x}=\cot(x+\theta)-\cot\theta.$$

1　见参考文献[35]罗增儒．怎样解答高考数学题，P.101．从形式上说，另证是将公式从串联使用变为并联使用，参见§4-2 3．也可以说是从右边推到左边而已．总之是将历时性的线性输入，组成共时性的立体结构．

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin x}{\cos 2kx - \cos x} = \dfrac{\sin nx}{\cos(n+1)x - \cos nx}$.

(3) $\dfrac{2\sin x}{\cos x + \cos y} = \tan\dfrac{x+y}{2} - \tan\dfrac{x-y}{2}$.

可见,不明确解题目的,就会解一道题忘一道题,实质上是在同一思维层次上重复操练;明确解题目的,就可以通过解"有限道题"来获取解"无穷道题"的那种数学机智.

还要指出,对例 2-15 的另一解法:

$$
\begin{aligned}
&\tan 67^\circ 30' - \tan 22^\circ 30' \\
&= \cot 22^\circ 30' - \tan 22^\circ 30' \qquad ① \\
&= \frac{\cos 22^\circ 30'}{\sin 22^\circ 30'} - \frac{\sin 22^\circ 30'}{\cos 22^\circ 30'} \\
&= \frac{\cos^2 22^\circ 30' - \sin^2 22^\circ 30'}{\sin 22^\circ 30' \cos 22^\circ 30'} \\
&= \frac{\cos^2 22^\circ 30' - \sin^2 22^\circ 30'}{\sin 22^\circ 30' \cos 22^\circ 30'} \\
&= 2\,\frac{\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ} \\
&= 2\cot 45^\circ \\
&= 2. \ \square
\end{aligned}
$$

可导致将式①一般化,得

$$\cot\theta - \tan\theta = 2\cot 2\theta.$$

由此,又可以产生另一番研究景象①.

---

① 还有解法是 $\tan 67^\circ 30' - \tan 22^\circ 30' = \sqrt{\dfrac{1-\cos 135^\circ}{1+\cos 135^\circ}} - \sqrt{\dfrac{1-\cos 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} - \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = (\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}-1) = 2.$

由于这一解法对具体数字的依赖过重,推广就较为困难.参见§4-2-4.

习 题 二

1. 设计一个解决某类问题的解题表.

2. 模仿"怎样解题"表,研究下题:

题目　设 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线,$BC=a$,$AC=b$,$AB=c$,求证

$$AD^2=\frac{1}{2}(b^2+c^2)-\frac{1}{4}a^2. \quad ①$$

提示:第一,你必须弄清问题

(1) 这是一个什么问题?

(2) 已知是什么?

(3) 求证是什么?

(4) 求证式有什么特点?

第二,拟定计划

(5) 哪些知识能提供边长的平方关系?

(6) 用余弦定理能成功吗?

(7) 用勾股定理能成功吗?

(8) 拟定一个计划,确定余弦定理方案还是勾股定理方案?

第三,实现计划

第四,回顾

(9) 推广题(斯特瓦尔特定理)在 $\triangle ABC$ 中,D 是 BC 上一点,且 $BD:DC=m:n$,$BC=a$,$AC=b$,$AB=c$,则

$$AD^2=\frac{mb^2+nc^2}{m+n}-\frac{mna^2}{(m+n)^2}. \quad ②$$

(10) 联想题 1:公式②中当 AD 为角平分线时情况如何?

(11) 联想题 2:公式②中当 AD 为高线时情况如何?

(12) 联想题 3:平行四边对角线的平方和等于它的四条边的平方和.

(13) 再推广:将 $\triangle ABC$ 的 BC 边 n 等分,分点为 $D_1,D_2,\cdots,$

D_{n-1},则

$$\sum_{i=1}^{n-1} AD_i^2 = (n-1)AD^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{12n}BC^2.$$

(14) 考虑不等关系:$\triangle ABC$ 中,D 是 BC 上一点,且 $BD:DC = m:n$,则有

$$nAB + mAC > (m+n)AD.$$

(15) 推广题:过一点 A 的直线束交直线 l 于 $B_1, B_2, \cdots, B_n$,而 $B_1B_2 : B_2B_3 : \cdots : B_{n-1}B_n = b_1 : b_2 : \cdots : b_{n-1}$,且 A 到 B_i 的距离为 $AB_i = a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$则有

$$\sum_{i=1}^{n-1} b_{i+1}a_i + \sum_{i=1}^{n-2} b_i a_{i+2} > \sum_{i=1}^{n-2}(b_{i+1} + b_i)a_{i+1}.$$

(16) $\triangle ABC$ 中,$\angle C = 90°$,$CA = a$,$CB = b$,$\angle C$ 的 n 等分线顺次与斜边 AB 交于 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$,则有

$$\frac{1}{CP_1} + \frac{1}{CP_2} + \cdots + \frac{1}{CP_{n-1}} = \frac{a+b}{2ab}\left(\cot\frac{\pi}{4n} - 1\right).$$

3. 模仿"怎样解题"表,研究下题:

题目 已知两船的速度及其在某一时刻的位置;两船各以匀速沿直线航道行驶.求当两船相距最近时,彼此之间的距离.

提示:

(1) 已知数是什么?条件是什么?画张图,引入合适的符号.

(2) 你能不能想出一个更好着手的有关问题?一个更特殊的问题?例如其中有一个速度为0.

(3) 解决了特殊问题之后,你能不能利用它?为了能利用它?你是否应当引入某个辅助元素?注意到运动是相对的!

4. 模仿"怎样解题"表,研究下题:

题目 设四边形 $ABCD$ 的面积为1,将边 AB 三等分,分点为 E,F,使得 $AE = EF = FB$,又将 DC 三等分,分点为 H,G,使得 $DH = HG = GC$,连 EH,FG,求四边形 $EFGH$ 的面积.

提示:

(1) 设想 C,D 无限接近.

(2) 设想 B,C 无限接近.

(3) 连结 HA,HF,HB,得 $\triangle ABH$ 类似于(1);连结 FC,FH,FD,得 $\triangle FCD$ 也类似于(1).

(4) 连结 AC,分别过 E,F 作 BC 的平行线,$\triangle ABC$ 类似于(2);又过 H,G 作 AD 的平行线,$\triangle ACD$ 也类似于(2).

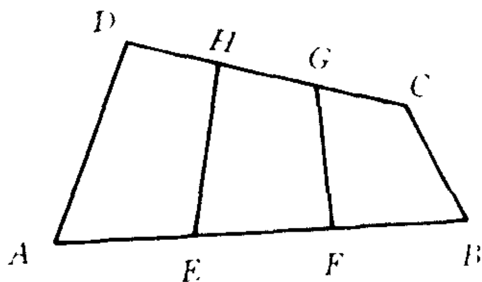


图 2 15

(5) 再考虑面积关系

$$S_{\triangle AHC}=\frac{2}{3}S_{\triangle ADC},$$

$$S_{\triangle CAF}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}.$$

相加 $$S_{AHCF}=\frac{2}{3}S_{ABCD}.$$

注意到 $$S_{EFGH}=\frac{1}{2}S_{AHCF}.$$

(6) 坐标法能成功吗?

设 $A(0,0),B(c,0),C(a,d),D(b,e)$,有 $E\left(\frac{c}{3},0\right)$,$F\left(\frac{2c}{3},0\right)$,$H\left(\frac{a+2b}{3},\frac{d+2e}{3}\right)$,$G\left(\frac{2a+b}{3},\frac{2d+e}{3}\right)$,且 $S_{ABCD}=\frac{1}{2}(ce+bd-ac)$.

(7) 推广题 1 设四边形 $ABCD$ 的面积为 1,将边 AB 及边 DC 分别作 $2n+1$ 等分($n\geqslant 1$),E,F 及 H,G 分别为 AB 及 CD 上的居于中间的一边分点,求证四边形 $EFGH$ 的面积为$\frac{1}{2n+1}$.

(8) 推广题 2 在四边形 $ABCD$ 中,边 AB,BC,CD,DA 上的三等分点顺次为 $A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2,D_1,D_2$. 连结 $A_1C_2,A_2C_1,B_1D_2,B_2D_1$ 顺次得四个交点 E,F,G,H,求证 $S_{EFGH}=\frac{1}{9}S_{ABCD}$.

若将三等分推广为 $2n+1$ 等分呢？

(9) 在四边形 $ABCD$ 中，P，Q 顺次是 AB 边上的点，R，S 顺次是 CD 边上的点，有 $AP:PQ:QB=CR:RS:SD=m:n:p$，试问四边形 $PQRS$ 的面积是原四边形面积的几分之几？（图 2－16）

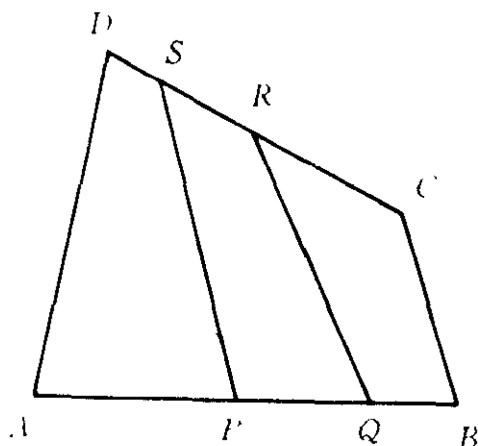


图 2－16

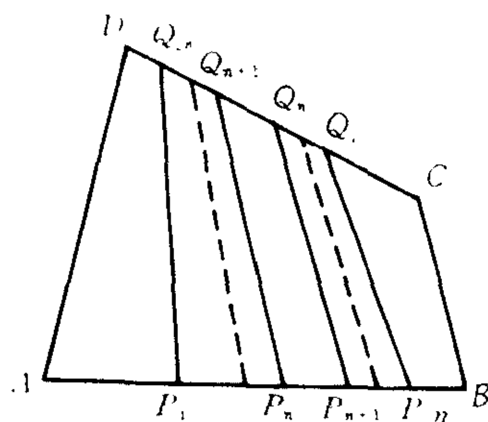


图 2－17

(10) 在四边形 $ABCD$ 中，$P_1,P_2,\cdots,P_{2n}$ 顺次是 AB 上的点，$Q_1,Q_2,\cdots,Q_{2n}$ 顺次是 CD 上的点，有 $AP_1:P_1P_2:\cdots:P_nP_{n+1}:\cdots:P_{2n}B=CQ_1:Q_1Q_2:\cdots:Q_nQ_{n+1}:\cdots:Q_{2n}D=m_1:m_2:\cdots:m_{2n+1}$，试问四边形 $P_nP_{n+1}Q_nQ_{n+1}$ 面积是四边形 $ABCD$ 面积的几分之几？（图 2－17）

(11) 继续作推广．

运用各种解题观点，求解 5～10 各题：

5．在锐角△ABC 中，

$$\begin{cases}\cos A=\cos\alpha\sin\beta,\\ \cos B=\cos\beta\sin r,\\ \cos C=\cos r\sin\alpha,\end{cases}$$

且 α,β,r 也是锐角，求证

$$\cot\alpha+\cot\beta+\cot r\geqslant\sqrt{\tan\alpha}+\sqrt{\tan\beta}+\sqrt{\tan r}.$$

6．△ABC 有内切圆 O．圆 O_1，圆 O_2，圆 O_3 分别与三角形两边

及$\odot O$相切.各圆的半径顺次记为R,R_1,R_2,R_3,求证$R\leqslant R_1+R_2+R_3$.

探讨是否有$\sqrt{R}\leqslant\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2}+\sqrt{R_3}$.

7. 假设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是自然数$1,2,\cdots,n$的某一排列.对$1,2,\cdots,n$的所有排列,求和

$$|a_1-1|+|a_2-2|+\cdots+|a_n-n|$$

的最大值.

[1957年匈牙利竞赛题]

提示:抓老鼠尾巴.注意到$|a_i-i|$应等于a_i-i或$i-a_i$,减号总保留着,问题转化为:在数$1,1,2,2,\cdots,n,n$中间加上$n-1$个"+"号、n个"−"号,使得到的代数和最大.

8. $\triangle ABC$中,已知$\angle C=90^\circ$,$a+b+c=abc$,$a,b,c\in\mathbf{N}_+$,求a,b,c.

9. 解方程组

$$\begin{cases}\lg^2x+\lg^2y=7,\\ \lg\dfrac{x}{y}=2.\end{cases}$$

10. 解方程$x^{x^5}=5$.

11. 分析下题的求解过程,抓住实质步骤,先给出简化解法,再作推广.

题目　方程$\dfrac{1+3^{-x}}{1+3^x}=3$的解是______.

[1992年高考理科(19)题]

解　去分母,得

$$1+3^{-x}=3+3\cdot3^x,$$

即

$$3\cdot3^x+2-3^{-x}=0. \qquad ①$$

两边乘以3^x,得关于3^x的二次方程

$$3\cdot(3^x)^2+2\cdot(3^x)-1=0. \qquad ②$$

分解,得

$$(3\cdot3^x-1)(3^x+1)=0, \qquad ③$$

但 $3^x+1\neq 0$，只有

$$3\cdot 3^x-1=0, \tag{4}$$

即 $$3^x=3^{-1}, \tag{5}$$

得 $$x=-1.$$

第三章　解题过程

人们寻找习题解答的活动叫做解题过程.它通常包括从拿到题目到完全解出的所有环节或每一步骤.把书写等同于解题过程既不符合事实,更没有反映出问题的本质.有时候,一个精练而漂亮的书写恰好严严密密地掩盖着一个复杂而生动的思考.解题过程最本质的是积极的思维活动,思维过程中最富于创造性的是提出问题.因此,解题过程是运用数学知识,调动数学能力,既不断提出问题又不断解决问题的思维过程.书写是其中的一个环节,虽然其重要性怎么强调都不算过分,但它毕竟是思维结果的纪录,还不是思维本身(参见§2－3中解题过程的结构).

我们认为,学会解题的有效途径是分析解题过程.有的学生总是停留在知识型的层次上,不能形成解题能力,其根本原因就在于他们既没有分析典型的例题,又没有分析自己的解题活动,没有从中整理出基础理论、基本思想和常用方法.相反,善于做解题过程分析的学生,很快就形成解题的一般能力,并且受益终生.

本章首先研究解题程序,然后对解题过程进行思维分析、结构分析和长度分析.后两章,将从更宽广的角度、运用更新的观点继续分析解题过程.

3－1　解题程序

每一道习题都有自己的解题过程,每一个过程都可以分成一些循序渐进的阶段,许多题目所共同经历的阶段经过规范化总结为一系列可操作的步骤,就形成解题程序.所以,解题程序就是经过规范

化而成为可操作的解题过程.

规范化和可操作是解题程序的两个显著特征.规范化反映了一类习题的解题过程的合理性,可操作反映了实现解题目标的可能性,合理而又可能就是有程序,否则就没有程序.

解题程序是解题思想与解题行动的连接点,其实质是解题思想的最终形式.解题是人的有意识的活动,它必然要接受解题思想的指导,但是,要把思想转化为行动,思想必须先具体化为程序,如果某个思想根本就不能转化为程序,那它就不能表现出解题能力,至多只能是一些带上神秘色彩的个人行为.数学方法的本质正在于数学思想的程序化!上一章中各种解题观,都无一例外地设计了各自的解题程序,即波利亚的怎样解题表,弗里德曼的八步骤框图,和唐以荣的"一导一式"及"二导一式".前苏联数学教育家奥加涅相在他主编的《中小学数学教学法》一书中,把解题过程分解为:理解数学题的条件,制定解题计划,实行解题计划,研究所得的解.并对前两个阶段作了精辟的分析.

有的解题分析或解题教学之所以太空、太玄,就是在解题思想与解题行动之间缺少解题程序,作者(或教师)可以"空中飞人",而读者(或学生)却"如堕五里雾中".程序是解题的必要形式,介绍解题程序也应该是解题教学的必要步骤.

解题程序依其适应范围而分成两类,一类是适应面较窄的微观解题程序,一类是适应面较宽的宏观解题程序.

3.1-1 微观解题程序

微观解题程序是适用于某一类习题的解题公式,其特点是只要按程序操作便可达到解题目标、完成解题目的.各类习题的公式解其实都是微观解题程序.例如

1. 求解"一元一次方程"有"五步骤"的解题程序(见下页)

有了这个程序,学生大都能顺利求解一元一次方程;在具体处理应用题时,就能逐步实现从算术到代数的飞跃.反之,如果没有解题

程序，很多学生就会无所适从，拿着题目不知从何下手，那么连方程都解不了，"代数思想"或"方程观点"也就成了空中楼阁，"把未知数看作已知数参与运算"的优越性也就体现不出来.

解题操作	解题程序	解题依据
操作 1	去分母	同解原理 2(分拆)
操作 2	去括号	恒等变形(分拆)
操作 3	移项	同解原理 1(重组)
操作 4	合并同类项化为最简方程 $ax=b(a\neq 0)$的形式	恒等变形(重组)
操作 5	方程两边都除以未知数的系数，得出解 $x=\frac{b}{a}$	同解原理 2(重组)

有了程序不该绝对化[1]，呆板的教学只教程序，只练程序，既忽视了每一步骤的依据，又不指出各个步骤的目的，更未揭示其中的数学思想，学生学到的只是机械操作，而不能融会贯通，长此以往，将有碍于学生思维灵活性、创造性、简略性的发展(当然，这并不是解题程序的过错，而是照本宣科教学的弊端).

下面一个非常简单的例子曾引起我们深刻的反省.

例 3－1　解方程 $0.5x=10.5$.

(见九年义务教育教材初中《代数》第一册(上)P.28 例 2)

讲解　学生十有八九采用这样的解法：

解法 1　按照小学逆运算的道理，有

$$x=\frac{10.5}{0.5}=\frac{105}{5}=21.\ \square$$

解法 2　按照中学教材的解题步骤，"两边除以未知数的系数"，有

$$x=\frac{10.5}{0.5}=\cdots=21.\ \square$$

---

[1] 一个拘泥于程序的幽默是：半夜 11 点多，值班护士叫醒熟睡的病人起来吃安眠药.

也许这两个解法的原理都无可挑剔,但是当学生对这两个解法心安理得时,教师应感到照本宣科教学的弊端.为什么这些天真活泼的孩子竟都小老头般囿于刻板的套路,去进行复杂的小数除法呢?难道除以0.5不就是乘以2吗?不是孩子们笨,也不是“不该有程序”,而是我们的教学太死.实践表明,一旦教师点拨到:两边除以未知数系数的目的是什么?依据是什么?学生立即就能想到:

解法3 两边乘以2,有

$$x=10.5\times2=21.\ \square$$

这还是用到同一个“同解原理2”,但境界已经完全不一样.不仅如此,学生还能想到对方程

$$0.25x=10.5$$

两边乘以4;对方程

$$0.125x=10.5$$

两边乘以8.

这个例子给我们的启示是,“程序解法”的教学,从一开始就要抓:

(1) 讲清每一步骤的依据和目的;

(2) 注意对各个步骤间整体结构的分析;

(3) 揭示整个程序所蕴含的解题思想.

具体到一元一次方程的解法,我们可以看到,操作1和操作5源于同解原理2,操作3源于同解原理1,操作2、操作4是方程两边各自作恒等变形(分配律、结合律),这些操作全都能保持“同解性”,是等价变形.整个操作的实质是:在保持方程同解的条件下,通过方程变形把只含未知数的项、及只含已知数的项分别集中到方程的两边,并把未知数的系数变为1——求出未知数的值.

有了这点认识,学生在求解一元一次方程时就不仅能掌握“程序”,而且能够灵活变通,表现出简单但宝贵的创造性,比如

例3-2 解方程

$$x-\frac{1}{3}\left[x-\frac{1}{3}(x-9)\right]=\frac{1}{9}(x-9).$$

(九年义务教育教材初中《代数》第一册(上)P.244)

讲解 拘泥于程序就5个步骤都要经过,抓住实质则可“越轨”,既不去分母,也不去小括号,仅去中括号,有

$$x-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}(x-9)=\frac{1}{9}(x-9).$$

移项消去$\frac{1}{9}(x-9)$,得

$$\frac{2}{3}x=0.$$

得 $$x=0.\ \square$$

这里,对“$\frac{1}{9}(x-9)$整个移项”正是变换思想、整体处理的雏形,一个初中一年级的学生能够做到这一步,应该说是对数学有很好的领悟.

2. 求解一元二次方程有“公式法”,这就是一个程序

(1) 将所求解的方程化为标准方程

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq0).$$

(2) 找出系数,计算判别式

$$\Delta=b^2-4ac.$$

(3) 代入公式

$$x_{1,2}=\begin{cases}\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}, & \Delta\geqslant0\text{ 时};\\[2ex]\dfrac{-b\pm\sqrt{-\Delta}i}{2}, & \Delta<0\text{ 时}.\end{cases}$$

这个程序,将未知数直接表示为已知数的运算,融化归的思想、配方法的技巧和6种代数运算(加、减、乘、除、乘方、开方)于一体,是知识、方法、思想的优美结合.

3. 求最(极)值

在中学阶段,所求的最大(小)值,都是双重极值(既是最值又是

极值),由于没有公式解法,技巧性很强,常常因人而异、因题而异,学生就感到很难掌握.

学了微积分之后,新的知识丰富了解题思想,也壮大了解题力量,可以通过"导数"工具给出解题程序:

(1) 求 $f'(x)$;

(2) 解方程 $f'(x)=0$ 找出驻点;

(3) 列表确定极值(也可用二阶导数找出极值).

从没有程序到有程序,体现了思想对程序的指导意义.思想是程序的灵魂.

3-1-2 宏观解题程序

这类程序给出了很多、乃至所有习题的共同求解步骤,这些步骤虽然已经规范化了,也反映了成功解题的科学过程,但终因过程的随机因素过多而不能成为"万能公式".就是说,成功的解题必定执行了相应的程序,而执行了相应的程序还不能保证解题的成功(这就与微观解题程序有区别).波利亚的怎样解题表、弗里德曼的八步骤框图、唐以荣的"一导一式"及"二导一式"都属于宏观解题程序.§2-1-3中的几个解题表,也属于宏观解题程序.下面再介绍几个.

1. 笛卡尔模式及其推广

笛卡尔(1596—1650)是一个伟大的学者,他被许多人尊为现代哲学的奠基人,他的工作改变了数学的面貌,并且他在物理学史上也占有一定地位.他在《指导思维的法则》一书中,曾冥思苦想找一个能解所有问题的通用方法:

第一,将任何种类的问题化归为数学问题(数学化);

第二,将任何种类的数学问题化归为代数问题(代数化);

第三,将任何代数问题化归为单个方程的求解(计算化).

"你知道得越多,你在这个方案中所能看出的漏洞也就越多.想必不久笛卡尔就已经察觉到在有些情况下,他的方案是行不通的,至少他搁下了未完成的'法则',只在后来的(更为人所知的)著作《方法

论》里介绍了他的方案的片段."

"在笛卡尔方案的基本意图中,有些内容看起来是很正确的,但是要把这种意图付诸实施,其困难、障碍和错综复杂的情况远比笛卡尔最初热情想象的要多得多.虽然笛卡尔的方案失败了,但仍不失为一个了不起的方案,纵然失败,它对科学的影响也比那些偶然成功的许多微不足道的方案要大得多."

"虽然笛卡尔的方案不能用于所有场合;但是,它确实能用于许多场合,其中包括许多重要场合.当一个中学生用'列方程'的办法解'文字题'时,他就是沿用笛卡尔的方案;并且,他这么做时,就在为自己认真地应用这个基本思想作准备."[①]

笛卡尔模式不适用于所有习题,但却适用于"应用题"(或文字题)的很多场合,其基本思想正是如今在中学界流行的方程观点.当我们用"解三角形"来处理应用题时,也是类似的笛卡尔模式:

(1) 将实际问题转化为几何问题;

(2) 将几何问题转化为三角形问题;

(3) 解三角形.

将这种模式加以推广就是中学解应用题的宏观解题程序:

(1) 将一个实际问题转化为一个数学问题,进行数学化设计;

(2) 将一个数学问题化归为一个常规问题,进行标准化设计;

(3) 求解常规数学题.或是解方程,或是证明(求解)不等式,或是函数求极值,或是几何求值,几何论证等.

很多情况下,步骤之间没有明显的界线,是环环相扣、一气呵成.

例3-3　小王和小李既是同学又是邻居,在每一个月里,他们总是相约到一家小铺里去买若干次白糖,假设白糖的价格是变化的(不是常数),而他们的购买方式又不一样.小王每一次总是买1千克白糖,小李每一次只拿1元钱来买白糖,而不管买多少,试问这两种买糖的方式哪一种合算?

---

① 见参考文献[28]波利亚.数学的发现,第一卷,P.28.

讲解　第一,进行数学化设计

1. 先要弄清楚什么叫“合算”.单看谁买的糖多或单看谁花的钱少都不对,应当计算各人平均每千克糖花多少钱(单价),谁少谁合算,即价钱便宜的合算.

2. 这导致我们去计算“平均数”.但题目中没有可供使用的数据,因而需要引进有关数学记号.假设小王、小李相约买了 n 次白糖($n>1$),而各次白糖的单价分别为(元/千克):

$$a_1, a_2, \cdots, a_n.$$

其中 $a_i>0$ 且不恒等,$i=1,2,\cdots,n$.

小王每一次买 1 千克白糖,共花去 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 元,买得白糖 n 千克,平均每千克白糖的单价为

$$\alpha=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

小李每一次只用 1 元钱买白糖,共花去 n 元,买得白糖数分别为 $\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\cdots,\frac{1}{a_n}$ 千克,平均每千克白糖的价格为

$$\beta=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}.$$

问题转化为比较两个平均数 α,β 的大小.

第二,进行标准化设计

比较 α 与 β 的大小,这是一个探索性的问题,可以取一些特殊值试验($n=1,2,\cdots$),从而猜测

$$\alpha\geqslant\beta. \tag{1}$$

第三,证明不等式

证明不等式①是一个标准的数学问题,由

$$\alpha=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}>0,$$

$$\frac{1}{\beta}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant\sqrt[n]{\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}}>0,$$

相乘　　$\frac{\alpha}{\beta}\geqslant 1$,

即　　$\alpha\geqslant\beta$.

但 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不恒等,只能 $\alpha>\beta$.可见,$n>1$ 且价格变化时,小李比小王合算.

2.卢正勇的解题框图

福建师范大学卢正勇教授在"怎样提高解题能力"[1]一文中提出的解题程序为下述框图:

图 3-1

第一,理解题意

这一步的目的是弄清问题中的已知与所求,包括:

1.尽可能地作图或制表,以便借助直观启发思维.

2.把原来用文字叙述的问题,通过引进图形、字母、符号等,改

[1] 见福建中学数学,1982,2,P.1.

用数学语言或式子表达.

3. 把已知与所求的事项进行细分.

4. 可能时把已知与所求分别作初步等价变换,使问题的实质更加显露.

第二,分析

1. 简化

在理解题意时所作的初步等价变换,往往也就是把问题简化.有时还可以进一步加以简化,通常包括简单化、特殊化、具体化等.

2. 观察

把问题简化后,有时可通过观察而决定试用何种思路.

(1) 观察已知与所求,通过基础知识的联想,如能把已知与所求挂起钩来,就可试用顺推法.

(2) 与自然数有关的问题,可试用数学归纳法或递推法.

(3) 通过观察与联想,试用类比法探讨类似问题;或综合应用经验归纳法、降维法与类比法,对变量较多的问题先考虑变量较少的类似问题.

(4) 观察问题中的形式结构而试用换元法等.

(5) 猜测结果或结果的形式而试用待定系数法.

(6) 如果问题的解是由几个条件决定的,而每一条件都可确定某种元素的一个集合,则可试用交集法.

3. 试探

如果通过观察找不到合适的思路,或者试用的思路不能奏效,则可作如下的试探.

(1) 直接通过试验求解.

(2) 有些问题虽不能通过直接试探得解,但可考虑特例,尤其是极端情况,由此得到启发.

4. 反求

如果我们已把问题简化,也进行了观察和试探,仍未找到适当的思路,那末我们可以掉转方向来试试看.

（1）试用倒推法.

（2）试用反证法.

（3）从求证的等式左边不容易导出右边时，可尝试从右边导出左边.

5. 交并

（1）暂时放弃问题的一些条件，先在部分条件下求解，然后把放弃的条件加上再考虑. 这是交集思想的运用.

（2）把问题涉及的范围划分为几部分，逐一解决部分问题. 这是并集思想的运用.

第三，叙述

假如在“分析”这一步中，我们已经成功地找到思路，大体上确信从已知可以达到所求，那末接下去就可考虑如何综合叙述了（包括详细的演算、论证等）. 假如我们还找不到思路，那末应当再回到对题意的理解、重新探索思路.

第四，检验

检验所得的结果，不只是检验计算或推理是否正确，还必须注意：

（1）是否引用了所有题设？

（2）结果是否符合一般常识？是否合理？

（3）可否通得过一些考验？

（4）能否用不同方法得到结果？

经检验后如果通得过，解题过程就告终；如果通不过，或者局部发现问题加以修正，或者再回到对题意的理解而重新进行分析.

有关例子请见参考资料[37].

3.《数学思想方法》① 一书中的解题程序

（1）读题

当我们拿到题后，第一件要做的事就是读题，把题目一字不漏地读一遍，弄清题型，是填空题还是选择题，是判断题还是改错题，是详

---

① 见参考文献[10]解恩泽、徐本顺. 数学思想方法，P.214

答题还是简答题,是计算题、证明题,还是作图题…….还要注意读习题的要求,如选择题中是单项选择题还是多项选择题,计算题要求的准确度是什么?等等.总之,题目应一字不漏地读、弄清题型、要求、明白题意.这是解题的第一道程序——读题.

(2) 审题

数学习题,一般都是由已知条件和需求目标(结论)两部分组成的.因此读题的直接作用就是要从题目中找出已知条件和需求目标,储入大脑中.这是解题的第二道程序——审题.

(3) 分析

经过这两道程序,明确了题目的条件和目标,接下来的工作就是展开分析,寻求解法.分析从哪儿开始?要从问题的条件和要达到的目标开始.一般来说,分析包含以下这些内容:

1) 根据题目所给的条件与要寻求的结论,思考大致需要用到哪些知识、概念与数量关系;

2) 对题目的条件、结论进行剖析,通过联想、类比与变换,确定应用某种知识、概念与数量关系;

3) 综合应用逻辑思维与非逻辑思维的方法,寻求解题思路.

这就是解题的第三道程序——分析.

(4) 拟定解题计划

通过分析,我们找到了解题途径,接着就要考虑怎样实施解题,先做什么,后做什么,再做什么,需要分几步走完,整体上要有个计划.这就是解题的第四道程序——拟定解题计划.

(5) 实施解题计划

找到了解题方法,拟定了解题计划,接下来就是进行第五道程序——实施解题计划.按拟定的计划去进行推理、计算或作图,得出习题的答案,这是解题的成果.到了这一步,解题的成败就取决于推理的严密性,计算、作图的准确性.解题的每一步必须有充分的理论依据,前一步是后一步的依据,后一步是前一步的必然结果,保证每个解题步骤都是严密的、正确的.

(6) 检验

得出了答案，工作并不能算完，还应检验你的工作是否有疏忽，是否有遗漏或多余的步骤，答案是否正确，要检查每一步．在实施解题计划时要检验，答案得出后，回过头来还要检验，从多种角度、多种途径上检验，检验每一个细节，确保答案的正确性．这是解题的第六道程序——检验．

(7) 解后研究

与题目有联系的知识你是否都考虑到了．你过去解过的题是否与此题有相似的，是否可以利用？你能否利用不同知识，通过不同途径求得问题的解？通过对习题的再认识、再联想得到不同的解法，通过对比，找到更简捷合理的解题方法．

通过多途径、多角度的认识问题，在加深问题理解的基础上考虑一下，此习题的结论是否可以推广．还要考虑：此习题是否与你过去见过的习题有联系？此题的解法是否给你以启发？在很多情况下，往往通过与会解习题的联想、类比发现规律，给以启发，借用会解习题的结论或解题思路顺利地解出原来不会解的习题，或对原来习题给出更简捷合理的解法．这是解题的第七道程序——解法研究．

3－2　解题过程的思维分析

思维，是人脑对客观事物间接的、概括的反映．

上面介绍到的各种解题程序，环节有多有少，形式也有叙述、表格、框图等多种表现，但关键步骤都是相同的，并且都体现着一个共同的实质，即解题过程与思维相联系．解题程序就是解决问题的思维程序．

值得注意的是，数学解题的思维过程，既有直觉的成分又有逻辑的成分，两者互相补充又交叉进行．由于有直觉的成分，使得我们尽管可以从发现心理学的角度对这种思维活动的某些特征进行研究，但要其完全归入某种逻辑框架，给出万能的钥匙是不可能的．另一方

面，又由于数学解题过程中包含有逻辑的成分，我们又总可以总结出某些规则.

下面介绍几个人们对解题思维过程的看法.

3-2-1 解题思维过程的四阶段说

数学发现的思维过程是一个相当复杂的问题，每一个人有不同的思维方式，同一个人发现不同的数学命题也可能有完全不同的思维过程. 尤其困难的是，任何一篇数学论文，都只有发现的结果，没有发现的过程. 一般认为，心理学家沃勒斯于1926年提出的创造思维四阶段说：准备——孕育——明朗——证实，对于数学发现也是适合的.

1. 准备阶段　这是一个自觉的有意识的活动，它主要表现在把核心问题从偶然现象中分离出来；调查评价有关知识；进行分析、类比.

2. 孕育阶段　这是一个等待时期，可能会持续很长时间. 在这个时间内，人以现有的知识为基础展开积极有效的思维活动，向解题目标迈进. 通常要经过观察、试验、查阅资料、钻研相关问题等阶段，形成一种产生策略的心向，努力找出问题解决的钥匙.

3. 明朗阶段　明朗是在总体上对解题方针、方法产生一种本质上的领悟，是创造性思想出现并成为自觉意识的过程. 它常常表现为顿悟，这是潜意识和有意识之间的沟通. 在孕育和明朗阶段，非逻辑思维起着重要的作用.

4. 证实阶段　这是以现有知识为基础，运用逻辑思维的活动. 常表现为与公理化方法相联系的数学证明.

关于四阶段说，我国学者还提出了一些新的看法.

1. SGLY 循环理论.

认为创造过程是由实践(S)→归纳(G)→理想(L)→演绎(Y)作螺旋式上升的循环运动的过程(如图 3-2).

这里的理想阶段是最关键阶段，主要指创立模型和提出假设.

2. 定向——逼近——成型——引申.

定向期:即收集各种信息,决定创造方向和课题;逼近期:以最大的毅力和决心,集中精力,坚持不懈,调动一切才能,向既定的目标进行思维冲击,是创造思维最紧张、最关键的阶段;成型期:经过深思熟虑,常常会产生顿悟或灵感,新的观点、结论随之脱颖而出;引申期:经过验证和深化思维,使新的观点、结论更加系统、成熟.这4个阶段是相互渗透、相互影响和相互制约的.

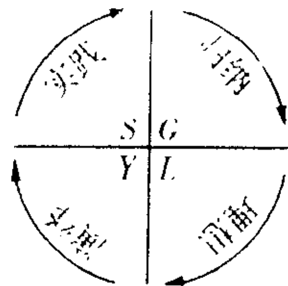


图3-2

以上说的是研究型问题的思维过程,它跟练习型问题有层次上和程度上的重大区别,但对于第一次遇到练习型问题的人来说,其数学解题过程与数学家的数学发现过程是相似的.因而,四阶段思维过程的揭示,对解题教学有重大的指导意义.

非欧几何的发现是一个典型的四阶段过程.

第一阶段　第五公设的试证

公元前300年,欧几里得的《几何原本》诞生了.它从23个定义、5个公设、5个公理出发,推出了465个命题.这就是人们所说的欧几里得几何.一千多年来,欧氏几何一直是惟一的几何学.

在这个几何体系里有一个第五公设:若一直线与两直线相交,且同侧所交两内角之和小于两直角,则两直线无限延长后必相交于该侧的一点.

几乎在《几何原本》诞生的同时,人们就开始了第五公设的试证工作,原因是,它看起来较其他公设、公理复杂,而且在《几何原本》里应用很迟,到第29个命题才第一次用到.

第五公设的试证工作沿着两个途径展开,一个是用更自明的命题来代替第五公设,另一个是试图从其他的几个公设、公理及前28个命题来证明第五公设.用现在的话来说,就是人们怀疑第五公设不是独立的.

欧几里得以后的一千多年间，几乎所有的大数学家都曾试证过第五公设，也有人宣布获得了证明.但仔细分析，不是中间有错误，就是默认了一个与第五公设等价的命题.如

命题1：过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行.

命题2：在同一平面内，一直线的垂线和斜线必相交.

命题3：过不共线的三点恒有一圆.

命题4：三角形的内角和等于两个直角.

命题5：存在两个相似而不全等的三角形.

命题6：勾股定理.

……

第二阶段　非欧几何的积累

试证的失败，引起了数学家的思考，到18世纪，人们改变了方向，假定第五公设不成立，往前推证，希望得出矛盾.确实，人们推出了上述各命题均不成立的许多命题.如三角形内角和小于两直角，且不是常数；矩形不存在；不存在相似而不全等的三角形.这些结论虽然"怪异"，但它们与否定第五公设并不矛盾，事实上这是另一种几何——非欧几何的定理.

第三阶段　非欧几何的诞生

正面证明没有成功，反面否定又得不出矛盾，这是对常识的挑战，它激起了现实世界可能具有非欧几里得性质的大胆思想.1826年2月23日，俄国数学家罗巴切夫斯基在喀山大学宣读了他的论文《几何学原理的扼要阐述暨平行线定理的一个严格证明》，宣告了第五公设是不能证明的(独立性)，否定第五公设的另一种几何是存在的(相容性).这一天，被认为是非欧几何的诞生日.

第四阶段　非欧几何的证实

但是罗巴切夫斯基几何并没有立即得到承认，相反还受到讽刺与嘲笑.直到他死后多年，非欧几何才得以证实和普遍承认，成为20世纪相对论产生的前奏和思想准备(继罗氏几何之后，另一种非欧几何——黎曼几何，则直接为广义相对论提供了有力的数学工具).

1868年(罗氏死后13年),意大利数学家柏尔特拉米发表论文《非欧几何的实际解释》,证明了罗氏平面几何的片段可实现于欧氏空间;1870年,德国数学家克莱因解决了罗氏几何全平面或全空间的实现问题.

这个问题从准备到证实,历经了近2千年.

3.2-2　解题思维过程的三层次说

心理学的研究表明,人们在创造性地解决问题的过程中,思维是按层次展开的.先粗后细,先宽后窄,先对问题作一个粗略的思考,然后逐步深入到实质与细节.K·邓克尔提出的范围渐趋缩小的汇综模式,把思维过程分为3个层次:一般性解决,功能性解决,特殊性解决.上面提到的笛卡尔模式体现了处理一大类问题的层次解决思想.而对于具体的一道数学题而言,三层次解决的含义为[1]:

1. 一般性解决　即在策略水平上的解决,以明确解题的大致范围或总体方向.这是对思考作定向调控.

2. 功能性解决　即在数学方法水平上的解决,以确定具有解决功能的解题手段.这是对解决作方法选择.

3. 特殊性解决　即在数学技能水平上的解决,以进一步缩小功能解决的途径,明确运算程序或推理步骤,这是对细节作实际完成.

在例1-8,例1-11中,我们见过这种思维方式.

例3-4　已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,$A$,$B$是椭圆上的两点,线段$AB$的垂直平分线与$x$轴相交于一点$P(x_0,0)$.证明

$$-\frac{a^2-b^2}{a}<x_0<\frac{a^2-b^2}{a}.$$

[1992年高考理科第(28)题]

讲解　这是1992年高考理科压轴题,得分率为0.27.当许多考

---

[1] 这里的叙述已加进了作者数学上的理解.

生感到时间紧迫而又题型陌生的时候,高手则迅速将其纳入业已掌握的理论体系.有的考生用函数的观点来看这道题,立即产生如鱼得水的感觉(图 3-3).

1. 一般性解决 x_0 是与 A,B 坐标有关的变量,结论是确定变量 x_0 的取值范围,相当于确定函数的值域,这就明确了解题的方向.从哲学的意义上说,题目已经解决了.

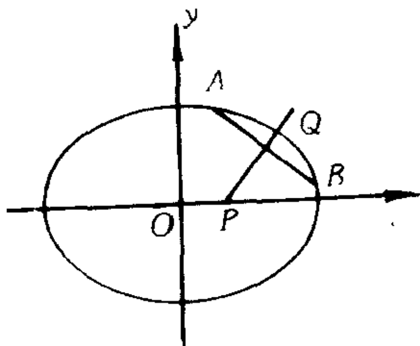


图 3-3

2. 功能性解决 为了确定函数的值域,需完成 3 件事:

(1) 求出变量 x_0 的表达式;

(2) 确定表达式中自变量的取值范围;

(3) 由以上两项具体推出求证式.

从方法的角度看,这个问题也解决了.

3. 特殊性解决 就是运用数学知识和数学技巧去完成上述 3 件事,而在具体完成每一件事时,可能还要重复展开三层次解决.

(1) 求出变量 x_0 的表达式

我们首先要去找出关于 x_0 与 A,B 坐标间的等量关系(一般性解决);为了找等量关系,需要检索建立等量关系的记忆储存并与题意沟通(参见§2-1-3 中列方程解应用题的解题表,P.62),挑选出适用的方法(功能性解决);具体应用方法得出 x_0 的表达式(特殊性解决).

我们采用垂直平分线所提供的等量关系.设 $A(a\cos\alpha,b\sin\alpha)$,$B(a\cos\beta,b\sin\beta)$,因为 $|PA|=|PB|$(这是一个等量关系),有

$$(a\cos\alpha-x_0)^2+(b\sin\alpha-0)^2=(a\cos\beta-x_0)^2+(b\sin\beta-0)^2,$$

即
$$2ax_0(\cos\alpha-\cos\beta)=(a^2-b^2)(\cos^2\alpha-\cos^2\beta).$$

但由 PQ 与 x 轴相交于一点知,$\cos\alpha-\cos\beta\neq0$,得

$$x_0=\frac{a^2-b^2}{2a}(\cos\alpha+\cos\beta).\qquad ①$$

这就是变量 x_0 的表达式.

(2) 确定 $\cos\alpha+\cos\beta$ 的取值范围

这时,又视 $t=\cos\alpha+\cos\beta$ 为变量(也是函数观点),如上所述 $\cos\alpha\neq\cos\beta$,所以

$$-2<\cos\alpha+\cos\beta<2.\qquad ②$$

这相当于确定了①中自变量的取值范围.

(3) 推出求证式

由上述①、②式有

$$x_0=\frac{a^2-b^2}{2a}t,\quad t\in(-2,2).$$

据正比例函数的单调性(还是函数观点),得

$$-\frac{a^2-b^2}{a}<x_0<\frac{a^2-b^2}{a}.\square$$

以上,用函数观点层层分析和解决问题,处处逢凶化吉.若记 $Q(x,y)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任一点,则

$$|PQ|^2=(x-x_0)^2+y^2=(x-x_0)^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),x\in[-a,a].$$

得二次函数

$$f(x)=\frac{a^2-b^2}{a^2}\left(x-\frac{a^2}{a^2-b^2}x_0\right)^2+b^2-\frac{b^2}{a^2-b^2}x_0^2.$$

且由 $|PA|=|PB|$,知 $f(x_A)=f(x_B)$,即 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上不单调,由二次函数最小值的惟一性知 $-a<\frac{a^2}{a^2-b^2}x_0<a$,变形即得所求.这种处理也是函数观点,并且非常直观.

3-2-3　解题思维过程的正方形性质图

在《数学的发现》第二卷第11章,波利亚对解题过程中思维活动的性质通过一个正方形表来论述(图3-4).

这张图表把9个词排在正方形里,1个在正方形的中心,4个在正方形的顶点上,其余4个则写在4条边上.

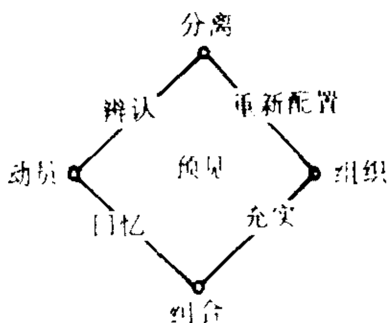


图3-4

1. 动员和组织

这是两个相辅相成的活动,表示在正方形的水平对角线的两端点上."动员"是从我们的记忆中把有关的条款抽出来,而"组织"则把这些条款有目的地联系起来.解题过程主要地就是由这两种活动组成的.

波利亚指出,我们对解题者的思维活动的了解是很肤浅的,它的复杂性可能是不好想象的.不过这种活动的一个结果却是十分明显的:随着解题者的前进,他收集的有关材料也就越来越多.

问题刚提出时,解题者只看到一幅简单的画面,一个未经剖析的、没有细节或只有很少细节的整体,譬如说,只看到未知量与已知量(结论与条件),它们像两个没有桥梁连接的小岛.但最后的画面就很不同了:它是复杂的,充满了添加上来的细节和材料,它们之间的联系是解题者最初很难想到的.在原来几乎是空旷的几何图形上,现在有了辅助线,有了辅助未知量,从解题者以往获得的知识中找来了一些材料,特别是那些能应用到这个问题上的定理.这些定理现在将发挥作用,这是解题者最初所不曾预见到的.

这些材料、辅助因素、定理等是从哪儿来的?是解题者搜罗来的,他要从记忆中把它们提取出来,并且有意识地把它们与问题联系起来.我们把这种收集称为"动员",而把这种联系称为"组织".

波利亚进一步作出这样的比喻:解一道题就像建造一所房子,我们必须选择合适的材料.但光是收集材料还不够,一堆砖头毕竟还不是房子.要构筑房子或构造解,我们还必须把收集到的各个部分组织在一起使它们成为一个有意义的整体.

2. 辨认与回忆

构成"动员"这个角的两条边标以"辨认"和"回忆".事实上,与问题有关的条款的"动员",往往是从"辨认"出某个已给的因素开始并且有赖于"回忆"起一些有关联的因素.

比如,当我们在考查问题过程中认出某些熟悉的三角形(或某些熟悉的代数组合)时,我们会显得特别高兴.因为我们熟悉关于三角形的几个定理而且也解过有关三角形的各种问题,它们当中有些是可以用到现在这个问题上的.通过认出一个三角形我们便使问题与以往获得的大量知识有了接触,这些知识的某些部分现在或许就能用上.因此,一般说来,"辨认"能引导我们"回忆"起某些有用的东西,并把有关知识"动员"起来.

3. 充实与重新配置

构成"组织"这个角的两条边标以"充实"和"重新配置".事实上,"组织"意味着"充实"这个问题的构思,依靠添加一些新的细节和填补空白,使它变得完满,同时也意味着重新调整问题的整个构思.

波利亚说,我们在图形中已认出了一个三角形,而且也成功地回忆起可能应用到目前这种情况的一条有关三角形的定理.不过,要想把这条定理实际用上,还必须在我们的三角形上引某些辅助线,譬如说一条高线.因此一般来说,这些动员起来的可望有用的因素,可以添加到问题的构思中来,使问题更加丰富充实,填补了它的空白与不足,一句话,就是"充实"了它.

"充实"可以使新材料进入我们问题的构思,这对整个问题的"组织"来说也是重要的一步.但是有时尽管没有引进什么新材料,只是把现有的因素"重新配置"一下,在新的关系下去考虑它们,我们也同样会在问题的"组织"中获得进展.通过"重新配置"问题的各个因素,我们改变了问题构思的"结构",得到一个比原来安排更好、更协调、更有希望的整体.这就是"重新配置".

4. 分离与组合

这是两个相辅相成的活动,表示在正方形的铅直对角线的两端点上."分离"是从整体里把特殊的细节挑出来,"组合"则是把零散的

细节重新集合成一个有意义的整体.

波利亚指出,当我们去考查一个复杂的问题时,我们的注意力可能时而被这个细节吸引,时而又被另一个细节吸引.我们集中注意某一个细节,把焦点放在它上面,去着重考虑它,把它特别挑出来,即把它从周围的事物里区分出来,一句话,我们把它分离出来了.以后我们的注意力又转到另一个细节上,又把另一个细节分离出来,就这样继续下去.

在考查完了各种细节并对它们中的某些重新予以评价之后,我们就会感到有必要重新把这些情况联成一个整体去看.事实上,在重新评价某些细节之后,整体的面貌可能会起变化.这些重新评价过的细节再结合起来,其结果便会出现一个所有细节显得更加和谐的组合体,一幅崭新的整体的画面(在例 2-16 的另证中见到过).

"分离"与"组合"就是这样相辅相成地推动着解的进程."分离"把整体分成若干个细部,随之而来的"组合"则把这些细部重新集合为一个多少有些不同的整体.分解,重新结合,再分解,再重新结合,我们对问题的了解可能就是这样朝着一个更有希望的前景演化着.

5. 预见

"预见"是我们解题活动的中心,故其对应的点位于正方形的中心.我们的所有活动,动员和组织各种各样的因素,分离和重新组合它们,辨认和回忆它们,重新配置和充实我们对这个问题的构思等,这一切都是为了想预测到解、或解的某些特征,或某一条通向它的小路.如果这种预见突然闪现在我们面前,我们就把它称为有启发的想法或灵感,我们整个活动的中心愿望就是想要得到这样一个想法.

6. 工作的进程

(1) 当我们沿着正方形的边从左到右读这些词时,我们就从动员起来的细节达到了组织起来的整体.一个刚刚辨认清楚的细节,经过仔细分离和集中处理,可能会导致整个构思的重新配置.同样把一个回忆起来的适合某一组合的细节恰当地加进我们的构思,必将充实整个整体.

(2) 当我们把正方形概括的思维活动应用到特殊的对象上时，它会采取特殊的形式. 例如，对应于正方形的4条边，我们可以列出在解数学问题中特别重要的4种思维活动：

辨认：利用定义；

重新配置：改变问题的形式；

回忆：已知的定理和问题；

充实：引进辅助因素.

(3) 如果我们问题的构思已变得很匀称，很有条理，所有的细节都已齐全，而且都是熟悉的，这时我们就可以满意了. 如果在你的和谐的整体里有清晰明了的细节，那么解的想法一定就在眼前了！

当我们感到不再需要重新配置时，就说明我们对问题的构思看上去已经很匀称了，而当我们很容易地就能把全部细节都回忆起来时(任何一个细节都可以很容易地勾起其他的细节)，这表示我们的构思看上去是有条理的了. 当不再需要什么补充时，我们的构思看上去就是完全的了，如果所有的细节都已辨认出来，那就表示它看上去已是熟悉的了. 细节的清晰来自前面的分离与集中处理，而整个构思的和谐则是成功地组合了所有细节的结果. 我们之所以说想法就在我们的眼前，是因为我们感到事情在顺利地朝着更充实的预见前进.

上述工作进程的标志，可以系统地归纳成一张表，它们的相互位置与正方形中那些对应词的安排相同. 表中一共有7个词，其中4个是正方形4条边上的词，另外3个在它的铅直对角线上.

	成功地分离： 清晰的细节	
充分地辨认： 熟悉的		成功地重新配置： 匀称的
	有希望的预见： 想法即在眼前	
充分地回忆： 有条理的		成功地充实： 完全的
	成功地组合： 和谐的整体	

例3-5 设 $p\neq0$,实系数一元二次方程 $z^2-2pz+q=0$ 有两个虚数根 z_1,z_2,再设 z_1,z_2 在复平面的对应点是 Z_1,Z_2,求以 Z_1,Z_2 为焦点且经过原点的椭圆的长轴的长.

[1984年数学高考理科题]

讲解 为了求椭圆的长轴 $2a$,经过"回忆",我们收集到出现 a 的各种表达式:

(1) $|MF_1|+|MF_2|=2a$;

(2) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$;

(3) $a=\sqrt{b^2+c^2}$;

(4) $e=\frac{c}{a}$;

(5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

……

这些信息"动员"出来,哪一条更适用呢?还需要与已知条件相比较,加以"辨认",作出选择.

因为题目的条件是以复数形式给出的,加以"分离"我们可以找出二次方程的两个虚根

$$z_{1,2}=p\pm\sqrt{q-p^2}\,i \qquad (0<p^2<q).$$

这就确定了椭圆的焦点.又因为椭圆过原点,因而将这些材料加以"组织",有

$$\begin{aligned}2a&=|0-z_1|+|0-z_2|\\&=|z_1|+|z_2|\\&=2|z_1|\\&=2|p\pm\sqrt{q-p^2}\,i|\\&=2\sqrt{q}.\end{aligned}$$

经过"重新配置"可以发现,不解出 $z_{1,2}$ 也是可以求 $2a$ 的,因为 z_1 与 z_2 共轭,有

$$|z_1| = \sqrt{z_1\bar{z}_1} = \sqrt{z_1z_2} = \sqrt{q}.$$

也就是说,韦达定理代替了求根公式,于是,有下面的解法.

解[1] 由实系数一元二次方程的性质知

$$z_2 = \bar{z}_1 \neq 0,\ |z_2| = |z_1|,\quad q = z_1z_2 > 0.$$

根据椭圆的定义,原点到两焦点距离之和为 $2a$,有

$$\begin{aligned} 2a &= |0 - z_1| + |0 - z_2| \\ &= |z_1| + |z_2| \\ &= 2|z_1| \\ &= 2\sqrt{z_1\bar{z}_1} \\ &= 2\sqrt{z_1z_2} \\ &= 2\sqrt{q}. \ \square \end{aligned}$$

例 3-6 设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项分别为 $a_n = 2^n$, $b_n = 3n + 2$. 它们的公共项由小到大排成数列 $\{c_n\}$. 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项之和.

讲解 先"动员",收集 $\{a_n\}$ 的前 n 项:

2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024,2048,⋯

凡属 $\{b_n\}$ 的项,以 3 去除必余 2,由此可"辨认"出属于 $\{c_n\}$ 的项(划横线)

2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024,2048,⋯

把经过"辨认"的数从 $\{a_n\}$ 中"分离"出来,组成数列

8,32,128,512,2048,⋯

观察这个结果,$\{a_n\}$ 从第三项开始,其奇数次项为 c_n,即 c_n 是公比为 4 的等比数列:

$$c_n = a_{2n+1}\ (n \geqslant 1).$$

下面,把上述情况加以"充实",可"组合"为一个完整的解法.

---

1 罗增儒. 评 1984 年高考理科试题的分量. 中学数学教学参考, 1984, 5, P.42.

解 由已知条件有

$$c_1=2^3=3\times 2+2.$$

现设 $a_m=b_k=c_n$,

则 $a_m\equiv 2(\mathrm{mod}3)$,

从而 $a_{m+1}\equiv 2a_m\equiv 4\equiv 1(\mathrm{mod}3)$,

$a_{m+2}\equiv 4a_m\equiv 8\equiv 2(\mathrm{mod}3)$,

故 $c_{n+1}=a_{m+2}-4a_m=4c_n$.

于是,$\{c_n\}$是公比为 4 的等比数列,其前 n 项和为

$$S_n=\frac{c_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{8\times(4^n-1)}{4-1}=\frac{1}{3}(2^{2n+3}-8).\square$$

3-3 解题过程的结构分析

就是分析解题过程中的知识结构与逻辑关系,弄清用到了哪些知识(或方法),先用哪些、后用哪些,哪个与哪个作了配合,最后组成一个怎样的逻辑结构.学会对解题过程作结构分析,是提高解题能力的有效途径.先看一个简单的例子.

例 3-7 如图 3-5,直线 AB 与 CD 被直线 EF 所截,有$\angle 1=\angle 2$,求证 $AB/\!/CD$.
[九年义务教育教材初中《几何》第一册 P.94]

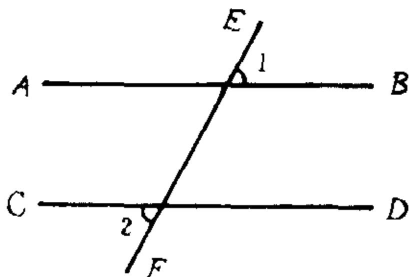


图 3-5

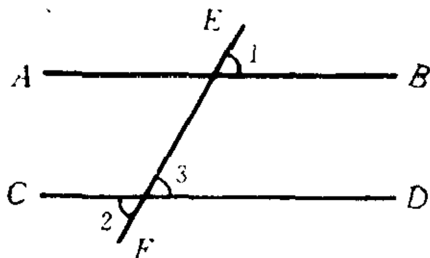


图 3-6

讲解　不难给出如下的证明：如图 3－6，有

$$\left.\begin{array}{l}\angle 1=\angle 2\\ \angle 2=\angle 3\end{array}\right\}\Rightarrow\angle 1=\angle 3\Rightarrow AB\parallel CD.\ \square$$

但是，这个证明只是“书写”，还不是解题过程.让我们来暴露思维的过程.

本题是由数量关系去确定位置关系，由数量上的角度相等，去确定位置上的两线平行.思维就从这两个地方开展活动，由角度相等能推出什么结论？证明两线平行需要什么条件？

1. 首先从理解题意中捕捉有用的信息.也就是从题目的两个基本构成去充分理解已知条件：

（1）从题目的文字叙述中获取“符号信息”.

$$\angle 1=\angle 2. \quad ①$$

（2）从题目的图形中获取“形象信息”

$\angle 1$ 与 $\angle 3$ 为同位角，　②

$\angle 2$ 与 $\angle 3$ 为对顶角，　③

等等.值得注意的是，$\angle 3$ 以及 $\angle 3$ 与 $\angle 1$、$\angle 2$ 的关系不是题目叙述直接告诉我们的，而是我们通过图形间接感知到的，在图 3－5 中有 8 个角，哪个角对本题的求解是有用的，我们事先并不清楚，解题的重大进展就在于理解题意时捕捉到 $\angle 3$，通过 $\angle 3$ 沟通已知与未知的联系，所以，图 3－5 与图 3－6 有重大的区别！

从图形中提取、过滤出形象信息是平面几何的基本功，有时候，难就难在怎样提取，妙就妙在恰当过滤.

2. 从记忆储存中提取有关的信息，以作为解题继续进展的依据：

（1）对顶角相等，　④

（2）等于第三个量的两个量相等，　⑤

（3）同位角相等则两线平行，　⑥

等.这些信息的选择与提取，是与“从题意中捕捉有用信息”相关进行的，中间还经过了尝试与失败.

3. 把这两方面的信息(共6条)进行有效的组合,使之成为一个和谐的逻辑结构:

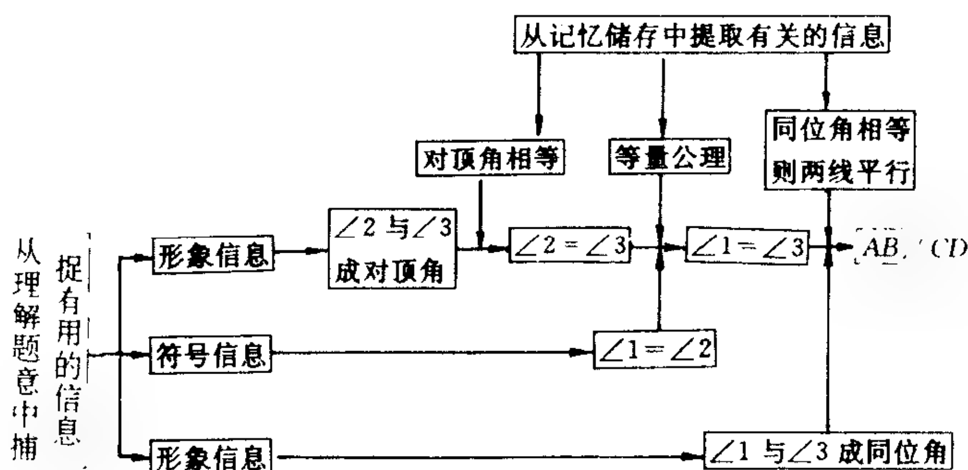


图3-7

这就是我们解这道题的平面结构图,包括有用捕捉、有关提取、有效组合三部分.把它的逻辑骨架抽出来,就是"证明"的书写.我们强调,自觉地、坚持不懈地进行这样的结构分析,将有效提高我们理解题意的能力,将综合提高我们运用知识、调动方法的能力.(参见§4-1-3,P.149)

例3-8 某工厂计划生产轴承26500套,前5天平均生产2180套,后来改进了操作方法,平均每天多生产420套.试问完成任务共需几天?

讲解 欲求出完成任务的总天数,只需求出改进工艺后用了几天,再加上前面的5天.但欲求出改进后用的天数,又需求出5天后还剩多少套轴承,及改进工艺后每天的产量.

(1) 5天后尚剩轴承:$26500-2180\times5=15600$(套).

(2) 改进后每天的产量:$2180+420=2600$(套/天).

(3) 还需天数:$15600\div2600=6$(天).

(4) 总天数:$5+6=11$(天).

解题的逻辑结构为图3-8.

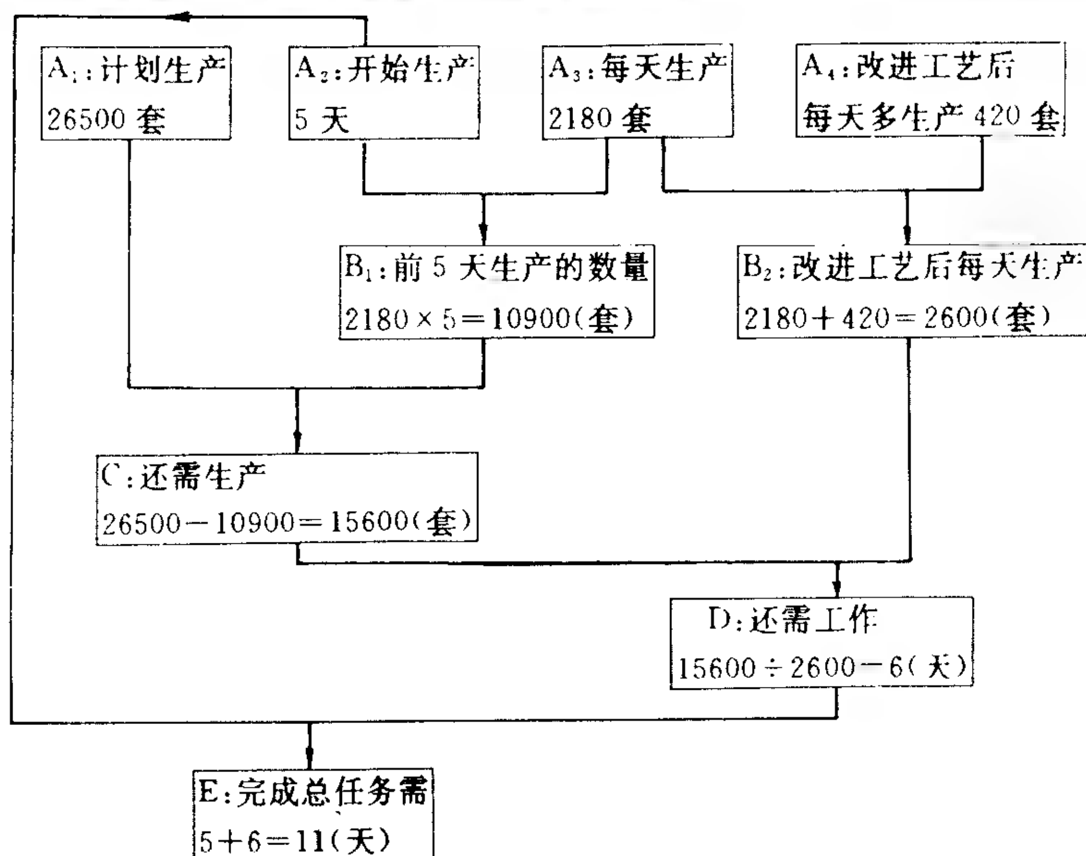


图 3－8

把其中的思路网络抽出来可得推理树为图 3－9.

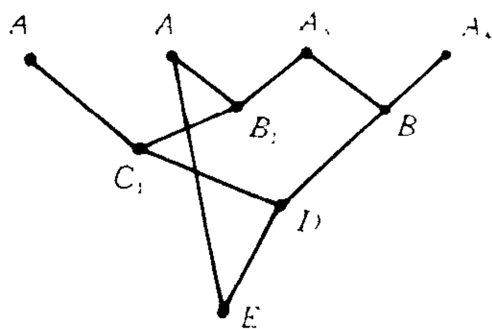


图 3－9

直观上看,这个逻辑推理树中的已知条件(A_i)犹如各个树枝的顶端,结论犹如主干.从条件推向结论时,好比将各个分枝逐渐合并,即将各个局部因素组成一个整体,类似于逻辑中的综合;反过来从结论开始逆求时,犹如循树干向上,树杈越来越多,即将整体分解为局部,类似于逻辑中的分析.推理树的产生过程就是一个不断"综合—分析"的寻找过程,一旦题目解出,推理树也就畅通.但是解题有难有易,因而根据推理树的推理步数,中间结点的个数等,可以定量描述解题过程的内容难度(不同于描述得分率或通过率的统计难度,参见下节).同时,分析推理树,删去多余思维回路,合并中间环节,有助于找出更

优美的解法(§参见例3-9).

原则上说,每一题都可以画出如图3-7,图3-8那样的逻辑结构图,但比较复杂.随着解题能力的提高,对于解题环节较多的题目,这种结构图可以简化,即只抽象出核心的逻辑框架来.图3-9那样的推理树就是一种简化形式.

例3-9 分析第二章例2-6的解题过程,给出改进解法.

讲解 原解法的逻辑思路是:

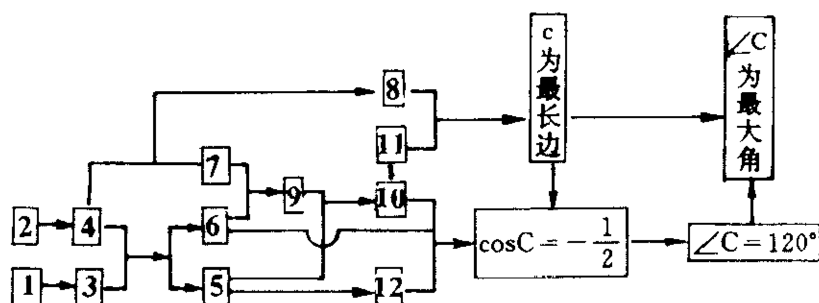


图3-10

(1) 由图可见,"C角最大"不能推出"∠C = 120°".在解题分析中,"C角最大"对计算∠C有定向作用(不去计算∠A,∠B),这在思路未通之前是很有价值的,但是,作为解题后的回顾,"∠C最大"的判断就成了多余的思维回路,因为计算出"∠C = 120°"本身已兼有判断出"∠C最大"的功能.因而,那些仅为推出"∠C最大"的中间环节,如8,11等均可删去.

(2) 改进解法.从目标出发,考虑

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

只须将b,c表示为a的函数,代入即可求出.

由已知有 $2b+2c=a^2-a$, ①

$2c-2b=a+3.$ ②

解得
$$b=\frac{a^2-2a-3}{4},\tag{3}$$

$$c=\frac{a^2+3}{4}.\tag{4}$$

代入余弦定理,有

$$\cos C=\frac{a^2+\left(\frac{a^2-2a-3}{4}\right)^2-\left(\frac{a^2+3}{4}\right)^2}{2a\cdot\frac{a^2-2a-3}{4}}\tag{5}$$

$$=\frac{a^2-\frac{(a^2-a)(a+3)}{4}}{\frac{a(a^2-2a-3)}{2}}\tag{6}$$

$$=\frac{4a-(a^2+2a-3)}{2(a^2-2a-3)}=-\frac{1}{2}.\tag{7}$$

又因为三角形的内角和为180°,所以$\angle C$为所求的最大角. □

(3) 这个解法删去了一些步骤,但解出b,c又消去,这仍有多余思维回路,式④、⑤都是可以删去的. 由

$$\cos C=\frac{a^2+(b+c)(b-c)}{2ab},\tag{8}$$

把①、②、③代入,即可得⑥. 这又激励我们去作进一步的思考. 把已知两式分拆为①、②、③后,又在⑧中进行组合,这种"先分拆后组合"的回路是必要的还是多余的呢? 注意这时"结论也是已知信息",

有
$$\cos C=-\frac{1}{2},$$

等价于
$$c^2=a^2+b^2+ab.\tag{9}$$

这启发我们,若能由已知两式得出⑨,则①、②、③的分拆就是多余的了. 对比已知两式与⑨之间的目标差可以看到:

1) 应对已知两式中的b,c升次,但保留a^2不升次;

2) 应将已知两个式子合并成一个式子.

据此,我们得出下面的解法.

(4) 更简解法. 由已知有

$$\begin{cases}(a+2b)+2c=a^2,\\(a+2b)-2c=-3.\end{cases}$$

相乘 $$a^2+b^2-c^2=-ab<0,$$ ①

即 $$-\frac{1}{2}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\cos C.$$

得三角形的最大角为$\angle C=120°$. □

由本例的分析可以看到,不断进行解题过程的分析,不仅能找到较优题解,而且能学会怎样解题. 这方面的分析后面(特别是第四章)还有更多的例子. 如例3-11,例4-9,例4-18,及§4-2-3各例,例6-58,例6-59等. 习题四中还有一批供训练的题目.

3-4 解题过程的长度分析

解题长度是描述解题过程的一个概念,对它的研究,特别是定量研究还有待深入.

1. 解题长度的概念

用L表示一个题目的解题长度. 如果这个题目可以用微观解题程序来求解,则其解题长度称为单位长度,用L_0来表示,这个程序解法亦称为标准解法.

(1) $L\sim L_0$. 表示题目的解法与标准解法差不多. 我们称L所对应的解法为常规解法.

(2) $L\to\infty$. 表示题目还没有解出来. 当$L\to+\infty$时表示题目还没有找到解法;当$L\to-\infty$时表示所写的解法是错误的.

(3) $L<L_0$. 表示题目的解法比标准解法过程简单、结构优美,付出的解题力量小于标准解法的解题力量,包含着解题智慧.

① 由$a^2+b^2-c^2<0$知$\angle C$为钝角,从而有$\angle C$为最大角. 可以说这种解法也是"先判断,后求解".

(4) $L > L_0$. 表示题目的解法比标准解法麻烦,付出的解题力量大于标准解法的解题力量,包含着解题笨拙[1].

这里说的解题力量是指解题的物质基础,包括数学知识与数学方法.

例 3-10 若$(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$,求证 x,y,z 成等差数列.

[1979 年数学高考理科题]

证明 1 $0=[-(x-y)-(y-z)]^2-4(x-y)(y-z)$

$$=(x-y)^2-2(x-y)(y-z)+(y-z)^2$$

$$=[(x-y)-(y-z)]^2,$$

得
$$(x-y)-(y-z)=0,$$

即
$$y-x=z-y.$$

按定义,x,y,z 成等差数列. □

证明 2 将已知式视为 y 的二次方程,有

$$4y^2-4(x+z)y+(x+z)^2=0,$$

用配方法或求根公式,均可解出

$$y=\frac{x+z}{2},$$

有
$$z-y=y-x.$$

按定义,x,y,z 成等差数列. □

证明 3 当 $x-y=0$ 时,有 $x=y=z$,结论显然成立.

当 $x-y\neq0$ 时,作关于 t 的二次方程

$$(x-y)t^2+(z-x)t+(y-z)=0,$$

有
$$\Delta=(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0,$$

从而两根相等,$t_1=t_2$.

又由方程的系数和等于零知,方程有一个根为 1,从而 $t_1=t_2=$

---

[1] 解题笨拙是与解题智慧相对照的一个词.用了多余的知识,走了多余的思维回路,人为拉长了解题长度,都表现为解题笨拙.

1,据韦达定理,有

$$1=t_1t_2=\frac{y-z}{x-y},$$

得 $$y-x=z-y.$$

按定义,x,y,z 成等差数列. □

证明 4 已知条件表明,以 $x-y,y-z$ 为根的二次方程(关于未知数 t)

$$[t-(x-y)][t-(y-z)]=0$$

$$\Leftrightarrow t^2+(z-x)t+(x-y)(y-z)=0.$$

有 $$\Delta=(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0,$$

从而两根相等

$$x-y=y-z.$$

按定义,x,y,z 成等差数列. □

证明 5 将已知化为比例并作等比

$$\frac{z-x}{2(x-y)}=\frac{2(y-z)}{z-x} \quad ①$$

$$\overset{\text{等比}}{=}\frac{2y-z-x}{-2y+z+x}=-1, \quad ②$$

得 $$z-x=-2(x-y), \quad ③$$

即 $$z-y=y-x. \quad ④$$

按定义,x,y,z 成等差数列. □

评析 这 5 个解法[①]的解题长度分别记为 L_1,L_2,L_3,L_4,L_5. 其中的 L_1 是从已知等式出发,经过恒等变形得出结论,属常规解法,有

$$L_1\sim L_0.$$

解法 2 虽然加进了方程的观点,但基本上还是等式的变形,运算量与 L_1 差不多,仍有

$$L_2\sim L_0.$$

---

① 本题有不下 10 个解法,此处仅为了说明解题长度选用 5 个.

解法 3 也用方程观点处理，但牵涉到情况讨论，思维较为复杂；还运用了二次方程的判别式、求根、韦达定理等多项知识，所用的解题力量较大，特别是与 L_4 相比，存在着明显的解题笨拙，有

$$L_3 > L_0.$$

解法 4 构造了一个与 L_3 不同的二次方程，免去了讨论，简化了过程，与 L_1 相比，既有新颖性又有简捷性和美，存在着明显的解题智慧，有

$$L_4 < L_0.$$

解法 5 貌似作出了证明，但几乎每一步推理都是错的（只有③→④没有问题）. 首先把已知等式化为比例要有分母不为零的条件，所以式①是有缺陷的，幸好这一缺陷还可以通过讨论（分三种情况）来解决. 其次由①推②用等比定理也需要分母不为零的条件

$$-2y + z + x \neq 0. \tag{5}$$

没有讨论这一点，式②不成立，但讨论又是办不到的，因为式③与⑤直接矛盾，所以，式②的毛病是无法补救的. 并且由于式③与式⑤直接矛盾，由式②推式③也成了问题. 这个充满知识错误和逻辑矛盾的证法，当然是还未完成解题，有

$$L_5 \to -\infty.$$

2. 解题长度的分析

首先给出一个表意公式：

$$\text{解题长度} = K \cdot \frac{\text{解题难度}}{\text{解题智慧}}. \tag{1}$$

其中 $K>0$ 是使得公式中各量可以相互换算的系数. 这个公式的含义是，题目越难则解题过程越繁，而解题智慧越多则解题过程越简.

这个公式告诉我们，优化解题过程应从两方面去做工作：降低解题难度，增大解题智慧.

(1) 关于降低解题难度

题目的难度有两种，一种是内容难度，一种是统计难度. 内容难度在教育目标确定之后，是客观存在的，由题目所涉及的知识面，知

识点所属于的水平层次，解题的推理步骤、灵活性、综合性等来整体评定，与解题者的水平无关．而题目的统计难度则取决于解题者（被试）的水平，是指试题在确定的被试对象上表现出来的难度值，可以用统计方法得到：

$$P=\frac{\overline{X}}{X}. \qquad (2)$$

其中 P 为统计难度，X 为试题的分值，$\overline{X}$ 是被试的平均分．

我们这里考虑的是内容难度，它是客观存在的，我们怎样才能面对客观存在的困难而降低其解决的难度呢？关键是增强解题的物质基础——解题力量．这就启示我们要加强基础理论的学习，努力掌握更多、更系统的知识与方法．同样一块石头，小孩推不动，大人一推就动了，原因是力量不一样．同是一道二次方程，初中生解不了，大学生却易如反掌，因为大学生掌握了较多的数学知识和较先进的数学方法，解题力量比初中生大．提高解题力量是降低解题难度的积极措施．

“习题效应”也能降低解题难度，做一个曾经做过（或与做过的题很类似）的题目，比第一次做这个题目要容易得多．解题教学中的考试目的（§1－2－2）和高考辅导中的题海战术，之所以有市场，就是因为习题效应的确能降低解题难度．但是，这种“大海捞针”、或“瞎猫碰死耗子”式的应试策略所付出的代价太大了，收效也太低了．根本的出路还是增强解题力量．

降低解题难度的另一种积极措施是增大解题智慧．在例 3－10 的 L_4 中，由于机智地构造了一个方程，使得结论与条件之间成为显然的定理验证，同样，例 3－9 的更简解法，也是解题智慧降低了解题难度．

（2）关于增大解题智慧

解题智慧是指准确地认识问题和创造性地解决问题的能力．比如，细致的观察、良好的记忆、丰富的联想、准确的判断、深刻的洞察、精明的谋略等，都是解题智慧的表现．核心是抽象思维能力．

解题智慧与解题过程的关系，首先是，解题智慧不是天生的，它来源于解题实践，并且以解题力量为自己生存与发展的物质基础. 其次，智慧作为大脑中意识的作用，如果不通过行为表现出来就还不是智慧，因此，解题智慧是在解题过程中存在并发生作用的. 最后，解题智慧对解题过程有积极的影响.

由表意公式①可以看到，解题智慧能直接影响解题长度，并且还能弥补解题力量的不足而影响解题过程.

对于一道给定的题目来说，其难度是客观存在的，所投入的解题力量越大，所需的解题智慧就越小；反之，若解题具备的力量越小，则需要付出的解题智慧就越大. 特别有现实意义的是，当题目的难度较大，而解题力量又较小时，解题智慧具有决定性的作用，它可以"精神化物质"，弥补解题力量的不足，完成解题，这就是智慧的价值. 因此，我们的解题教学一定要注重解题智慧的开发.

例 3－11　方程$\frac{1+3^{-x}}{1+3^{x}}=3$的解是______.
［1992 年数学高考理科第(19)题］

解　(见习题二第 11 题)去分母，得

$$1+3^{-x}=3+3\cdot 3^{x},$$

即

$$3\cdot 3^{x}+2-3^{-x}=0. \qquad ①$$

两边乘以 3^x，得关于 3^x 的二次方程

$$3\cdot(3^{x})^{2}+2\cdot(3^{x})-1=0. \qquad ②$$

分解

$$(3\cdot 3^{x}-1)(3^{x}+1)=0,$$

但 $3^x+1\neq 0$，只有

$$3\cdot 3^{x}-1=0, \qquad ③$$

即

$$3^{x}=3^{-1},$$

得

$$x=-1. \ \square$$

评析　这是一个常规解法，其解题长度为 L_0. 将其求解过程进行整体分解可以得出 3 个步骤：

1）处理分母，将原方程化为①式；

2）处理负指数，将原方程化为二次方程②；

3）求解二次方程及简单指数方程③.

这3步当中，起转化作用的是前面的“两个处理”，而最能产生实质性进展的是第2)步，问题一旦化为二次方程，就是一个有公式求解的标准问题了. 并且两个“处理”并没有逻辑上的顺序关系，“两边乘以3^x”对于是否去分母都是可以施行的，抓住这一实质步骤，交换两个步骤的顺序，直接对原式处理负指数. 有

另解1 两边乘以3^x，有

$$\frac{3^x(1+3^{-x})}{1+3^x}=3\cdot 3^x.$$

即 $$1=3^{x+1},$$

有 $$x+1=0,$$

得 $$x=-1. \square$$

评析 这一解法(长度记为L_1)抓住了原解法的实质步骤，省去了“去分母”与“化成二次方程并求解”两个操作，直接得出最简指数方程，从而开发出解题智慧. $L_1<L_0$.

再分析这一解法的关键步骤可以看到，它的实质是揭示了题目分子、分母间有公共的式子，可以相约. 保持这个效果，可以变乘入3^x为提取3^{-x}.

从纯数学的角度来看，[另解1]向我们揭示了一条信息：

$$1=3^x\cdot 3^{-x},$$

从而原方程的左边为①

$$\frac{1+3^{-x}}{1+3^x}=\frac{3^{-x}(3^x+1)}{1+3^x}=3^{-x},$$

或 $$\frac{1+3^{-x}}{1+3^x}=\frac{1+3^{-x}}{3^x(3^{-x}+1)}=\frac{1}{3^x}.$$

---

① 作换元$y=3^{-x}$代入可得到同样的效果. 由这些解法可知，把3可推广为a，即解方程$\frac{1-a^{-x}}{1+a^x}=a$.

另解 2 原方程即

$$\frac{3^{-x}(3^x+1)}{1+3^x}=3, \tag{4}$$

有
$$3^{-x}=3, \tag{5}$$

得
$$x=-1. \square$$

这可以在 30 秒内心算完成.

评析 记这一解法的长度为 L_2,则

$$L_2<L_1<L_0.$$

解题智慧得到进一步的开发.[另解 2]还使我们看透了题目的本质,只不过是由简单指数方程⑤,作了一个乘以$\frac{3^x+1}{1+3^x}=1$的变形.是的,我们一开始不能"一眼看到底",但我们可以从常规解法的分析中,逐步认识题目的实质并开发出解题智慧来.

例 3-12 设凸 $n(n\geqslant4)$边形的对角线中没有 3 条相交于同一点,这些对角线在 n 边形内的交点有多少个?

[1963 年北京市数学竞赛题]

解法 1 (直接计算)设计一个计算程序如下:

(1) 考虑从某一点 A 引出的对角线 AB(图 3-11),则其余 $n-2$个点分布在 AB 的两侧,设一侧有 k 个点,则另一侧有 $n-2-k$ 个点.由于与对角线 AB 相交的对角线 CD 的两个顶点必分别在 AB 的两侧,故与 AB 相交的对角线有 $k(n-2-k)$ 条.又由于没有 3 条对角线共点,故 AB 上共有

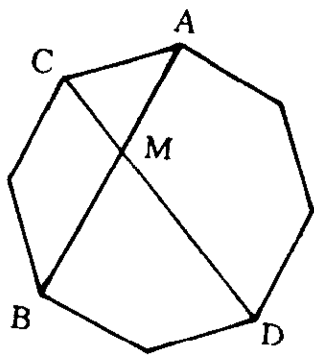


图 3-11

$$k(n-2-k) \tag{1}$$

个交点.

(2) 因为从 A 出发可引 $n-3$ 条对角线,对①令 $k=1,2,\cdots,$

$n-3$可得由 A 引出的对角线上的交点为

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n-3}k(n-2-k)\\&=(n-2)\sum_{k=1}^{n-3}k-\sum_{k=1}^{n-3}k^2\\&=\frac{(n-2)^2(n-3)}{2}-\frac{(n-2)(n-3)(2n-5)}{6}\\&=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}\\&=C_{n-1}^3(\text{个}).\end{aligned}\qquad ②$$

(3) 让 A 取遍 n 个顶点,可得交点

$$nC_{n-1}^3(\text{个}).\qquad ③$$

(4) 但上式中每一个交点 M 分别对 A,B,C,D 这 4 个顶点各计算了一次,故凸 n 边形中对角线的交点数为

$$\frac{n}{4}C_{n-1}^3=C_n^4(\text{个}).\ \square\qquad ④$$

评析 这个解法从分析题目的几何结构入手,设计了一个条理清楚的计算程序,先算一条对角线 AB 上的交点,然后让一个端点动(B 取 $n-3$ 个位置),再让另一个端点动(A 取遍 n 个位置),最后得出的结果也是正确的.可以认为

$$L\sim L_0.$$

但这个解法对思维能力和计算能力的要求都相当高,若解题力量稍微弱一点,就有可能算不出②式(只保留了$\sum\limits_{k=1}^{n-3}k(n-2-k)$),或得不出④式(比如误将③式视为结论),导致

$$L\to-\infty.$$

然而,运用解题智慧不仅能缩短解题长度,节约解题力量,而且万无一失.请看

解法 2 (间接计算)我们来揭示一个对应.

凸 n 边形上的任意 4 个顶点 A,B,C,D 决定了两条在形内相交的对角线(其余的对角线即使延长相交其交点也不在形内),这两

条对角线决定了一个交点 M(如图 3-11). 反之每一个交点 M 决定了两条对角线,从而对应着凸 n 边形上的 4 个顶点 A,B,C,D. 所以,对角线的交点数等于从 n 个点中取 4 个点的组合数 C_n^4. □

例 3-12　整数 $1,2,\cdots,n$ 的排列满足:每个数大于它之前的所有的数或者小于它之前的所有的数. 试问有多少个这样的排列? [1989 年加拿大竞赛题]

讲解　这道竞赛题的标准答案使用了递推的方法.

解法 1　设所求的排列数为 a_n,则

$$a_1=1. \tag{1}$$

对 $n>1$,如果 n 在第 i 位,则它之后的 $n-i$ 个数完全确定,只能是

$$n-i,\ n-i-1,\ \cdots,2,1.$$

而它之前的 $i-1$ 个数,$n-i+1,n-i+2,\cdots,n-1$ 有 a_{i-1} 种排法,令 $i=1,2,\cdots,n$,得递推关系

$$\begin{aligned} a_n &= 1+a_1+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1} \qquad (2)\\ &= (1+a_1+\cdots+a_{n-2})+a_{n-1}\\ &= a_{n-1}+a_{n-1}\\ &= 2a_{n-1}. \qquad (3)\end{aligned}$$

由①、③得　$a_n=2^{n-1}$. □

评析　这个解法是"标准的",可以认为

$$L\sim L_0.$$

分析这个标准解法可以看到,关键步骤是找出 a_n 的递推关系. 而最本质的递推关系应是③式,当中的②仅仅是过渡性的. 从解题过程的分析中获得本质的认识(这时结论也是已知信息!),解题长度就可以缩短,解题智慧就可以开发出来.

式③告诉我们,a_n 是两个 a_{n-1} 之和,其中一个 a_{n-1} 是 n 在末位的排列数,另一个 a_{n-1} 呢? 积极的思维活动一旦展开,创造性的思维成果就有了生长的土壤. 稍加思索即可知,另一个 a_{n-1} 就是 1 在末位的排列数. 回到题目即可以看到,"大于它之前的所有数"与"小

于它之前的所有数"恰好使得 n 与 1 有一种对称性,原解法没有在一开始就抓住这种对称性,因而给我们留下了改进的余地.

解法 2 因为 1 与 n 不能同时出现在其他任一数码的前面,所以末位数只能为 1 或 n.现设满足条件的排法数为 a_n,则 1 为末位数时的排法数为 a_{n-1},n 为末位数时的排法数也为 a_{n-1},得

$$a_1=1,\ a_n=2a_{n-1},$$

从而 $$a_n=2^{n-1}.\ \square$$

通过解题过程的分析而开发解题智慧,后面还要谈到,它是贯穿全书的一条大动脉.

习 题 三[①]

1. 写出某一类习题的微观解题程序.

2. 根据自己的解题经验总结出一个宏观解题程序.

3. 对下题的求解作结构分析:设 $f(x)=4^x-2^{x+1}(x\geqslant 0)$,则 $f^{-1}(0)=$ ______.

[1993 年高考题]

4. 对下题的求解作结构分析.

题目 等腰三角形的两底角相等.

证明 在$\triangle ABC$ 与$\triangle ACB$ 中,

$$AB=AC,$$

从而 $$AC=AB;$$

又 $$\angle A=\angle A(\text{或 } BC=CB),$$

得 $$\triangle ABC\cong\triangle ACB.(SAS \text{ 或 } SSS)$$

从而 $$\angle B=\angle C.\ \square$$

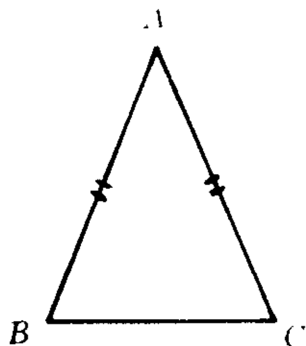


图 3-12

研究 5~10 题,写出真实的思维过程,总结解题程序.

① 本练习中的题目将陆续作为后面各章的例题,这是本书设计中的一个"有意安排",在前面这些章节中已经见到过.

5. 设$\{a_n\}$是由正数组成的等比数列，S_n是前n项和，是否存在常数$c>0$，使得对某一$n\in \mathbf{N}_+$，有

$$\frac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}\leqslant \lg(S_{n+1}-c).$$

6. 书架上有4本不同的数学书，5本不同的物理书，3本不同的化学书，全部竖起排成一行.如果要求各类书本身互不相邻，一共有多少种不同的排法.

7. 在$\triangle ABC$中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$所对的边分别是a，b，c，且$c=10$，$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$，$P$为$\triangle ABC$内切圆上的动点，求点$P$到顶点$A$，$B$，$C$的距离的平方和的最大值与最小值.

8. 设$\alpha,\beta\in(0,\pi)$，且

$$\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{2},$$

求α,β之值.

（提示：一般性解决　视已知为二元三角方程，一般情况下解不确定，特殊情况下才有定解.

功能性解决　特殊情况主要有，非负数之和为零，基本不等式取等号，二次方程判别式等于零……

特殊性解决　整理成$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$的二次方程

$$2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{1}{2}=0.\text{（下略）}$$

9. 小船顺着河流经过两个码头之间的距离用了6个小时，返回的路上用了8个小时.顺流漂浮的木排通过这段距离需要多少时间？

10. 设$D_1,D_2,\cdots,D_{n-1}$为$\triangle ABC$中$\angle A$的n等分线与BC的交点，求证

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^{n-1}=\frac{BD_1\cdot BD_2\cdot\cdots\cdot BD_{n-1}}{CD_1\cdot CD_2\cdot\cdots\cdot CD_{n-1}}.$$

（提示：动员——辨认——分离——重新配置……）

分析11～13题的解题过程，从中开发出解题智慧

11. 已知 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 的三边，它们的对角分别为 A,B,C，且 $a\cos B = b\cos A$. 关于 x 的方程 $b(x^2-1)+c(x^2+1)-2ax=0$ 的二根相等，求证 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

[1994 年山西中考题]

证明 将余弦定理代入已知，得

$$a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

有 $a=b$. 所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

又由二次方程

$$(b+c)x^2-2ax-(b-c)=0$$

的二根相等，得判别式为零

$$0=\Delta=4(a^2+b^2-c^2).$$

即
$$a^2+b^2=c^2.$$

所以，$\triangle ABC$ 又是直角三角形.

综上所述，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形. □

（提示：第一步得出等腰三角形对第二步证明没有什么启示，若反过来先得出直角三角形则可省去余弦定理，节省解题力量）

12. 解不等式 $\sqrt{3x-4}>\sqrt{x-3}$.

[高中代数第二册 P.102 例 5]

解 因为根式必须有意义，所以先解不等式组

$$\begin{cases}3x-4\geqslant 0,\\ x-3\geqslant 0,\end{cases}$$

解得
$$\{x\mid x\geqslant 3\}. \qquad ①$$

另一方面，对原不等式两边平方得

$$3x-4>x-3.$$

移项、整理后解得

$$\left\{x\,\middle|\,x>\frac{1}{2}\right\}. \qquad ②$$

由①、②取交集，得原不等式的解集是

$$\{x\mid x\geqslant 3\}. \qquad ③$$ □

（提示：①与③是相同，求②是否必要？）

13．二次方程$(1-i)x^2+(\lambda+i)x+(1+i\lambda)=0$（$i$为虚数单位，$\lambda\in R$），有两个虚根的充分必要条件是$\lambda$的取值范围为____．［1993年全国高中数学联赛题］

解　考虑问题的反面：若方程有实根x_0，则得

$$(x_0^2+\lambda x_0+1)+i(-x_0^2+x_0+\lambda)=0.$$

于是
$$\begin{cases}x_0^2+\lambda x_0+1=0, & ①\\ -x_0^2+x_0+\lambda=0. & ②\end{cases}$$

①＋②得
$$(\lambda+1)(x_0+1)=0. \qquad ③$$

再由①得
$$\begin{cases}\lambda=-1,\\ x_0^2-x_0+1=0\text{（无实根）}.\end{cases}$$

或
$$\begin{cases}x_0=-1,\\ \lambda=2.\end{cases}$$

可知当且仅当$\lambda=2$时，原方程有实根．于是方程有两个虚根（无实根）的充分必要条件是$\lambda\neq2$．□

（提示：由方程①、②解出$\lambda=-1$再舍去是一个思维回路．从方程①、②中消去λ可得惟一的实根$x_0=-1$．）

第四章　解题观点(二)

本章介绍解题研究的两个新观点,其一是系统方法论的观点,其二是解题坐标系的观点.它们在很多方面都尚待深入研究.

4－1　解题系统论

应用系统科学方法来研究数学教学已经有十多年的历史了,它大大提高了教育理论的科学性,同时也大大增强了教学实践的自觉性.在这些成果中,自然包括了对解题教学的研究,本节尝试作出初步的整理,用系统科学的观点来描述数学问题系统、数学方法系统,并应用其基本原理来分析解题过程.

4－1－1　数学问题系统

数学题是一个由4要素组成的系统,记作 $R(Y,O,Z,P)$,

Y 代表初始状态,即题的条件.

O 代表最终状态,即题的结论.

Z 代表解,即由初始状态到最终状态的转化过程.

P 代表解题依据,即由初始状态到最终状态转化的理论与实践的基础.

按照系统科学的观点,数学问题是由解题主体 S(这里指人)与数学题系统 R 组成的集合(S,R).如果主体 S 接触系统 R 后,认为 R 中全部元素、性质及关系都是他所知道的,那么我们就称系统 R 对于主体 S 为稳定性系统,记作 R_0;如果主体 S 接触系统 R 后,4个要素中至少有一项是已知的,又至少有一项是未知的,那么我们就

称系统 R 相对于主体 S 为问题性系统,记为 R_x.如果主体 S 被要求从 R 中确定他所不了解的元素的性质和关系时,R 对于 S 就成为问题,问题反映了解题者现有水平与客观需要的矛盾.因此,问题就是矛盾,而解题就是将问题性系统转化为稳定性系统,解题过程是人们寻求解的思维活动.

在问题情景中,"未知的"(元素、元素的性质或元素间的关系等)一方面像空着的位置,需要加以填充;另方面又由"已知的"(元素、元素性质、元素间的关系等)客观决定着,构成"已隐蔽地确定"与"未明显地给与"的统一.解题的思维活动,正是从已明确地给与的、已知的东西出发,去发现隐蔽存在的、待求解(证)的结论.这是一个积极而生动的创造过程.

与通常讲的数学题的概念相比,上述数学问题的概念具有两个特点(参见§1-1-1).

1. 强调主体 S 的作用

数学问题并不是纯客观的孤立的题系统 R,而是由 R 与解题主体 S 构成的整体.一个 R 是否成为问题,首先是 R 对于 S 是否成为问题性系统;其次是 S 有否解决 R 的意向和要求.由此可见,那些不能激发学生思考的、过于简单或者过于繁难的题目,那些多次重复、使人乏味、或者远离学生需要,被学生认为漠不关心的数学习题,都不能看成具有教学价值的数学问题.

2. 使数学问题更具广泛性

例如,对数学概念的研究,对数学方法的概括与探讨,数学在实际生活中的应用等等都是数学问题,在数学教学中应该重视他们的价值.1993 年以来的高考注重应用题是十分正确的,参见例 7-1,例 7-2(P.483),例 7-75(P.551).

可以根据问题 R_x 中未知元素的个数,将问题分类如下表:[1]

① 见参考文献[25]张乃达.数学思维教育学,P.134~P.138.

未知要素的个数	问题类型	记号	确定度
3	问题型问题	R_x^3	最不确定
2	探索型问题	R_x^2	较不确定
1	训练型问题	R_x^1	确定
0	标准型问题	R_0	完全确定

例 4－1　对于学习了三角形全等，尚未学习等腰三角形的初二学生来说，分别有以下问题.

问题 1　在△ABC 中，$AB=AC$，求证∠ABC＝∠ACB，这是 R_x^1 型问题，只有解未知（见例 4－26，P.190）.

问题 2　在△ABC 中，$AB=AC$，那么∠ABC 与∠ACB 有什么关系？证明你的结论. 这是 R_x^2 型问题，它的最终状态与解都未知.

问题 3　在三角形中，边与角之间可能有什么关系？这是 R_x^3 型问题，它的初始状态、最终状态、解都未知.

在具体解决的过程中，这几类习题的求解通常是逐级变换的，即是由三个转化时态构成的：$R_x^3\to R_x^2$，$R_x^2\to R_x^1$，$R_x^1\to R_0$. 并且随着解题时态的进展，思维的目的性愈来愈明确，思维的方向性愈来愈集中，逻辑思维的成分逐渐增加，非逻辑思维的成分逐渐减少，思维的结果愈来愈明确. 其具体情况如下表：

时　态	$R_x^3\to R_x^2$	$R_x^2\to R_x^1$	$R_x^1\to R_0$
思维的指向性	不明确	比较明确	明确
思维的发散性	强发散	发散	集中
思维的形式和方法	想象、联想、类比、发散思维、直觉思维	联想、类比、归纳、探索性演绎、直觉思维、发散思维、逻辑思维	演绎、完全归纳、逻辑思维
思维要素	探索、选择、判断	选择、判断 探索、推理	推理

4－1－2　数学方法系统

我们把解决一道具体数学问题的简单数学操作记作 A，而这种

特殊操作所能解决的数学问题组成的集合记作 $P(A)$,称为问题集,它反映了 A 所适用的范围①.

由简单数学操作 A 与问题集 $P(A)$ 组成的系统称为一个解题技巧,记作 $M(A)=(A,P(A))$.这样,数学解题技巧就包括两个要素,第一是解题操作,第二是解题操作适用的范围.

例4-2　我们在解方程

$$\begin{cases}\dfrac{6}{x}+\dfrac{6}{y}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{8}{x}-\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{10}\end{cases}$$

时,令 $u=\dfrac{1}{x}$,$v=\dfrac{1}{y}$,进行了一个"新元代旧式"的操作,有

A_1:新元代旧式,

$P(A_1)=\{$解分式方程$\}$.

例4-3　求函数 $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+3}$ 的值域时,令

$$x=\sin t,\quad |t|\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

进行了一个"新式代旧元"的操作,有

A_2:新式代旧元,

$P(A_2)=\{$求函数值域$\}$.

例4-4　在证明三角条件等式

$$\frac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta}+\frac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta}=1\Rightarrow\frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}=1$$

时,令(求解参见例4-43,P.241;例6-79,P.430)

$$\frac{\cos^2\alpha}{\cos\beta}=\cos\theta,\quad\frac{\sin^2\alpha}{\sin\beta}=\sin\theta,$$

进行了"新式代旧式"的操作,有

---

① 见周春荔.数学教育与数学方法论.中等数学,1989,1,P.1.又见张乃达.按照思维发展规律进行解题教学.福建中学教学,1985,4,P.10.

A_3: 新式代旧式,

$P(A_3)=\{$证明三角等式$\}$.

但是,这里的简单操作 A_1, A_2, A_3 并不限于解决个别问题,而且 A_1, A_2, A_3 也有共通性,记

A: 换元,

则 $P(A)=\{$解方程、求函数值域,证明等式或不等式,……$\}$.

这时 $A_i \subset A$,

$P(A_i) \subset P(A)\ (i=1,2,3)$.

则 $M(A)=(A, P(A))$,

是比 $M(A_i)=(A_i, P(A_i))(i=1,2,3)$

更高层次的数学技巧,成为适应面较广的解题方法——换元法.

一般地,解题技巧的层次升高、范围扩大,积累到规律化的程度、可反复使用时,就成为解题方法①.若解题方法的层次再升高,范围再扩大,直到至少含有某一数学分支的问题为其子集时,便成为创立数学学科的数学方法了.如

(1) A: 坐标方法,

$P(A)=\{$解析几何$\}$,

$M(A)=\{$坐标方法,解析几何$\}$.

(2) A: 极限方法,

$P(A)=\{$微积分$\}$,

$M(A)=\{$极限方法,微积分$\}$.

当解题技巧、解题方法的层次不断增加,升华到通用性的境地时,就成为解题思想了.它是最高层次的解题方法.比如,波利亚的"怎样解题表"就进入到这个层次,徐利治的 RMI 原理也进入到这一层次(见§6-2-2).

由于解题思想通常不会很多,在使用上有不方便之处,所以我们

---

① 波利亚在《数学分析中的问题和定理》德文初版前言中说:一个想法使用一次是一个技巧,经过多次使用就可成为一种方法.

把由解题思想直接推出的几乎对一切问题都有指导作用的、介于解题思想与解题方法的中介形式,称为解题原则.如

1. 简单化原则

要求把较复杂的问题转化为较简单的问题,把较复杂的形式转化为较简单的形式,把较抽象的问题转化为较具体的问题.

2. 熟悉化原则

要求把不熟悉的问题转化为熟悉的问题,尤其是转化为已掌握的基本问题.

3. 系统化原则

要求从数学问题的整体结构及条件与结论的相互联系中去寻找解决问题的途径.

4. 和谐化原则

根据数学内部固有的和谐美,去思考问题、寻找思路.

在§4-2-2中还要谈到解题原则.

4-1-3 信息与解题

从信息论的观点来看,解题的过程就是信息的获取、存输、处理、输出,从而实现解决目标的运动过程.

解题信息的获取,主要步骤是弄清题意,明确已知是什么?求证(解)是什么?亦即从题目本身去获取从何处入手、向何方前进的信息.题目的条件和结论是两个信息源,从条件发出的信息预示可知并启发解题手段,从结论发出的信息预告需知并诱导解题方向.为了从中获取尽可能多的信息,我们需要分析条件、分析结论、分析它们之间的关系,需要辅以图形或记号,以求得目标与手段的统一.

从题目本身发出的信息,输入解题主体时,一开始是孤立的、零散的、混乱的,经过初步的辨认筛选,可确定哪些是有用的,哪些是无关的,有用的要继续接收,同时,进行短期的储存;至于那些与解本题无关的信息,则予以淘汰.与此同时,解题主体又在努力追忆过去在什么地方、什么情况下曾出现过类似的题目,从“存储机构”中提取出

与本问题有关的定义、定理、公式、法则与类题，索取已知的知识，调动潜在的技能，进行信息的对比、借鉴和再生.

把从题目中捕捉的有用信息与从存储机构中提取的有关信息结合起来，进行加工、重组与再生，这实质上就是解题思路的探求.这个过程的往复循环、依信息的反馈而由大脑来调节.捕捉信息、提取信息、加工重组，这三者缺一不可.波利亚的高明之处就在于，他在解题表中的许多问句常常"一语三关"，你见过类似的题目吗？这既是启发你从"题"中捕捉信息，又是催促你从"记忆"中索取信息.如果你"见过"，这是一个信息，告诉你如何运动——两组信息也就沟通了；如果你"没见过"，这也是一个信息，等于告诉你进行下一步的行动.

随着信息分析、加工的进展，解题的前景也逐渐明朗.经验表明，通过观察、类比、归纳、猜想等手段去获取解题大体方向的有关信息是十分重要和非常有效的.因为简单的、具体的、局部的情况总带有系统本身的信息，而特殊解法的思路中常能显示出一般解法的信息流.

信息的输出，表现为解题的书写.值得注意的是，书写完成之后，信息过程并没有结束，"解答"依然向我们输入信息，表现为解后的探究.所以，波利亚特地给解题过程安排了一个必要的环节——回顾，其作用不仅能改进完善眼前的题解，而且能提炼出对未来解题有指导作用的信息(即形成数学观念的基本素材，或称解题经验的信息储备)，进一步升华为人们搜索、捕获、分析、加工和运用信息能力的总和——数学才能.

这里所叙述的解题的信息过程与§3－3所进行的结构分析是一致的，概要的说，解题的信息过程包括这样一个"三位一体"的工作：

1. 从理解题意中捕捉有用的信息.主要是从题目的叙述中获取"符号信息"，从题目的图形中获取"形象信息".

2. 从记忆储存中提取有关的信息.主要是定理、公式、基本模式等解题依据或解题凭借.

3. 将两组信息进行有效的组合,使之成为一个和谐的逻辑结构.

这三件工作:"有用捕捉"、"有关提取"、"有效组合",恰好对应着人的心理活动的三个环节:观察试验、联想转化、推理证明.

例 4-5　设 $f(x)=4^x-2^{x+1}(x\geqslant 0)$,求 $f^{-1}(0)$.

讲解①　(习题三第 3 题)从题目中可得两个信息,其一是 $f(x)$ 的表达式,其二是反函数 $f^{-1}(x)$ 的自变量的取值为 0.

从记忆储存中提取函数与反函数的关系作为解题的依据.

$$f^{-1}(0)=x\Rightarrow f(x)=0,$$

得

$$4^x-2^{x+1}=0.$$

再从"原高中课本 P.60 例 1"的回忆中,得出指数方程的解

$x=1$. 再一次应用函数与反函数的关系:

$f(1)=0\Longleftrightarrow f^{-1}(0)=1$. □解题的信息过程如下图:

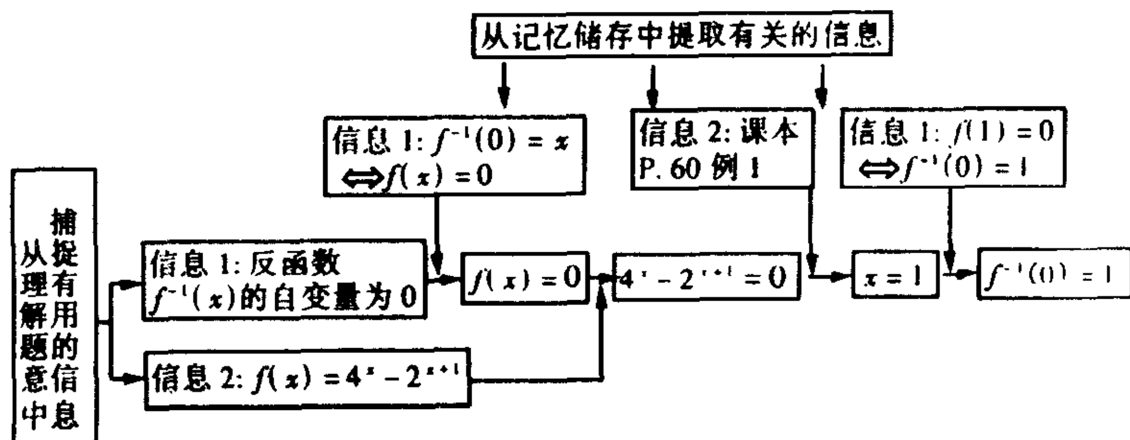


图 4-1

其中 $x\geqslant 0$ 的条件保证了反函数存在.

① 取自参考文献[35]罗增儒.怎样解答高考数学题,P.72.

再看一个从信息观点探讨解题过程的有趣例子.

例4－6 数学老师把一个两位自然数 n 的约数个数告诉了 S，把 n 的各位数字和告诉了 P. S 与 P 是两位很聪明的学生，他们希望推导出 n 的准确值. S 和 P 进行了如下的对话——

P：我不知道 n 是多少.

S：我也不知道，但我知道 n 是否为偶数.

P：现在我知道 n 是多少了.

S：现在我也知道了.

老师证实了 S 和 P 都是诚实可信的，他们的每一句话都是有根据的.

试问 n 的值究竟是多少？为什么？

[第三届全国数学奥林匹克集训班考试题]

讲解 记 n 的约数个数为 a，记 n 的数字和为 b，则每一个 n 都有坐标 (a,b)（反之不惟一）. 对于“两位很聪明的学生”来说，所有两位数的坐标都是客观存在、或者说由智力水平所不难获得的，列表如下页.

两个学生找 n 的过程，就是根据输入信息从表中选择的过程，而这种选择是以淘汰的方式来筛选的.

1. 由 n 是两位数，S，P 均能作出估计

$$2\leqslant a\leqslant 12 \text{ 且 } a\neq 11,$$
$$1\leqslant b\leqslant 18.$$

2. S 的已知信息还有

(1) S 知道 a 但不知道 b；

(2) S 还知道，“P 知道 b”.

3. P 的已知信息也有

(1) P 知道 b 但不知道 a；

(2) P 还知道，“S 知道 a”.

以上是由“老师告诉学生”所提供的信息，以下是学生间对话所相互提供的信息.

b \ a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1				10								
2		11				20						
3				21		12		30				
4		13,31		22				40				
5		23,41		14		32,50						
6				15,33,51				24,42				60
7		43,61	25	34	16	52		70				
8		17,53,71		26,35,62		44				80		
9				27	81	18,45,63		54	36			72,90
10		19,37,73		46,55,82,91		28	64					
11		29,47,83		38,65,74		92		56				
12				39,57.93		75		66		48		84
13		67	49	58,85,94		76						
14		59		77,86,95		68						
15				69,87				78				96
16		79,97						88				
17		89				98						
18						99						
合计	0	21	2	30	2	16	1	10	1	2	0	5
奇偶性		奇	奇	奇 偶	奇 偶	奇 偶	偶	偶	偶	偶		偶

4. 第一句话相当于 P 向 S 输入重要信息：凡由 b 能惟一确定的 n 都不是所求. 有

$$2 \leqslant b \leqslant 17.$$

原因是 $b=1$ 时 $n=10$，$b=18$ 时 $n=99$. 据此，S 立即删去第 1 行与第 18 行，但依然无法确定 n.

5. 第二句话相当于 S 向 P 输入了两条重要信息：

(1) 凡由 a 能惟一确定的 n 都不是所求，由此，P 便删去 $a=7$，9 的列；

(2) 凡由 a 不能确定 n 的奇偶性的列，都不是所求（否则 S 就

不能说“知道 n 是否为偶数”. 由此 P 便删去 $a=4,5,6$ 的列. 得

$$a=2,3,,8,10,12.$$

6. 这时 P 必定会从 $(2,b)(3,b)(8,b)(10,b)(12,b)$ 中, 将 b 的值代入(b 对于 P 是已知的)去找 n. 第二句话表明, P 找到了一个惟一的坐标与已知的 b 对应, 这等于告诉 S, 由 b 决定了惟一的一对 a,n. 当 S 收到这个信息后, 立即搜索, 首先删去那些当 $a=2,3,8,10,12$ 时, b 与 n 不成一一对应的行: $b=4,5,6,7,8,9,10,11,16$; 同时也删去那些 b 对应到 $a\in\{2,3,8,10,12\}$ 时不惟一的行: $b=12,13$. 最终得到下表的结果:

a	2	2	2	8
b	2	14	17	3
n	11	59	89	30

7. S 是知道 a 的, 但上表中当 $a=2$ 时, 不能确定 n, 所以最末一句话等于告诉我们 $a=8$, 从而 $n=30$. □

需要注意的是, 以上的信息过程, 其实是我们“第三者”(不是 S, P 两人)的思考过程. 由于 S 一开始就知道 $a=8$, P 一开始就知道 $b=3$, 所以他们的信息过程要比“我们”简单得多.

1′. P 一开始由 $b=3$ 知, n 只能是 21, 12, 30 其中之一, 但他无法确定哪一个是答案, 所以他说“我不知道 n 是多少”.

2′. S 一开始也由 $a=8$ 知, n 只能是 30, 40, 24, 42, 70, 54, 56, 66, 78, 88 这 10 个偶数其中之一. 当 P 说完第一句话时, 对 S 来说没有任何进展, 所以他还是不知道 n 为何值. 最关键的话是: S 说他知道 n 是否为偶数.

3′. P 得到这个信息后, 立即排除了 21, 12, 得出 $n=30$, 因为 $n=21$ 时 $a=4$, 表中第 4 列上有奇数也有偶数; $n=12$ 时 $a=6$, 表中第 6 列上既有奇数也有偶数, 均应否定. 只有 $n=30$, 相应的 $a=8$, 整个第 8 列全为偶数.

4′. P 已获得结果的信息再反馈回来, S 立即明白, n 的奇偶性

排除了P的全部干扰，于是S就把可奇可偶的第4,5,6列删去，看那一个n能与b成一一对应且在第8列上．这时只有第三行上的$n=30$，故S说，他也知道了．

对比上述两个思维过程可以看到，为了确定n值，S只需确定b，P只需确定a，而“我们”则既要确定a，又要确定b．于是“我们”不仅要从S，P的思维过程中获取关于a，b的信息，而且要从他们的思考结论中、以及他们思考的联系中获取更多的信息．虽然信息的具体运动形态有繁简之别，但把系统的运动抽象为一个信息变换过程还是一样的．

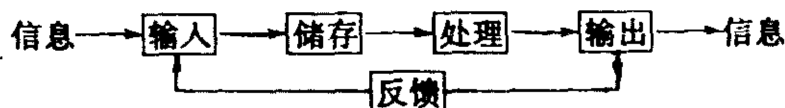


图4－2

4－1　4　**反馈原理与解题**

系统的输出转变为系统的输入叫做反馈．反馈影响再输出，如果加强了再输出，称为正反馈；如果减弱了再输出，称为负反馈．反馈原理是说，任何系统只有通过反馈信息才能实现控制；没有反馈信息的系统就不能实行控制．

解题应是一个可控制系统，为了有效地实行控制，必须要有信息的反馈．解题反馈是数学解题必不可少的环节．从人类认识活动的角度看，每一个人的完整活动都有定向、行动、反馈三个环节组成，没有反馈环节是不完整的．在波利亚的解题表中非常重视根据反馈信息作出相应的调整，特别地，还把“回顾”作为一个阶段．

解题的反馈包括解题中的反馈和解题后的反馈．例2－16的分析处理对这两种反馈都有体现．

1．解题中的反馈

因为我们的解题并不总是一帆风顺的，一个思路在执行中会发

现有的环节行不通,这一信息就指令我们修订方案,再执行、再修订,……直到成功或失去思路,这就是解题中的信息反馈过程.

解题中的反馈通常称为负反馈.如果我们把系统的现状与系统运动要达到的目标之间的差异称为目标差,那么负反馈的本质就在于设计一个目标差不断减少的过程,即通过系统不断地控制后果与目标作比较,使得目标差在一次又一次的控制中慢慢减少,最后达到解题的目的.这就要求我们注意以下各点:

(1) 通过题目中所出现的元素、元素间所进行的运算,元素间所存在的关系及其所组成的结构去找差异.

(2) 系统一旦出现目标差,便立即作出某种减少目标差的反应.

(3) 减少目标差的调节要一次又一次地发挥作用,使得对目标差的减少能积累起来,渐次逼近,直至消除.

我们经常看到一些同学,拿着题目一筹莫展,找不到解题的突破口,连下手的地方都没有,这在很大程度上是不会找目标差,或见到目标差却不能作出反应.还有的同学常在成功的思路上受阻,其原因是不善于把目标差的逼近积累起来.在例 2-16 中,我们已经见过目标差的分析,在例 1-12、例 1-13、例 1-14 中,我们亦见过因不善于积累目标差而放弃了一个本可成功的思路.

例 4-7 已知关于 x 的实系数二次方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个实数根 α,β.证明:如果 $|\alpha|<2,|\beta|<2$,那么 $2|a|<4+b$ 且 $|b|<4$.

[1993 年数学高考理科(29)题第(Ⅰ)问]

讲解 我们来找目标差.

(1) 最显著的目标差是,条件出现字母 α,β,结论出现完全不同的字母 a,b.对此立即作出反应,就是找"根与系数"的关系,有

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-a, & ①\\ \alpha\beta=b; & ②\end{cases}$$

或 $$x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)$$

及求根公式

$$\alpha,\beta=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

等.

(2) 这时结论就变为

$$\begin{cases}2|\alpha+\beta|<4+\alpha\beta, & ③\\ |\alpha\beta|<4. & ④\end{cases}$$

其中④式可由已知条件直接得出,问题转化为集中解决③式(目标差已经减少).

(3) 这时式③与条件的目标差主要有两个.

1) 条件中的 α,β 是单独存在的,而结论中的 α,β 集中在一个式子里;

2) 条件中的 α,β 以一次方的形式出现,结论则对条件进行组合,出现 $\alpha\beta$ 项.

问题是,绝对值怎么处理?

(4) 立即作出反应,或讨论 $\alpha+\beta\geqslant0,\alpha+\beta<0$ 两种情况,或平方将条件与结论沟通.比如,将③式平方后作差

$$(4+\alpha\beta)^2-[2(\alpha+\beta)]^2=(4-\alpha^2)(4-\beta^2), \qquad ⑤$$

即

$$(4+b)^2-4a^2=(4-\alpha^2)(4-\beta^2). \qquad ⑥$$

至此,我们已经建立起了 α,β 与 a,b 的直接联系,整个思路就沟通了.这是一个不断反应、连续积累的过程,这是一个有目的的定向调控和有价值的渐次逼近过程.本题将在例 4-32(P.205)中换一个角度继续研究.

例4-8 一个国际社团成员来自6个国家,共有成员1978人,用1,2,3,…,1977,1978编号.请证明该团至少有一个成员的顺序号数与他的两个同胞的顺序号数之和相等,或是一个同胞的顺序号数的两倍.

[IMO_{20-6}]

分析 本题的背景是图论中的许尔(Schur)定理,直接求解主要困难有:

(1) 不知道哪些编号属于哪个国家;

(2) 大数量的总体中找小数量的特殊元素.

解决第(1)个困难可设字母代替,解决第(2)个困难可逐步缩小搜索范围,一次又一次的用字母代替,一圈又一圈的收缩范围,终于可以断定存在由同一国家成员编号组成的集合

$$S_i\subset\{1,2,3,\cdots,1978\},(1\leqslant i\leqslant 6)$$

使得在 S_i 上,方程 $x+y=z$ 有解.

在具体证明中,可转而证方程

$$z-x=y,$$

在某一 S_i 上有解.

证明 6个国家共有成员1978人,据抽屉原理($1978=6\times 329+4$)知,至少有330人属于同一国家 A_1,记它们的编号为 $a_1,a_2,\cdots,a_{330}$,且 $a_1<a_2<\cdots<a_{330}$,由它们可组成329个正整数差:

$$a_2-a_1,a_3-a_1,\cdots,a_{330}-a_1.$$

如果其中有一个差 $a_i-a_1=a_j$ 属于A_1 国,则 $a_i=a_1+a_j$(当 $a_j=a_1$ 时,$a_i=2a_1$)

命题成立.

如果它们都不属于 A_1 国,则这329个差就是其余5国成员的编号.根据抽屉原理($329=5\times 65+4$),其中至少有66个编号属于同一个国家 A_2,记它们为 $b_1,b_2,\cdots,b_{66}$,且 $b_1<b_2<\cdots<b_{66}$,可组成65个正整数差:

$$b_2-b_1,b_3-b_1,\cdots,b_{66}-b_1.$$

如果其中有一个差 b_i-b_1 属于 A_1 国或 A_2 国,则有

(1) $b_i-b_1=a_j\in A_1$,即存在

$$b_i=a'_i-a_1,a'_i\in A_1,$$

$$b_1=a'_1-a_1,a'_1\in A_1,$$

使 $$(a'_i-a_1)-(a'_1-a_1)=a_j,$$

得 $$a'_i=a'_1+a_j,(当\ a'_1=a_j\ 时,a'_i=2a_j).$$

命题成立.

(2) $b_i - b_1 = b_j \in A_2$,则

$$b_i = b_1 + b_j,(\text{当 } b_1 = b_j \text{ 时}, b_i = 2b_1).$$

命题成立.

如果 65 个正整数差都不属于 A_1 国和 A_2 国,则这 65 个差就是其余 4 国成员的编号,又由抽屉原理($65 = 4 \times 16 + 1$)知,其中至少有 17 个编号属于同一国家 A_3,记它们为 $c_1, c_2, \cdots, c_{17}$,且 $c_1 < c_2 < \cdots < c_{17}$,可组成 16 个正整数差:

$$c_2 - c_1, c_3 - c_1, \cdots, c_{17} - c_1.$$

同理,若其中有一个差属于 A_1 国或 A_2 国或 A_3 国,则命题成立.否则 16 个正整数差就是其余三国的编号,其中必存在 6 个编号属于同一国家 A_4,记它们为 $d_1, d_2, \cdots, d_6$,且 $d_1 < d_2 < \cdots < d_6$,可组成 5 个正整数差:

$$d_2 - d_1, d_3 - d_1, \cdots, d_6 - d_1.$$

同理,若其中有一个差属于 A_1 国或 A_2 国或 A_3 国或 A_4 国,则命题成立,否则这 5 个正整数差就是其余两国成员的编号,其中必存在 3 个编号属于同一国家 A_5,记它们为 e_1, e_2, e_3,且 $e_1 < e_2 < e_3$,可组成两个正整数差:

$$e_2 - e_1, e_3 - e_1.$$

如果其中有一个差属于 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 国之一,则命题成立.否则这两个差就是 A_6 国成员的编号,记它们为 f_1, f_2,且 $f_1 < f_2$,那么

$$f_2 - f_1$$

就是一个不超过 1978 的正整数,无论它是那个国家的成员编号,命题都成立.□

易见,整个解题过程就是根据反馈实施调节,并连续积累目标差的过程.

2. 解题后的反馈

反馈原理对于解题的指导作用,不仅表现为解题中对目标差的调节,而且表现为解题后对数学命题的重新认识和对解题方法的评价.

(1) 数学命题的重新认识包括:

1) 解法正确吗? 对问题的答案和解题过程进行有效的检验是解题的一个重要环节,它不仅能提高解题的正确性,而且还有助于活跃我们的思维活动,增强我们思维的批判性.

2) 对条件和结论中作过适当讨论没有?

3) 探索题目的背景,对结论特殊化、一般化等.

(2) 解题方法的评价主要是探求方法的实质,追求解法的优化等,许多数学家认为:追求方法的简捷和优美是过去与现在所有数学家数学思想的特点,也是所有数学优秀生的非常典型的特征.[1]

1) 题目中本身有什么特点? 解题中是怎样利用这些特点找到解题突破口或成功思路的? 教训是什么?

2) 解题中应用了哪些知识与方法? 其中关键在哪里? 画一张结构框图.

3) 是否还有别的方法? 更一般的方法? 更特殊的方法? 沟通其他学科的方法? 更简单的方法,更多的方法?

4) 方法本身对已知数据或已知关系的依赖是本质的还是非本质的? 同样的方法是否能立即作出推广? 实质性的推广需对方法作怎样的改变或创新?

5) 提炼对今后解题有指导意义的方法论价值,逐步积累搜集信息、分析信息、加工信息、应用信息的能力.

例4-9 已知 $a\neq b$ 是方程 $x^2-4x+1=0$ 的两个根,不解方程求 $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}$ 的值.

分析 先整理求值式

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=\frac{(a+b)+2}{ab+(a+b)+1}.$$

可见,只需求出 $(a+b)$, ab 的值.这由韦达定理可以完成.

解 由韦达定理,有

① 克鲁捷茨基.中小学数学能力心理学.上海教育出版社,P.347.

$$\begin{cases} a+b=4, & ① \\ ab=1; & ② \end{cases}$$

代入，得

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=\frac{(a+b)+2}{ab+(a+b)+1} \qquad ③$$

$$=\frac{4+2}{1+4+1}=1. \ \square \qquad ④$$

解后回顾　仔细阅读从分析到求解的全过程，我们看到分析是正确的，求解也是正确的. 画出框图：

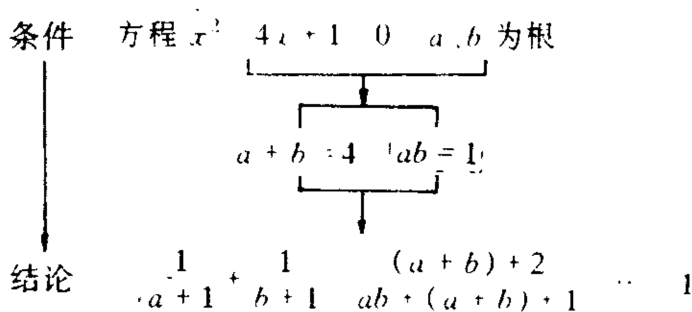


图 4 - 3

也未发现有多余的思维回路.

但是，我们别忘了，解题前的分析是在思路未明朗、结论未得出的情况下进行的(如同在黑房间里摸索)；而解题后的回顾是在思路已明朗、结论已得出的情况下进行的(如同拉开了房间的电灯)，后者比前者多了很多信息，其中“结论也是已知信息”. 由结论知

$$\frac{(a+b)+2}{ab+(a+b)+1}=1, \qquad ⑤$$

即　　$(a+b)+2=ab+(a+b)+1,$

即　　$ab=1.$

这就表明，求出 $a+b=4$ 是多余的，回过头来看⑤式也会发现，不需要求出 $a+b$ 的值也能分子分母同时约去.

解法 2　由韦达定理有

$$ab=1,$$

代入得
$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=\frac{ab}{a+ab}+\frac{1}{b+1}$$
$$=\frac{b}{b+1}+\frac{1}{b+1}=1,\ \square$$

或
$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=\frac{a+b+2}{ab+a+b+1}$$
$$=\frac{a+b+2}{1+a+b+1}=1.\ \square$$

我们认为,对于初中学生来说,这道题目的解题教学应该包括从原解法到解法 2 的全过程,只讲原解法既观点不高又包含"解题笨拙";只讲解法 2,会陷入"题目这样解"的泥潭,在弄不清"思路怎么来"的"玄法"面前,学生反而连基本方法都掌握不了[①].

例 4-10 若 $0<a,b,c,d<1$,证明
$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)>1-a-b-c-d. \quad ①$$

讲解 这道题目的目标差主要有两个:

(1) 单个字母的不等关系与多项式间的不等关系之间的差异.

条件是: $0<a<1,0<b<1,0<c<1,0<d<1$,或
$$0<1-a<1,0<1-b<1,0<1-c<1,0<1-d<1;$$

结论是: $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$与 $1-a-b-c-d$ 之间的不等关系.

为了消除这个差异,应该对已知条件加以组合(相乘、相加等运算).

(2) 求证不等式左右两边结构上的差异.

左边是: 四次式且取乘积的形式;

右边是: 一次式,表示为代数和的形式(一次五项式).

为了消除积与和之间的差异,可以将不等式左边展开,转化为证不等式
$$ab+ac+ad+bc+bd+cd$$

---

① 由此例我们编拟了 1996 年全国初中数学联赛第一(1)题,见例 7-71.

$$-abc-abd-acd-bcd+abcd>0. \tag{2}$$

比较①、②两式，目标差到底是扩大了还是缩小了呢？我们见到，有的书刊不看问题的实质，只见②的项数很多，便轻率断言"这显然是麻烦的".其实，此时的目标差很明确，就是用②中左边的7个正项去抵消4个负项.把已知条件用上去，这是很容易做到的.式②等价于

$$ab(1-c)+ad(1-b)+ac(1-d)+bc(1-d)+bd+cd+abcd>0. \tag{3}$$

所以，这是一个可行的思路(例1-12).

解后研究　上述思路虽可行，但欠佳，当字母不多(2个,3个,4个)时它可行，而当字母大量增加时，局限性就暴露了.那么，问题在哪里呢？我们注意到两条：

(1) 将式①变为②式时，原结构上的简单和谐被打破了，原结构上便于递推的规律性或优越性被淹没了.

(2) 式③的成立，在于利用了$1-b,1-c,1-d$为正数的性质($1-b>0,1-c>0,1-d>0$)，它们都小于1的功能未体现出来($1-b<1,1-c<1,1-d<1$)，并且$a<1$的条件没有用到.这一方面说明有这样的命题：若$a>0,0<b,c,d<1$，则

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)>1-a-b-c-d.$$

另方面也启示，保留原条件，用上更多的性质也许会找到更加和谐的解法.

为了沟通"乘积四次式"与"一次五项式"的联系，我们把左边化为五项式的代数和

$$\begin{aligned}&(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)\\=&(1-a)(1-b)(1-c)-d(1-a)(1-b)(1-c)\\=&(1-a)(1-b)-c(1-a)(1-b)-d(1-a)(1-b)(1-c)\\=&1-a-b(1-a)-c(1-a)(1-b)-d(1-a)(1-b)(1-c).\end{aligned}$$

然后，再缩小得出不等式，只需注意到

$$0<1-a<1,$$

$$0<(1-a)(1-b)<1,$$
$$0<(1-a)(1-b)(1-c)<1,$$

便立即得出所求，而且可以推广，对 $0<a_i<1$，有

$$\begin{aligned}&(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)\\=&1-a_1\\&-a_2(1-a_1)\\&-a_3(1-a_1)(1-a_2)\\&\cdots\cdots\\&-a_n(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_{n-1})\\>&1-a_1-a_2-\cdots-a_n.\end{aligned}$$

这个解法实质上是分两步消除不等式左右两边的目标差：

(1) 消除项数上的目标差，使得与右边的项数保持一致.

(2) 消除指数上的目标差，缩小，变等式为不等式.

上述结构，n 号命题与 $n-1$ 号命题存在着明显的相似性，也极易用数学归纳法来证明.

4-1-5 有序原理与解题

凡有信息交换、信息转输的系统，必定有信息的流向问题，有流动的先后次序问题；系统的结构，也反映了要素之间有时间上或空间位置上的差异，表现为有序结构.

一般地，如果一个系统的性质、结构和功能是由简单向复杂、由低级向高级的方向发展，则称为有序. 否则称为无序或混沌.

有序原理认为，任何系统只有开放，与外界有信息交换才能有序. 与外界无信息交换的封闭系统要使之有序是不可能的，随着过程的发展，必然结构劣化、功能衰退，系统逐渐趋于无序.

在解题这个系统中，深刻理解题意为有序，解题目标差减少为有序，思路条理化(如由浅入深、由简单到复杂、由具体到抽象、由特殊到一般等)为有序，解法灵活变通为有序、能沟通各单元、各学科之间的联系为有序.

解题思考的作用在于使大脑有关部分的信息联系起来,组成新的结构,即更为有序.思考过程就是大脑内部各个子系统交换信息的过程,就是有序的过程.

例4-11　在Rt△ABC中,CM是斜边AB上的中线,若AC,CM,BC顺次成等比数列,求$\angle CMB$的度数①.(图4-4)

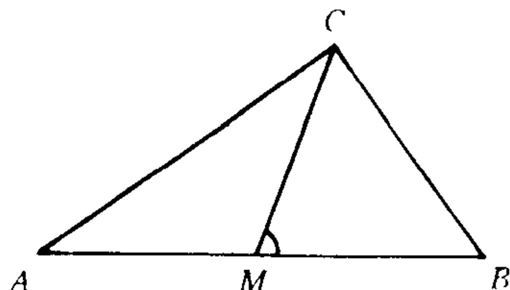


图4-4

讲解　在解题的开头,从理解题意中获取信息,从记忆储存中提取信息,并进行简单的加工,可得出一系列的信息单元:

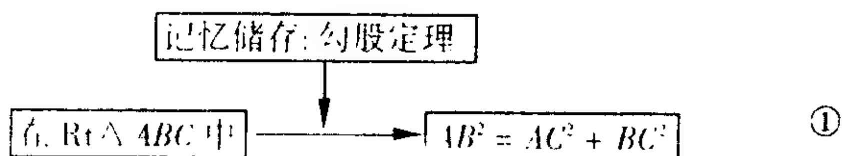


图4-5

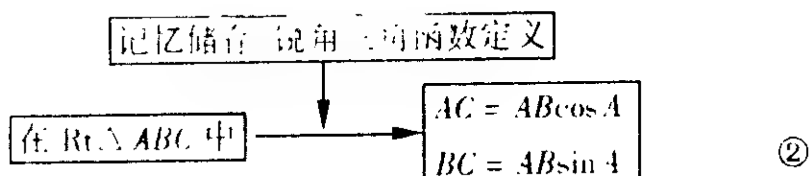


图4-6

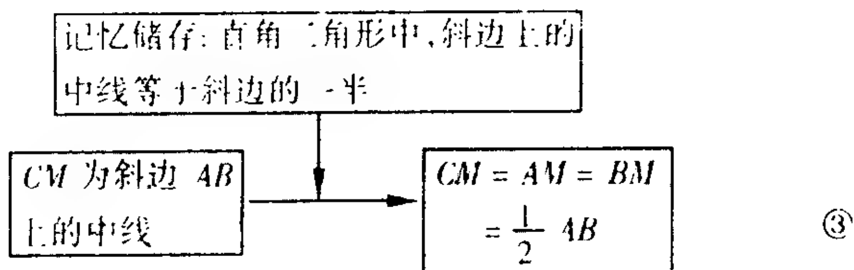


图4-7

① 以此题为背景我们编拟了1995年初中联赛填空第(4)题.

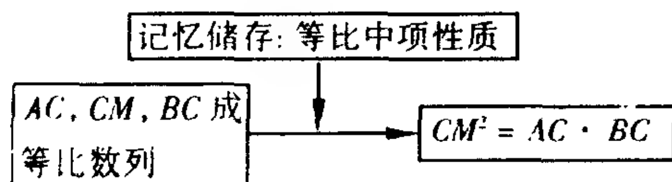


图 4－8

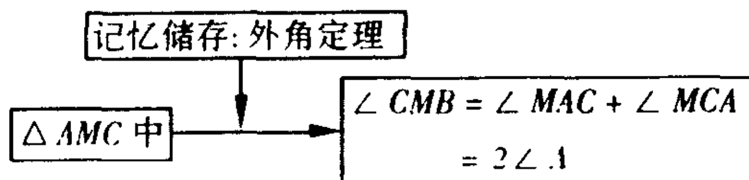


图 4－9

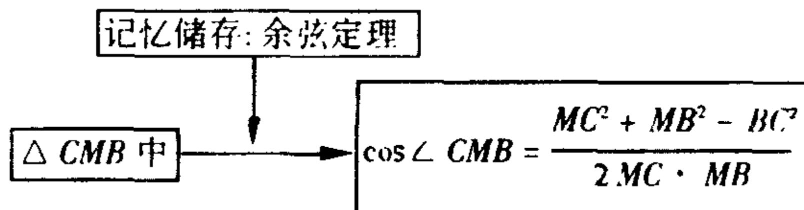


图 4－10

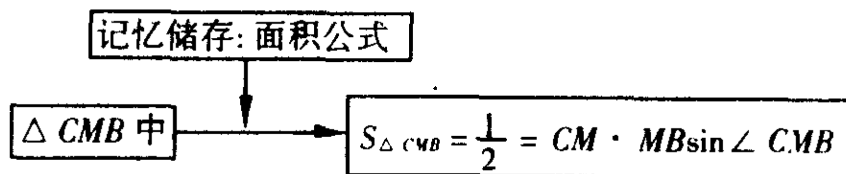


图 4－11

还可以列出一些信息，它们开始是孤立的、零散的、杂乱的，经过进一步思考，判断哪些是有用的，哪些是暂时用不着的；考虑将有用的信息应按怎样的先后顺序加以串联和组织才能构成解决本问题的合理结构，从而走向有序．其中一个方案是取③、④、②、⑤．由

$$\left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = CM^2 \qquad (由③)$$
$$= AC\cdot BC \qquad (由④)$$
$$= AB\cos A\cdot AB\sin A \qquad (由②)$$
$$= \frac{1}{2}AB^2\sin 2A \qquad (倍角公式)$$
$$= \frac{1}{2}AB^2\sin\angle CMB, \qquad (由⑤)$$

得 $$\sin\angle CMB = \frac{1}{2},(0<\angle CMB<\pi)$$

有 $$\angle CMB = \frac{\pi}{6}或\frac{5\pi}{6}. \square$$

这样,当初分散的代数信息、几何信息、三角信息就根据解题的最终目标而组成一个和谐的结构,从而走向有序.

对这个有序化过程进行回顾可以看到,为了出现$\angle CMB$,首先出现$2A$,为了出现$2A$,用到倍角公式.但是,如果对

$$CM^2 = AC\cdot BC$$

直接用面积公式,便可出现$\angle CMB$,从而简化解题过程,取③、⑦、④等,由M为中点得

$$CM = BM,$$

且 $$2S_{\triangle CMB} = S_{\triangle ABC},$$

有 $$2\cdot\frac{1}{2}CM^2\sin\angle CMB = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC,$$

把$CM^2 = AC\cdot BC$代入,得

$$\sin\angle CMB = \frac{1}{2},(0<\angle CMB<\pi)$$

有 $$\angle CMB = \frac{\pi}{6}或\frac{5\pi}{6}. \square$$

其信息过程如下,简捷而流畅.

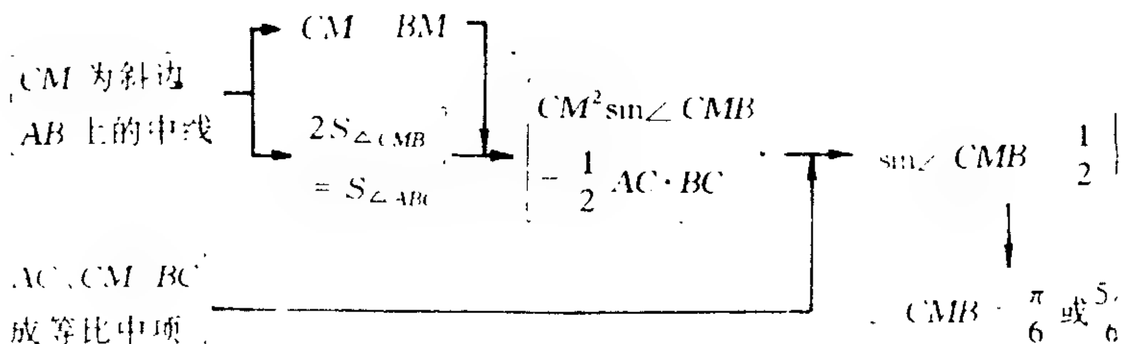


图 4-12

例 4-12 设 A,B,C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角，且

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin A & \cos A \\ 1 & \sin B & \cos B \\ 1 & \sin C & \cos C \end{vmatrix}=0,$$

求证 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

讲解 按照有序原理，我们打破纯行列式计算或纯三角计算的界限，开放联想，与解析几何沟通①. 首先，已知条件给我们的信息是

$$P(\sin A,\cos A),$$
$$Q(\sin B,\cos B),$$
$$R(\sin C,\cos C),$$

三点共线；其次，我们从 P,Q,R 又再生出信息：P,Q,R 都是单位圆上的点；最后，我们从
记忆储存中提取信息：直线与圆最多有两个交点，于是得 P,Q,R 中至少有两点重合，

$$\begin{cases}\sin A=\sin B,\\ \cos A=\cos B;\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}\sin A=\sin C,\\ \cos A=\cos C;\end{cases}$$

① 罗增儒. 利用单位圆证明三角条件等式. 中学数学研究，1983，1，P.20，例 2.

或
$$\begin{cases}\sin B=\sin C,\\ \cos B=\cos C.\end{cases}$$
再从题目中获取信息
$$0<A,B,C<\pi,$$
故必有
$$A=B\text{ 或 }A=C\text{ 或 }B=C.$$
无论那种情况,$\triangle ABC$ 均为等腰三角形. □

解题的信息过程如下(图 4-13),其中最关键的是"构造单位圆上的三个点 P,Q,R",此招一出,其余步骤只不过是例行差事.

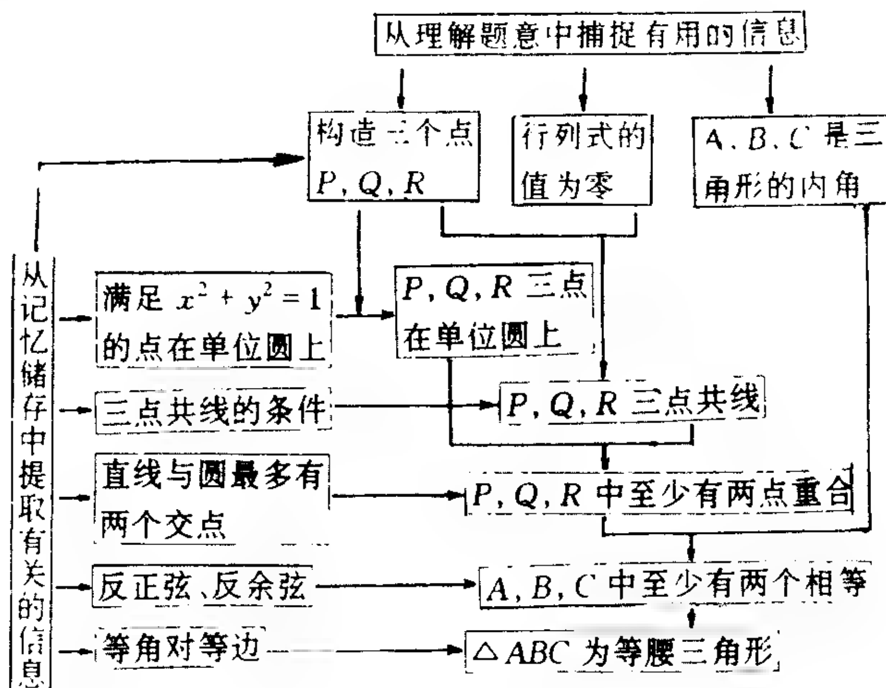


图 4-13

例 4-13 已知三棱锥 $P-ABC$,顶点 P 在底面内的投影是 $\triangle ABC$ 的垂心,$PB=PC$,$BC=2$,侧面 PBC 与底面所成的二面角的度数为 $60°$.求三棱锥 $P-ABC$ 的体积(图 4-14).

讲解 作 $PO\perp$面 ABC,由棱锥的体积公式,有
$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PO\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AD\cdot PO\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot AD\cdot PO.$$

由此，产生一个思路，分别求出 AD，PO. 但这是无序的，因为已知条件只确定了 P 在 BC 的垂直平分线 MD 上，却未确定 P 的具体位置，因而 PO 不是定值. 同样，已知条件只能确定 AD 是 BC 的垂直平分线，但不能确定高线 AD 的长，AD 也不是定值. 问题在于 PO 与 AD 之间存在反比例关系，其乘积

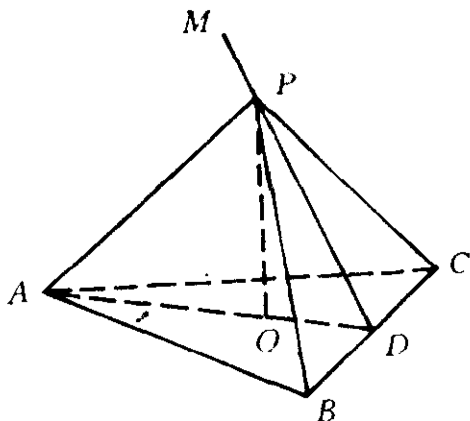


图 4-14

$$AD\cdot PO=\sqrt{3}$$

是常数. 因而，求乘积 $AD\cdot PO$ 以确定体积才是有序的. 作为探索，可取 A 为 O，则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，$AB=\sqrt{2}$，$AD=1$，$PO=\sqrt{3}$，

$$V=\frac{1}{3}AD\cdot PO=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

其一般性的解法如下.

解 记 O 为等腰 $\triangle ABC$ 的垂心，如图 4-15，连 AO 交 BC 于 D，则 AD 是 BC 的垂直平分线.

$$OD\perp BC.$$

又 $PO\perp$ 平面 ABC，连 PD，则

$$PD\perp BC.$$

从而 $\angle PDO$ 就是侧面 PBC 与底面 ABC 所成二面角的平面角.

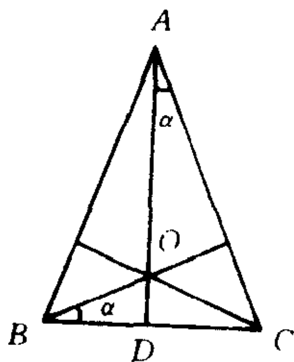


图 4-15

$$\angle PDO=60^\circ,$$

$$PO=\sqrt{3}OD.$$

又在等腰 $\triangle ABC$ 中，记 $\alpha=\frac{A}{2}$，则 $\angle OBD=\alpha$，有

$$OD = BD\tan\alpha = \frac{1}{2}BC\tan\alpha,$$

$$AD = DC\cot\alpha = \frac{1}{2}BC\cot\alpha;$$

相乘 $$AD\cdot OD = \frac{1}{4}BC^2 = 1.$$

得 $$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PO \\ &= \frac{1}{3}AD\cdot PO \\ &= \frac{1}{3}AD\cdot\sqrt{3}OD \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}AD\cdot OD \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad \square \end{aligned}$$

4-1-6 整体原理与解题

任何系统都是有结构的,组成系统的各要素互相关联、互相制约,形成一个整体.我们看问题,不要离开系统去孤立考察某一要素;同时,系统也不是孤立的,它与环境有密切的联系,应把系统置于环境之中去考察.整体原理认为:系统整体的功能不等于各部分功能之和.

$$E_{整} = \sum E_{部} + E_{联}$$

就是说,整体功能等于各部分功能之和再加上各部分相互联系形成结构产生的功能.若系统的结构优化,则 $E_{联}>0$,系统的整体功能就大于各部分功能之和;若系统的结构劣化,则 $E_{联}<0$,系统的整体功能就小于各部分功能之和.

任何一道数学题都是有结构的,整体原理要求我们从整体结构上去全面理解题意,从动态分析中去寻找总体思路.

例4 14 甲、乙两人分别从 A,B 两地同时出发相向而行,两人相遇在离 A 地 10 千米处,相遇后,两人速度不变,继续前进,分别

到达 B,A 之后,立即返回,又相遇在离 B 地 3 千米处.求 A,B 两地间的距离.

讲解　设 A,B 的距离为 x 千米,甲的速度为 v_1,乙的速度为 v_2,那么题目两次表述的条件可列成方程(时间为等量关系)

$$\begin{cases}\dfrac{10}{v_1}=\dfrac{x-10}{v_2},\\[2mm]\dfrac{x+3}{v_1}=\dfrac{2x-3}{v_2}.\end{cases} \qquad ①$$

问题归结为解这个方程组.这是从两个局部分别看问题.若整体去看呢?我们有这样的认识(如图 4－16):

(1) 第一次相遇,甲、乙共同走了一个全程,甲走了 10 千米.

(2) 第二次相遇,甲、乙共同走了三个全程,一方面甲走了 $10\times3=30$ 千米;另一方面甲走了 $x+3$ 千米,有方程

$$x+3=3\times10,$$

得　$x=27$(千米).

两相比较,当然是后者对整体结构的揭示更深刻、更本质.但是前者也可以通过认识的深化而接近问题的本质.将①中的两方程相除,并运用等比定理,有

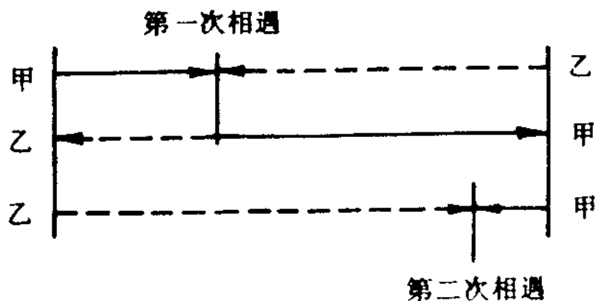


图 4－16

$$\frac{x+3}{10}=\frac{2x-3}{x-10}\xlongequal{\text{等比}}\frac{3x}{x}=3,$$

亦得　$x+3=30.$

在这里,运算代替了分析.所以说,运算是机械化的推理.

例 4－15　某水池装有编号为 1,2,3,…,9 的 9 个进出口水管,

有的只进水,有的只出水.已知所开的水管号与水池灌满时间如下表[1]:

水管号	1,2	2,3	3,4	4,5	5,6	6,7	7,8	8,9	9,1
时间(小时)	2	4	8	16	31	62	124	248	496

若9个水管一齐开,水池多少小时灌满?

讲解　设第 k 号水管灌满水池的时间为 x_k 小时,当 k 号水管只出水时,其灌满水池的时间为负数.依题意有9元方程

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{4},$$
$$\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{x_8}+\frac{1}{x_9}=\frac{1}{248},$$
$$\frac{1}{x_9}+\frac{1}{x_1}=\frac{1}{496}.$$

如果分别解出 $\frac{1}{x_1}=\frac{83}{496},\frac{1}{x_2}=\frac{165}{496},\frac{1}{x_3}=-\frac{41}{496},\frac{1}{x_4}=\frac{103}{496},\frac{1}{x_5}=-\frac{72}{496},\frac{1}{x_6}=\frac{11}{62},\frac{1}{x_7}=-\frac{5}{31},\frac{1}{x_8}=\frac{21}{124},\frac{1}{x_9}=-\frac{41}{248}$.然后再求

$$\frac{1}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_9}}=\cdots=2.\ \square \qquad ①$$

这将不胜其繁.注意到式①中的分母可由9个方程直接相加得出,即

$$2\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_9}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{496}=1, \qquad ②$$

其中用到496为完全数的性质.进而有

---

① 本例系笔者为1989年初中联赛提供的候选试题,后来被改编为第(5)题.见习题六第63(18)题.

$$\frac{1}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_9}}=2.\ \square$$

这种考虑与着眼于局部(求出 $x_1,x_2,\cdots,x_9$)相反,抓住题目的整体结构,直接瞄准最终目标.其实,按照这种思考,设未知数也是多余的.

解 考虑所有水管的两倍一齐开 1 小时可灌满全池的几分之儿.求和

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{496}=1.$$

这表明,恰好把水池灌满.因为 9 个水管的两倍 1 小时可灌满水池,所以 9 个水管一齐开,2 小时灌满. $\square$

例 4-16 三个 12 cm×12 cm 的正方形都被连接两条邻边的中点的直线分成 A,B 两片,如图 4-17(1)所示,把这 6 片粘在一个正六边形的外面,如图 4-17(2)所示.然后折成多面体(如图 4-18),求这个多面体的体积(单位 cm^3).

[美国数学邀请赛第三届第 15 题]

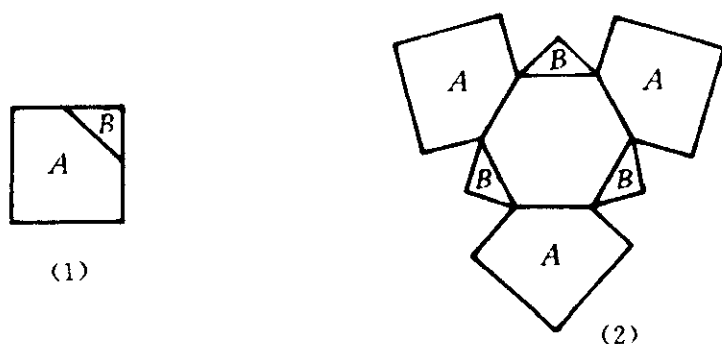


图 4-17

解法 1 如图 4-18,将立体图形分割为一个正六棱锥 $S-ABCDEF$ 与 3 个三棱锥 $S-PAB$,$S-QCD$,$S-REF$ 之和.可以算出 $V_6=\frac{3}{8}a^3$,$V_3=\frac{1}{24}a^3$(其中 $a=12\text{cm}$),得

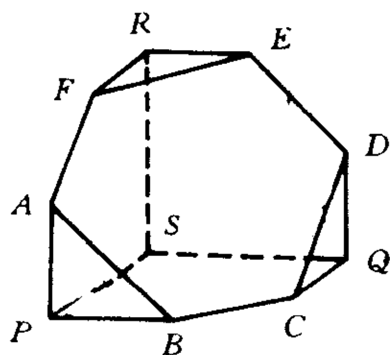


图 4-18

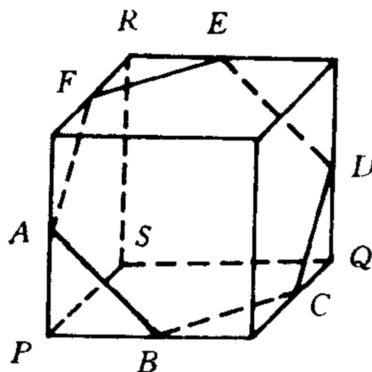


图 4-19

$$V=\frac{3}{8}a^3+3\times\frac{1}{24}a^3=\frac{1}{2}a^3=864(\text{cm}^3).\square$$

解法2 将立体图形补充成一个正方体，如图 4-19，则所求积的几何体是正方体的一半，$V=\frac{1}{2}a^3=\frac{1}{2}\times 12^3=864(\text{cm}^3)$. □[①]

解法 1 是分割，由部分求整体；解法 2 是补充，由整体求部分. 就本例而言，整体处理明显优于分割处理，这也是基本图形的思想(见§6-2-1).

4-1-7 系统与要素

系统是处在一定相互联系中、与环境发生关系的各个组成部分的整体，组成系统的各个单元、因子、部分，即为要素. 视一道数学题为系统时，组成这道题的各个部分就是要素. 比如，函数

$$f(x)=\arctan x+\frac{1}{2}\arcsin x, \quad ①$$

为一个系统，而

$$y_1=\arctan x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), x\in\mathrm{R},$$

$$y_2=\frac{1}{2}\arcsin x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right), x\in[-1,1].$$

---

① 此解法来自当年上海向明中学的学生吴思皓.

便是两个要素.

系统与要素是对立的统一.系统包括要素,要素组成系统,两者是有区别的,同时又是互相依存的,没有要素就没有系统,没有系统就没有要素,孤立的系统或孤立的要素都是不存在的.

当我们欲求出①中函数 $f(x)$ 的值域时(即 1989 年高中联赛第一(2)题),不能把 y_1,y_2 的值域直接相加,得 $\left(-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$.因为要素 y_i 在这个系统里要受到定义域为 $[-1,1]$ 的制约,有

$$-\frac{\pi}{4}\leqslant y_1\leqslant\frac{\pi}{4},x\in[-1,1];$$

$$-\frac{\pi}{4}\leqslant y_2\leqslant\frac{\pi}{4},x\in[-1,1].$$

直接相加还要考虑 y_1,y_2 具有相同的单调性,在

(1) 相同的定义域范围内 $[-1,1]$,

(2) 相同的单调性(增加)条件下,

可由 y_1,y_2 的值域相加得出 $f(x)$ 的值域为

$$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

系统与要素的研究,为分析与综合相统一的科学方法提供了深入阐述的依据,它启示我们,要分析各要素及要素之间的联系方式,综合诸要素成为有机的整体,并讨论系统与外界的相互影响.

例 4－17　已知 $x^2+y^2=1$,求

$$u=x+y$$

的取值范围.

讲解　x,y 是组成 u 的两个要素,由

$$x^2\leqslant x^2+y^2=1,$$

$$y^2\leqslant x^2+y^2=1,$$

知 x,y 的取值范围为

$$-1\leqslant x\leqslant1,$$

$$-1\leqslant y\leqslant1.$$

但我们不能直接相加,得出 u 的取值范围:

$$-2\leqslant u\leqslant 2.$$

因为各要素之间是互有联系、相互制约的.因而 x,y 不能同时取最大、最小值.我们用参数方程的形式把这种联系

$$x^2+y^2=1$$

反映出来,有 $\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=\sin\alpha;\end{cases}\quad(0\leqslant\alpha<2\pi)$

$$u=\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

故 u 的取值范围为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. □[①]

例 4-18　解不等式

$$\sqrt{3x-4}>\sqrt{x-3}.$$

[原高中代数第二册 P.102 例 5]

解法 1　因为根式必须有意义,所以先解不等式组

$$\begin{cases}3x-4\geqslant 0,\\ x-3\geqslant 0,\end{cases}$$

得 $$\{x\mid x\geqslant 3\}.\qquad①$$

另一方面,对原不等式两边平方得

$$3x-4>x-3,$$

移项,整理后解得 $\left\{x\,\middle|\,x>\frac{1}{2}\right\}.\qquad②$

由①、②取交集,得原不等式的解集是

$$\{x\mid x\geqslant 3\}.\ □\qquad③$$

这个解法见于习题三第 12 题,没有任何知识上的问题,结论也是对的.但从方法论的角度看,存在思维回路,因为式①与式③是一样的,先求式②然后合并再去掉不是必要的.从系统方法论的观点看,上述解法没有揭示出构成不等式左右两边两个要素之间的联系.

解法 2　将原式化为

---

① 由不等式 $(x+y)^2\leqslant 2(x^2+y^2)=2$,也能简便求出范围.

$$\sqrt{3(x-3)+5}>\sqrt{x-3}.$$

这表明,在右边有意义时,左边也有意义且恒大于右边,故不等式的解就是$\sqrt{x-3}$的存在域

$$x\geqslant 3.\ \square$$

这种处理的特点是,将左边要素与右边要素结合起来思考,避免了盲目性,也开发出了解题智慧.(请思考问题的几何意义)

4-1-8 过程与状态

系统的状态是指系统稳定性的一面,而系统的过程是指系统变化性的一面,稳定与变化是相互区别又相互依存的.没有过程的状态是不存在的,没有状态的过程也是不存在的,系统的状态决定和影响着过程,系统的过程又决定和影响着新的状态,如此循环往复,两者总是相互联系的.

例4-19 求证

$$S=\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\sqrt{1991})^k\right]\left[\sum_{k=0}^{n}(\sqrt{1991})^k\right]$$

是整数.

讲解 为了证明 S 为整数,我们来设计一个"过程",引进函数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k,$$

及

$$F(x)=f(-x)f(x)=\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^k\right]\left(\sum_{k=0}^{n}x^k\right).$$

当 $x=\sqrt{1991}$时,就呈现 S 这种状态

$$F(\sqrt{1991})=S.$$

当我们研究清楚了一般运动过程的性质(即函数 $F(x)$的性质)时,便可导出该过程在特殊静止状态下也应具有同一性质(由一般到特殊).由

$$F(-x)=F(x),$$

知多项式 $F(x)$是偶函数,有

$$F(x)=\frac{F(-x)+F(x)}{2},$$

可知 $F(x)$ 只含 x 的偶次项，成为关于 x^2 的整系数多项式，取 $x^2=1991$ 可得 $S=F(\sqrt{1991})$ 是整数．□

上述处理的实质是，将所面临的问题放到一个更加波澜壮阔的背景上去考察．这能使我们站得更高，看得更本质．事实上，完成上题之后，我们立即可以把 1991 改为任意一个自然数．

例 4－20　如图 4－20，在矩形 $ABCD$ 中，P 为对角线 BD 上一点，$AP\perp BD$，$PE\perp BC$，$PF\perp CD$，求证：

$$\left(\frac{PE}{BD}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{PF}{BD}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

讲解　在这个问题中，矩形的形状和大小没有限定，但 PE，PF，BD 的关系是恒定的，求证式反映了这种关系的运动过程．

为了获得这一运动过程，我们先来考虑某一状态，当 $\angle ADB$ 为某一确定的锐角 α 时，则

$$\angle PAB=\angle PBE=\angle ADB=\angle DPF=\alpha.$$

有　$PE=PB\sin\alpha$　（Rt$\triangle PBE$ 中）

$=AB\sin^2\alpha$　（Rt$\triangle APB$ 中）

$=BD\sin^3\alpha$，（Rt$\triangle ABD$ 中）

即　$\dfrac{PE}{BD}=\sin^3\alpha$

同理　$\dfrac{PF}{BD}=\cos^3\alpha$.

实质上，这是 $\left(\dfrac{PE}{BD},\dfrac{PF}{BD}\right)$ 的一种状态

$$(\sin^3\alpha,\cos^3\alpha).$$

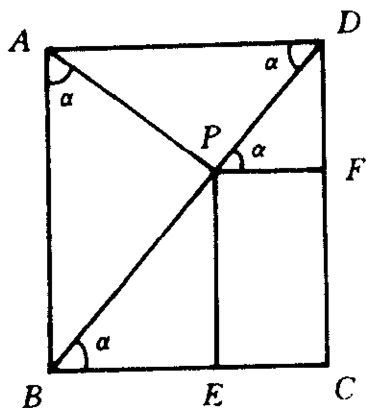


图 4－20

由状态去认识过程，有

$$\left(\frac{PE}{BD}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{PF}{BD}\right)^{\frac{2}{3}}=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

在状态特征(α)隐去的同时，过程的性质显现了，这时候的 PE，PF，

BD 也从某种状态中的线段升华为一般情况下的线段.表现为过程与状态的统一.

本例的另一思考是,为了证明

$$\frac{PE}{BD}=\sin^3\alpha,$$

先使量纲一致,化为

$$\frac{PE\cdot x\cdot y}{x\cdot y\cdot BD}=\sin^3\alpha.$$

下面的工作就有方向了.

4-1-9 结构与功能

结构是指系统内部各个要素的组织形式,而系统在一定环境中所能发挥的作用便是功能.结构与功能是对立的统一,相反的结构可以表现为不同的功能,而相同的功能可以通过不同的结构来实现.

结构是各要素的联系形式,它主要反映了系统内部的整体性,而功能主要反映系统与环境的相互联系、相互作用所表现出来的能力.

下面介绍一个由功能认识结构的重要方法——黑箱方法.这是一种由表及里、由功能到结构的认识客体的科学方法.它的基本形式是,通过观察输入和输出的信息来推断黑箱的结构.

一道数学题是一个黑箱,通过信息的输入、输出而破译黑箱就是解题.

我们可以把求解二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 看成是一个黑箱模型,输入的量是 a,b,c 三个系数,输出是二次方程的两个根 x_1 和 x_2.这里的黑箱(或传输系统或变换)经破译出来就是求根公式(图 4-21).

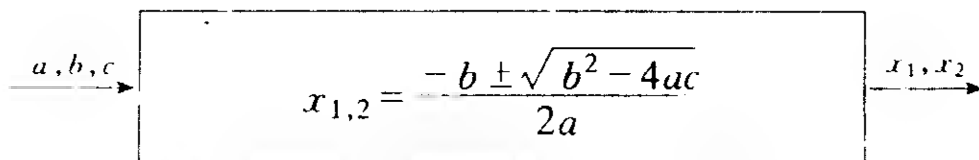


图 4-21

例4-21　一个计算机的程序设计为单调或连续函数 f(是个黑箱). 当输入 x 时,输出为 $f(x)$;当输入 y 时,输出为 $f(y)$;当输入 $(x+y)$时,输出为 $f(x)+f(y)$. 求 $f(x)$(其中 $f(1)\neq 0$).

讲解　由黑箱输入、输出



图4-22

可得对应规律为柯西函数方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

解得(见例6-13,P.358)

$$f(x)=ax\ \ (a=f(1)).\Box$$

例4-22　已知一个自然数被3除余2,被5除余3,被7除余2,求这个数①.

讲解　把这个数设为 x 并看成黑箱,分别输入3个信息、得出3个输出信息



图4-23

有

$$\begin{cases} x\equiv 2 \pmod 3, \\ x\equiv 3 \pmod 5, \\ x\equiv 2 \pmod 7. \end{cases}$$

解得

$$x=105k+23.\ (k=0,1,2,\cdots)$$

其中最小的自然数为23. □

例4-23　在极坐标系中,椭圆的二焦点分别在极点和$(2c,0)$上,离心率为 e,则它的极坐标方程是

---

①　《孙子算经》原文是:"今有物不知其数,三三数之剩二,五五数之剩三,七七数之剩二,问物几何?"

A. $\rho=\frac{c(1-e)}{1-e\cos\theta}$　　B. $\rho=\frac{c(1-e^2)}{1-e\cos\theta}$

C. $\rho=\frac{c(1-e)}{e(1-e\cos\theta)}$　　D. $\rho=\frac{c(1-e^2)}{e(1-e\cos\theta)}$

[1995 年数学理科高考题]

讲解　这里的 4 个选择支便是 4 个黑箱，而根据题目的要求我们只需肯定一个或否定三个，并不需要对每一个黑箱的内部结构完全弄清楚. 我们输入一个特殊点加以观察. 取 $\theta=0$，相应的应有 $\rho=a+c$，但

A. $\rho=c$　　B. $\rho=c+\frac{c^2}{a}$

C. $\rho=a$　　D. $\rho=a+c$

只有 D 是相容的，否定 A,B,C 可得 D. □

"定值问题"先特殊化找出定值，然后给出一般性的证明，是一种典型的黑箱方法. 黑箱方法的独到之处就在于，即使不知道（甚至无法知道）系统内部的构造、机理时，我们仍然可以通过外部观察而了解系统的整体功能①.

4－2　解题坐标系

解题坐标系是我们研究解题的一个工具，它反映了用数学手段研究数学解题的一种愿望. 本节将尝试用这种观点研究解题思路的探求、解题过程的改进和解题成果的扩大.

4－2－1　解题坐标系的建立

如果我们把解题依据粗略地分解为数学方法的实施与数学原理（概念、公理、定理、公式等）的应用，那么数学问题系统可以表示成一个解题坐标系，说明如下.

① 李仁夫. 系统科学在数学教育中的渗透. 数学通报，1992，3，$P.1$.

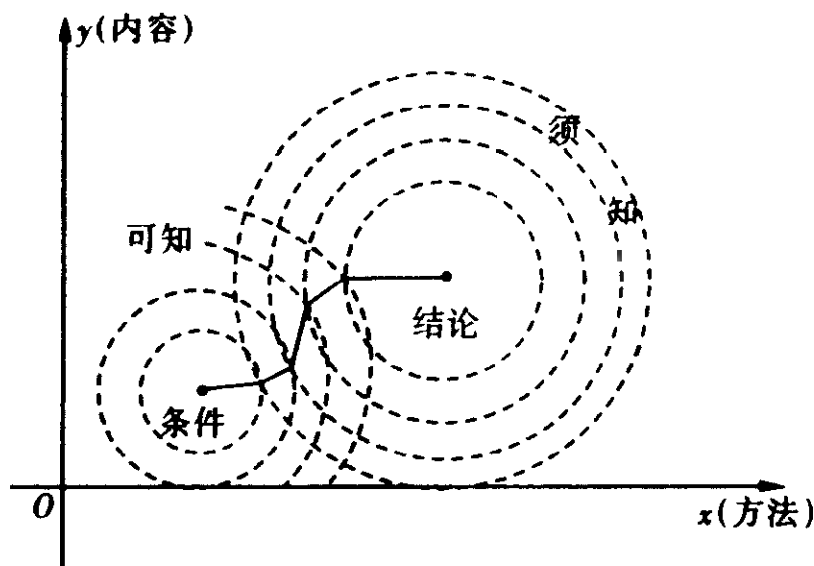


图4　24

1. 以横轴表示数学方法方面的实施(记为方法轴),以纵轴表示数学原理方面的应用(记为内容轴),题目的条件和结论(包括题目求证的结论与题目未写出的结论)分别表示为坐标平面上的两个点.它们的存在形式本身是内容与方法的统一,两个思考方向的交叉——原点,显示出这样一个原则:内容与方法的统一是我们解题思考的基本出发点.

2. 解题示意为连结两点间的一条折线,这条折线记录了数学思维的轨迹.它告诉我们,寻求条件与结论之间的逻辑通道是解题的思考中心.在这个思考中,横轴方向的推进表示方法或技巧的运用,纵轴方向的推进表示数学内容的转化,整个解题过程就是内容与方法的联系与转化过程.就是在数学观点的指导下,运用数学方法,转化数学内容的推理过程.

3. 审题,尽量从题意中获取更多的信息,可以表示为以条件或结论为中心的一系列同心圆.从条件出发的同心圆信息,预示可知并启发解题手段;从结论出发的同心圆信息,预告须知并诱导解题方向,两组同心圆的交接处(中途点),就是分别从条件、结论出发进行

思考的结合点,也是手段与目标的统一处.所谓综合法就是结合点落在结论上,所谓分析法就是结合点落在条件上.当已知为充分条件时,就形成从已知经中途点到结论的有向链;当已知也是必要条件时,就形成从结论经中途点到已知的有向链;当已知既充分又必要时,就形成一个圈.

4. 在解题坐标系上,内容是提供方法的内容,方法是体现内容的方法.解题坐标系上的每一点,一方面是内容与方法的统一,另一方面其在两轴上的投影又都不惟一.同一内容可以从不同的角度去理解,同一方法可以在不同的地方发挥效能.同一个数学存在 A(图 4-25),可以看成(x_1,y_1),(x_1,y_2),(x_1,y_3),…,(x_2,y_1),(x_2,y_2),(x_2,y_3),…,(x_3,y_1),(x_3,y_2),(x_3,y_3),等等.这里的 y_1,y_2,y_3…均与 A 有关,说明这些内容存在着转化关系,实质上是同一知识链上的几个知识点;同样,x_1,x_2,x_3,…,也与 A 有关,说明这几个方法或技巧存在着内在联系,实质上是同一条方法链上的几个环节.这就为多角度、多侧面考虑数学对象及其之间的关系提供了理论依据.

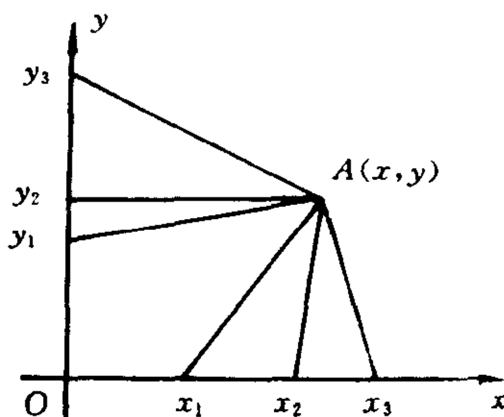


图 4-25

5. 结论也是已知信息.这是解题坐标系的一个特点,当我们把结论表示为坐标系上的一点时,结论就成为已知与未知的统一了,在寻找思路的过程中,我们可以把它当做已知条件来使用,就像列方程解应用题时的未知数.事实上,对于“题”而言,结论隐含在条件之中,当条件给定时,结论也在客观上随之确定,只不过是隐蔽给定而已.称为客观上确定与隐蔽地给予的统一.要注意从结论获取信息!要目不转睛地盯着目标前进!

6. 无论是对横轴方向的思考,还是对纵轴方向的思考,也无论是从题目条件中获取信息,还是从题目结论中获取信息,都要提取业已储存的信息,都要对信息进行加工、运用,都要收集信息的反馈,并进行再处理,这里面包含着辩证思维与直觉思维,它们弥漫在整个解题坐标平面上,体现了解题活动的实质是思维活动.一条题解折线的画出,往往经历过许多类比、联想、归纳、尝试和失败,这就像在解题坐标系上,试着用铅笔画草图折线,画了又擦,擦了又画,但决不是盲目瞎碰,有时一个机智的数学念头导致了一个卓有成效的解题计划.这个念头恰好是有准备的思考和解题经验长期积累的升华,是微信息由于有意识的捕捉而瞬间强化.

7. 图4-24有助于理解数学证明的心理机制就是在问题的条件及结论的启发下,激活记忆网络中的一些知识点,然后沿接线向外扩散,依次激活新的有关知识.同时,要对被激活的知识进行筛选、组织、评价、再认识和转换,使之协调起来,直到条件与结论之间的线索接通,建立起逻辑演绎关系.上述“扩散—激活”的观点,是数学证明思维中心理过程的一种解释.

例4-24　已知$\frac{\sqrt{2}b-2c}{a}=1$,求证 $b^2\geqslant 4ac$.

讲解　单纯从外形上思考,就是消除已知与求证之间两个主要差异(差异分析):

第一　字母指数上“一次与二次”的差异;

第二　数式关系上,“等式与不等式”的差异.

于是,从已知出发,我们可以通过“平方”来升次,再由等式甩掉非负项而导出不等式.比如,先由已知解出

$$b=\frac{a}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}c\ . \qquad (A_1)$$

平方升次

$$b^2=\frac{a^2}{2}+2ac+2c^2 \qquad (A_2)$$

$$=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}c\right)^2+4ac \qquad (A_3)$$

$$\geqslant 4ac. \square \tag{A_4}$$

应该说，这种解法对题目结构的分析是正确的，方法或技巧的应用也是成功的，但是，这种解法像例行差事一样缺少特色，在解题坐标系中，主要表现为横向的推进：恒等变形、乘方、配方、放缩技巧等.

A_1(算术运算，一次等式)，

A_2(平方，二次等式)，

A_3(配方，二次等式)，

A_4(缩小，二次不等式).

其题解析线如图 4－26 所示.

如果我们不是绝对地把$\sqrt{2}$看成是静止的“已知数”，而是未知数的一个取值，那么，已知条件就表明二次方程有实根

$$\begin{cases} ax^2+bx+c=0, \\ x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \tag{B_1}$$

从而判别式非负

$$b^2-4ac\geqslant 0 \Leftrightarrow b^2\geqslant 4ac. \square$$

这样，两句话就把题目解完了，是二次方程的理论代替了乘方、配方的过程与不等式“放缩法”的技巧.

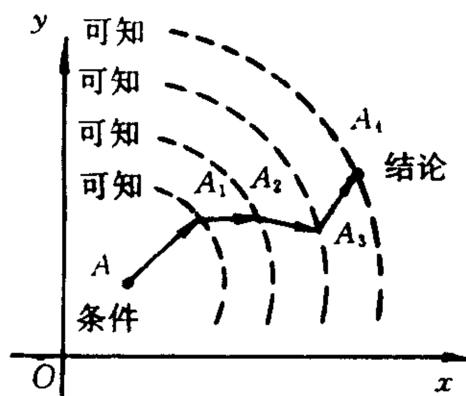


图 4－26

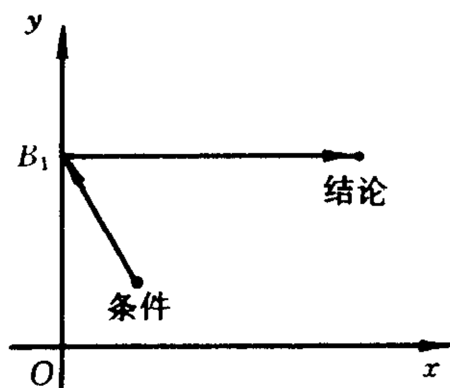


图 4－27

在解题坐标系上，后一求解主要表现为纵向的转化：

第一、由等式转化为方程.这从系统论看来,就是使系统开放,并为静止、孤立的状态设计一个更为生动,更为广阔的过程.

第二、由方程有实根得出结论.于是在方程的观点之下,思维链被大大简约.在图 4-27 中,

B_1(概念转化,方程有实根).

这个 B_1 是已知条件在内容轴上的投影.

为了得出 $b^2 \geqslant 4ac$,前一思考更注重形式上的一致,表现为思维比较具体、比较平缓的演算,含有较多的线性思维的形式;后一种思考更注意内容上的转化,表现为思维比较抽象,比较跳跃的推理,含有较多的多元思维形式.两相比较,后者观点更高,能力更强,格调更新.把内容与形式结合起来思考、把方法运用与概念转化配合起来推进,必然思路更加宽广、风格更加高雅.

例 4-25　已知　$a+b+c=0$,求证 $a^3+b^3+c^3=3abc$.

讲解　对 $a=b=c$ 的平凡情况,自不待言.只需考虑 a,b,c 不全为零的情况.

如果仅仅从方法技巧上考虑,那么本题就是一个"从等式到等式"的条件等式问题(其解决办法是恒等变形);外形上的差异只有字母上的"指数",立即可以想到两个处理方法.

解法 1　从已知出发,"乘方"升幂为求证式

$$
\begin{aligned}
0 &= [(a+b)+c]^3 && (A_1)\\
&= (a+b)^3+3(a+b)c[(a+b)+c]+c^3 && (A_2)\\
&= [a^3+3ab(a+b)+b^3]+0+c^3 && (A_3)\\
&= a^3+b^3+c^3-3abc.
\end{aligned}
$$

移项即得. □

解法 2　从求证式出发,分解、归结为已知式

$$
\begin{aligned}
&a^3+b^3+c^3-3abc\\
&= (a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc && (B_1)\\
&= [(a+b)+c][(a+b)^2-(a+b)c+c^2]-3ab(a+b+c) && (B_2)
\end{aligned}
$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca). \qquad (B_3)$$

代入已知即得. □

这两个解法对题目结构形式的分析是正确的、方法或技巧的运用也是成功的,但思维层次停留在较为具体平缓的演算水平上.其题解折线如图 4-28(1)、(2)所示.

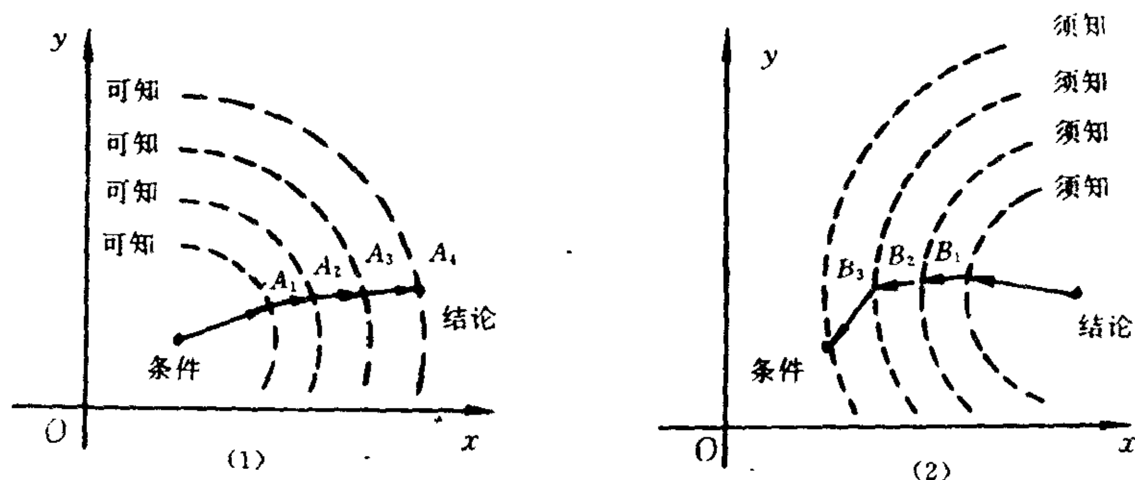


图 4-28

如果我们给等式 $a+b+c=0$ 赋予活的数学内容,那将出现一种新的格局.首先,它不再是一个静止的等式,而是方程

$$ax+by+cz=0,$$

有非零解 $x=y=z=1$.

其次,它不再是一个孤立的等式,而是三个同样的等式

$$a+b+c=0,$$

$$c+a+b=0,$$

$$b+c+a=0.$$

最后,将上述两个看法结合起来,得齐次线性方程组

$$\begin{cases}ax+by+cz=0,\\ cx+ay+bz=0,\\ bx+cy+az=0.\end{cases} \qquad (C_1)$$

有非零解 $x=y=z=1$,从而系数行列式等于零

$$0=\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \qquad (C_2)$$

$$=a^3+b^3+c^3-3abc. \qquad (C_3)$$

变形即得. □

这里,既没有用到乘方公式,也没有用到因式分解技巧,是对方程解的定义的理解,把 $a+b+c=0$ 转化为齐次线性方程组,从而归结为行列式的简单展开. 在解题坐标上,表示为图 4-29.

将上述思路作等价移植,有下面的行列式证法①.

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix}$$
$$=0.$$

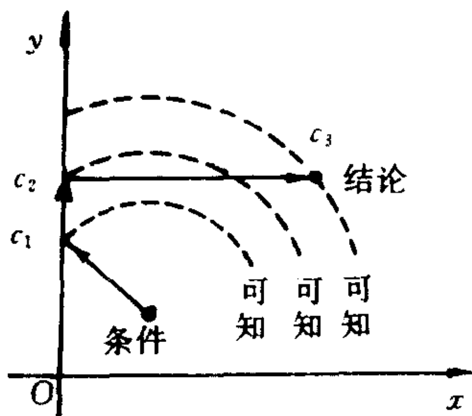


图 4-29

4-2-2　解题思路的探求

结合解题坐标系的结构特点,我们提出探求解题思路的 5 个基本原则.

1. 平面结构原则

① 还有一证法是以 a,b,c 为根作三次方程 $(x-a)(x-b)(x-c)=0$, 即 $x^3+(ab+bc+ca)x-abc=0$,再把 $x=a,b,c$ 分别代入后相加.

将数学内容与数学方法结合起来，组成一个平面结构，正是解题坐标系的特点，由此派生出来的第一个解题原则，我们称为平面结构原则.

平面结构原则是说，在解题思路的探求中，要注重内容与方法的统一.因而，要自觉地把数学观点、数学概念、数学定理、数学公式、数学方法、数学技巧等作为一个整体而结合起来集中思考.例如

(1) 对题目的结构，不仅注重外形上的分析，而且注重内容上的理解，能从一个孤立静止的数学形式中找出关联活动的数学内容.比如，把一个已知数看成是未知数的取值，把一个常量看成是变量的瞬时状态，把一个图形看成两个图形的重合，把一种数学存在看成是另一种数学存在的条件或结果等等，这些认识之所以可行，是因为一定的数学内容总是要表现为一定的数学形式，而一定的数学形式又总能反映某些数学内容.例 4－24、例 4－25 已经体现了这些认识.下面，再看一个例子.

例 4－26 证明 等腰三角形两个底角相等.
[习题三第 4 题]

讲解 如图 4－30，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$.为了证明$\angle B=\angle C$，通常是作底边上的高，将其分成两个全等的三角形.这是把图 4－30 看成只有一个三角形，为了得出一对全等三角形只好作辅助线.但是，全等三角形就是能够重合的三角形，把重合在一起的三角形分开(就像初中老师扯开纸皮三角形那样)，我们就在图 4－30 上看到$\triangle ABC$与$\triangle ACB$(集合$M=M\cup M$)，有

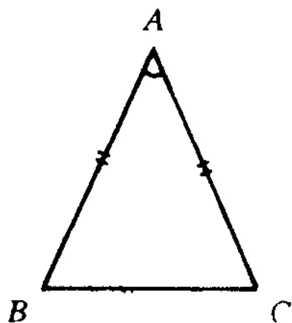


图 4－30

$$AB=AC,$$

从而 $$AC=AB;$$

且 $$\angle A=\angle A\ (\text{或 } BC=CB),$$

得 $$\triangle ABC\cong\triangle ACB.$$

有　$\angle B=\angle C$. □

(2) 解题过程中不仅要注意方法技巧的应用,而且要揭示数学内容的转化,注意从内容的联系上去寻找解题思路.同时,在数学内容的应用上,不仅仅限于定理、公式的应用,还注意数学概念、特别是定义的应用.经验告诉我们,“方法是对内容的理解”、“方法寓于概念之中”.

例4-27　已知等差数列 a,b,c 中的三个数都是正数,且公差不为零,求证它们的倒数所组成的数列 $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ 不可能成等差数列.[1984年高考文科试题]

讲解　在参考文献[35]P.242中曾经给出了本题的4种解法,并且指出“a,b,c 为正数”的条件可以舍去,但都还没有对其“内容”作出揭示,其实题目的实质是双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 上不同的3点 $\left(a,\frac{1}{a}\right)$, $\left(b,\frac{1}{b}\right)$, $\left(c,\frac{1}{c}\right)$ 不能共线.

证明　建立平面直角坐标系,若 $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ 成等差数列,则 $A\left(a,\frac{1}{a}\right)$, $B\left(b,\frac{1}{b}\right)$, $C\left(c,\frac{1}{c}\right)$ 3点共线,但 A,B,C 又在双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 上,必有两点重合,$a=b$ 或 $b=c$ 或 $a=c$ 皆与“公差不为零”矛盾,命题得证. □

例4-28　已知 $abc\neq0,\varphi+\theta\neq m\pi,\varphi-\theta\neq n\pi,m,n\in\mathbf{Z}$,且

$$a\cos\theta+b\sin\theta=c,$$
$$a\cos\varphi+b\sin\varphi=c;$$

求证

$$\frac{a}{\cos\frac{\theta+\varphi}{2}}=\frac{b}{\sin\frac{\theta+\varphi}{2}}=\frac{c}{\cos\frac{\theta-\varphi}{2}}.$$

讲解　这原是中学课本的一道习题,笔者当时正在教中学,已经产生了解题坐标系的思想,将等式赋予直线方程的几何内容,于

1981 年得出一个新解法[1].

证明 已知表明不同的两点

$$A(\cos\theta,\sin\theta),$$
$$B(\cos\varphi,\sin\varphi),$$

都在直线 $ax+by=c$ ①

上,但 A,B 又决定一条直线方程

$$(\cos\theta-\cos\varphi)(y-\sin\varphi)=(\sin\theta-\sin\varphi)(x-\cos\varphi),$$

即 $$x\cos\frac{\theta+\varphi}{2}+y\sin\frac{\theta+\varphi}{2}=\cos\frac{\theta-\varphi}{2}.\qquad ②$$

因为两点确定惟一一条直线,所以,上述两条直线重合,得对应系数成比例

$$\frac{a}{\cos\frac{\theta+\varphi}{2}}=\frac{b}{\sin\frac{\theta+\varphi}{2}}=\frac{c}{\cos\frac{\theta-\varphi}{2}}.\ \square$$

用直线重合来处理"一类双参数曲线系过定点问题"既新颖又有效,请参见《数学通讯》1984 年第 11 期,P.22.

2. 广角投影原则

由于一定的数学内容可以有多种不同的存在形式,同一数学形式又可以从多种内容上去理解,因此,在解题坐标系上,每一点的坐标是不惟一的,由此产生解题思路探求的广角投影原则.

广角投影原则是说,在解题思路的探求中,要将条件或结论向两轴作多角度的投影.

希尔伯特在巴黎世界数学家代表大会上曾经说过:"数学学科是一个不可分割的有机整体,它的生命力正在于各个部分之间的联系.的确,数学最为迷人之处是不同分支之间有许多相互影响,预想不到的联系有时会奇迹般的展现在你的眼前."

在这个多角度的投影中,数学知识不是孤立的单点或离散的片断,数学方法也不是各别无关的一招一式,它们血肉相连,组成一条

---

① 见中学数学教学(安徽),1982,3,P.44.

一条的知识链，并结构为知识体系．解题思路探求的敏捷性、发散性就在于，当知识链中的某一环节受到刺激时，整条知识链就都活跃起来．有意识地积累知识链，是优化知识结构的一个途径，也是广开解题思路的一个源泉，脑子里的知识链越多、越长，解题的思路与念头也就越广、越快．

例 4－29　已知 $|a|<1$，$|b|<1$，求证

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1.$$

讲解　这是莫斯科第十五届(1952 年)数学竞赛的一道试题，现已进入中学课本作例题．

(1) 从知识链上展开

观察题目中的条件和结论，容易看到一个共同的形式：$|x|<1$．而这有一系列的等价关系，即数学内容上的联系或"知识链"．

$$|x|<1\Leftrightarrow x^2<1$$
$$\Leftrightarrow -1<x<1$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)<0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1}<0$$
$$\Leftrightarrow\cdots\cdots$$

这些可以看成是条件或结论在解题坐标系的纵轴上的一系列投影(图 4－31)，每一个投影都将触发一个解题思路．

思路 1　$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)^2<1$$
$$\Leftrightarrow(a+b)^2<(1+ab)^2$$
$$\Leftrightarrow(1+ab)^2-(a+b)^2>0$$
$$\Leftrightarrow 1+a^2b^2-a^2-b^2>0$$
$$\Leftrightarrow(1-a^2)(1-b^2)>0$$

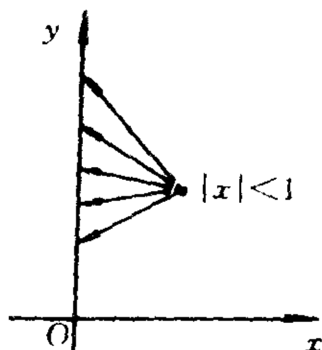


图 4－31

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |a|<1 \\ |b|<1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} |a|>1 \\ |b|>1 \end{cases}. \square$$

可见条件是充分而不必要的.

由上述思路可得一个恒等式①

$$(1+ab)^2-(a+b)^2=(1-a^2)(1-b^2). \quad ①$$

它使得证明成为显然.

思路2 $\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1$

$$\Leftrightarrow -1<\frac{a+b}{1+ab}<1$$

$$\Leftrightarrow -(1+ab)<a+b<1+ab$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+1+ab>0 \\ a+b-1-ab<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+a)(1+b)>0 \\ (1-a)(1-b)>0. \end{cases}$$

由已知得最后一式成立.事实上,有

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{-(1+ab)}{1+ab} \\ &< \frac{-(1+ab)+(1+a)(1+b)}{1+ab} \\ &= \frac{a+b}{1+ab} \\ &= \frac{(1+ab)-(1-a)(1-b)}{1+ab} \\ &< \frac{1+ab}{1+ab} \\ &= 1. \end{aligned}$$

---

① 由 $x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)$,

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$,

相乘,可得更一般性的恒等式

$(x^2+ab)^2-(a+b)^2x^2-(x^2-a^2)(x^2-b^2)$.

或
$$-(1+ab)<-(1+ab)+(1+a)(1+b)$$
$$=a+b$$
$$=(1+ab)-(1-a)(1-b)$$
$$<1+ab.\ \square$$

思路3 $$\left(\frac{a+b}{1+ab}+1\right)\left(\frac{a+b}{1+ab}-1\right)$$
$$=-\frac{(a^2-1)(b^2-1)}{(1+ab)^2}<0.\ \square$$

事实上,这只是恒等式①的变形.

思路4　设 $x=\frac{a+b}{1+ab}$,

合比分比 $$\frac{x-1}{x+1}=-\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}<0.\ \square$$

若再作合比分比,可得到一个始料未及的解法.

思路5 $$x=\frac{(1+a)(1+b)-(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)+(1-a)(1-b)}.$$

两个正数的差与这两个正数和之比,必在 -1 与 $+1$ 之间.

若化为 $$x=\frac{+1+(-1)\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}}{1+\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}},$$

正是 x 分 -1 与 $+1$ 为定比 $\lambda=\frac{(1+a)(1+b)}{(1-a)(1-b)}>0.\ \square$

(2) 从转化链上联想

$$|x|<1\Leftrightarrow x \text{ 在 } -1 \text{ 与 } +1 \text{ 之间}$$
$$\Leftrightarrow \text{存在 } \lambda>0,\text{使 } x=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$$
$$\Leftrightarrow \text{函数 } F(x)=\frac{1-x}{1+x}\text{的性质}$$
$$\Leftrightarrow \text{更多函数的性质.}$$

同样,这些也是解题坐标系纵轴上的一系列投影.示意仍如图 4-31.

思路6　由 $|a|<1$ 知,存在 $\lambda_1>0$ 使

$$a=\frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1},$$

同理,存在 $\lambda_2>0$ 使

$$b=\frac{1-\lambda_2}{1+\lambda_2}.$$

从而
$$\frac{a+b}{1+ab}=\frac{\frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1}+\frac{1-\lambda_2}{1+\lambda_2}}{1+\frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1}\frac{1-\lambda_2}{1+\lambda_2}}=\frac{1-\lambda_1\lambda_2}{1+\lambda_1\lambda_2}.$$

由 $\lambda_1\lambda_2>0$ 知,$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$. □

思路7 引进函数

$$F(x)=\frac{1-x}{1+x}.$$

有
$$x>0\Leftrightarrow|F(x)|<1.$$

取 $x_1>0,x_2>0$,使[1]

$$a=F(x_1),\ b=F(x_2),$$

则
$$\frac{a+b}{1+ab}=F(x_1x_2).$$

但 $x_1x_2>0$,故得 $|F(x_1x_2)|<1$,

即
$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1.$$ □

思路8 引进函数

$$f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x},$$

其定义域为$(-1,1)$.取 $a,b\in(-1,1)$,有

$$f(a)+f(b)=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right).$$

由左边存在知右边也存在,得$\frac{a+b}{1+ab}$属于定义域$(-1,1)$. □

---

① 实质上是 $x_1=\frac{1-a}{1+a},x_2=\frac{1-b}{1+b}$.

思路 9[1]　设 $c=\dfrac{a+b}{1+ab}$,有

$$(1+ab)c-(a+b)=0,$$

作一次函数　$g(x)=(1+ab)x-(a+b)$,

是增函数,但 $g(-1)=-(1+a)(1+b)<0$,

$$g(1)=(1-a)(1-b)>0;$$

得　$g(-1)<g(c)<g(1)$.

由增函数知　$-1<c<1$. □

这就把不等式的证明,归结为函数值的验证与定义域范围的研究.

思路 10　作一次函数

$$f(x)=\frac{x+(a+b)}{1+ab},$$

是增函数,取

$$x_1=-(1+ab)-(a+b)=-(1+a)(1+b)<0,$$

$$x_2=(1+ab)-(a+b)=(1-a)(1-b)>0;$$

有　$f(x_1)=-1$,

$$f(x_2)=1.$$

由单调性,得　$-1=f(x_1)<f(0)<f(x_2)=1$. □

这又把不等式的证明,归结为函数值的验证与值域范围的研究.

(3) 从形数结合上沟通

1) 从函数图像上看(作出上述有关函数的图像来研究,略)

2) 从面积上看

1°　在直角坐标系上取点 $A(1,a)$, $B(1,-b)$, $M(1-b,1-b)$,图 4-32 是 $a>0,b>0$ 时的示意图.其他情况可逐一讨论,有

$$\frac{|a+b|}{2}$$

---

[1] 笔者于 1988 年获得这一解法,后来发表在 1990 年第 6 期的《数学通报》上,见该刊 P.17,例 2.

$= S_{\triangle AOB}$

$< S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOM}$

$= \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{(1-b)(1-a)}{2}$

$= \dfrac{1+ab}{2}$. □

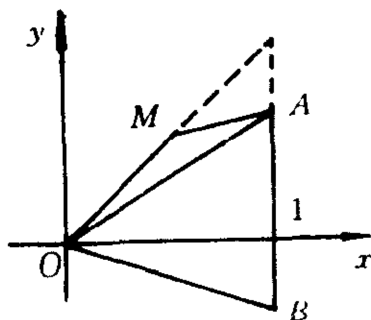


图 4-32

2° 在直角坐标系上，作单位圆，取 $A(a,0)$，$B(0,b)$，$G(a,b)$. 图 4-33是 $a>0$，$b>0$ 时的示意图，其他情况可逐一讨论，有

$$S_{OAFN} + S_{OMEB}$$
$$< S_{OAGB} + S_{OMCN},$$

即 $a+b<ab+1$. □

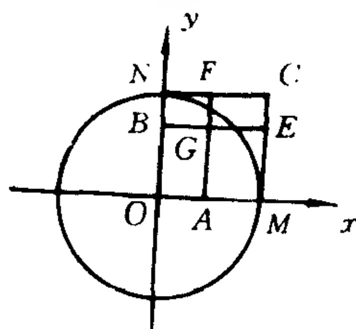


图 4-33

3) 从斜率上看

1° 在直角坐标系上取点 $A(1,a)$，$A_1(a,1)$，$A_2(-a,-1)$，$B(-ab,-b)$，则 A_1，A_2，B 三点共线

$$x-ay=0.$$

且由 $|b|<1$ 知，B 在 A_1，A_2 之间，因为 B 分 A_1，A_2 为定比 $\lambda = \dfrac{1+b}{1-b}>0$;，又易知 A 与 A_1 关于 $y=x$ 对称. 示意如图 4-34:

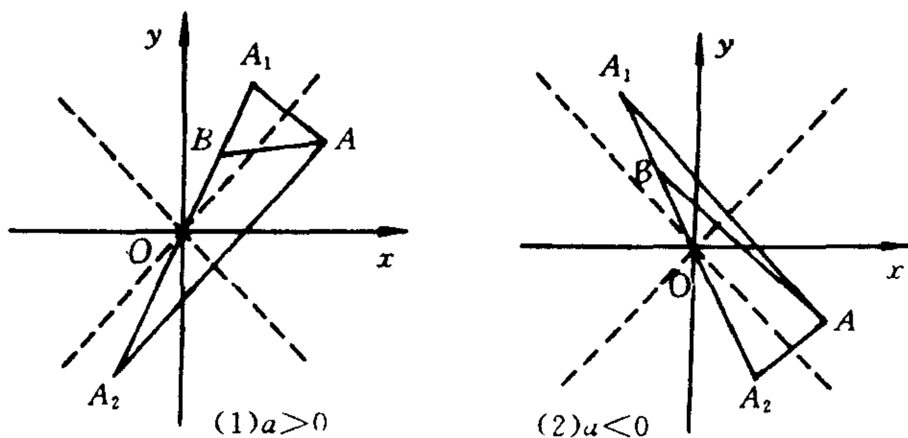


图 4-34

显然 AB 的斜率在 AA_1 的斜率与 AA_2 的斜率之间，但

$$k_{AA_1}=-1,\ k_{AA_2}=1,k_{AB}=\frac{a+b}{1+ab}.$$

有
$$-1=k_{AA_1}<k_{AB}<k_{AA_2}=1.$$

即
$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1.\ \square$$

2° 在直角坐标系上取点[1]

$$A\begin{cases}x_A=(1+a)(1+b),\\ y_A=(1+a)(1+b);\end{cases}$$

$$B\begin{cases}x_B=-(1-a)(1-b),\\ y_B=(1-a)(1-b).\end{cases}$$

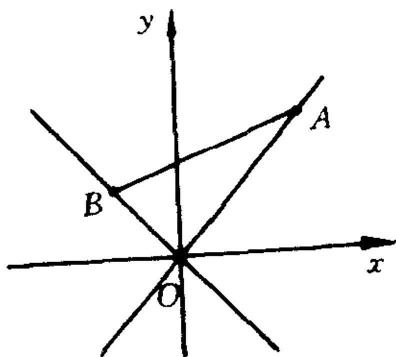


图 4-35

则直线 AB 的斜率在 OB，OA 的斜率之间(图 4-35)

$$k_{OB}<k_{AB}<k_{OA}.$$

有
$$-1<\frac{(1+a)(1+b)-(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)+(1-a)(1-b)}<1.\ \square$$

(4) 更广泛的联想(仅给出思路)

1) 面积

用行列式表示

$$a+b=\begin{vmatrix}1 & -a\\ 1 & b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -a\\ 1 & 1 & b\end{vmatrix},$$

$$1+ab=\begin{vmatrix}1 & -a\\ b & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -a\\ 1 & b & 1\end{vmatrix}.$$

若在直角坐标上取 $A(1,-a)$，$B(1,b)$，$C(b,1)$. 则问题转化为(图 4-36)：

$$S_{\triangle AOB}<S_{\triangle AOC}.$$

---

[1] 罗增儒. 不等式与图形的性质. 数学通讯, 1989, 10, P. 33.

2）方程

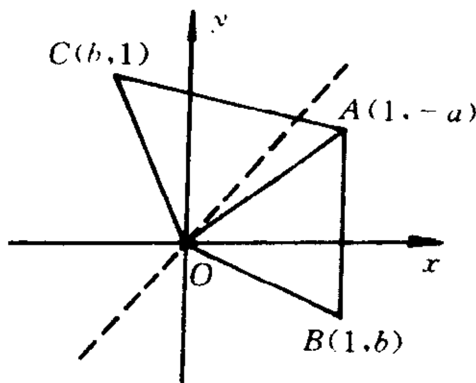


图 4－36

记 $x=\dfrac{a+b}{1+ab}=\dfrac{\begin{vmatrix} b & -a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -a \\ b & 1 \end{vmatrix}}$.

作方程 $\begin{cases} x-ay=b, \\ bx+y=1. \end{cases}$

则当 $|a|<1, |b|<1$ 时，$|x|<1$.

3）三角函数

$$|\sin x+\cos y| \leqslant |1+\sin x\cos y|.$$

(5) 推广

1）充要条件推广①

$$\begin{cases} |a|<1 \\ |b|<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1, \\ |ab|<1. \end{cases}$$

2）复数推广

对 $z_1, z_2 \in C$，若 $|z_1|<1, |z_2|<1$，则

$$\left|\frac{z_1+\overline{z}_2}{1+z_1z_2}\right|<1.$$

3）个数推广

取 $\theta=\arctan\dfrac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}$，则

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

有 $$-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-\theta<\frac{\pi}{4},$$

得 $$-1<\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)<1,$$

---

① 由这个推广可引出 1993 年高考理科第(29)题，参见例 4－32.

即
$$-1<\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}<1,$$
得
$$-1<\frac{a+b}{1+ab}<1.$$

一般地,对 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in(-1,1)$,取
$$\theta=\arctan\frac{(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)},$$
可得
$$\left|\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+a_i)-\prod\limits_{i=1}^{n}(1-a_i)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+a_i)+\prod\limits_{i=1}^{n}(1-a_i)}\right|<1.$$

特别地,对 $|a|<1,|b|<1,|c|<1$,有
$$\left|\frac{a+b+c+abc}{1+ab+ac+bc}\right|<1.$$

在这个例子里,我们看到数学知识之间是互相沟通的.遇到一道不能马上求解的问题时,可以试着向纵横两轴作多角度的投影(特别不要忘了作纵轴的投影),考虑一个等价的问题,一个类比的问题、一个辅助的问题,在这个开放的系统里,不同学科、不同领域之间的信息可以转换,解题思路将在这个转换中诞生,如泉喷涌.请继续参见例 4-34,例 4-35.

3. 内圈递扩原则

如果解题折线过长或过于曲折,一时无法弄清,那么我们可以试着考虑两组同心圆的最内圈,即从条件或结论出发,作出一小步推理,进行稍稍简单的变形,然后再一小步、一小步慢慢扩展解题坐标系上的同心圆.我们称此为解题思路探求的内圈递扩原则.

考虑最内圈,可能会找到一个更容易着手的问题、一个更特殊的问题,或者问题的一部分.当我们一小步又一小步地前进,稍稍简单又稍稍简单地变形的时候,就有希望找到一个中途点,或者理顺整个思路.就像瞎子爬山一样摸出一条当初并未完全意识到、并未完全把握住的思路.

这里体现了小步子前进和连续积累的思想.

例4－30 在等腰△ABC中，以底边AB的中点O为圆心作半圆与两腰相切于P，Q. 在弧$\overset{\frown}{PQ}$上任取一点D. 过D作⊙O的切线交两腰于M，N. 求证 AM与BN的乘积为定值.（图4－37）

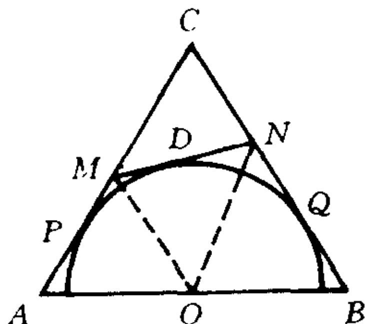


图4－37

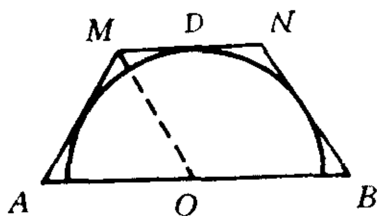


图4－38

讲解 可能这是一道没有做过的题目，我们不知道定值是什么，更不知道怎么证. 那么，让我们先迈开一小步.

(1) 取D为$\overset{\frown}{PQ}$的中点，试探定值是什么.

如图4－38，这时$MN /\!/ AB$，有

$$\angle AMO=\angle OMN=\angle AOM,$$

得 $$AM=AO,$$

同理 $$BN=BO,$$

故有 $$AM\cdot BN=AO\cdot BO. \quad ①$$

(2) 再迈一小步，当D不是$\overset{\frown}{PQ}$的中点时，①式还成立吗？只需证（图4－37）

$$\frac{AM}{AO}=\frac{BO}{BN}.$$

只需证 $$\triangle OMA \backsim \triangle NOB. \quad ②$$

(3) 再迈一小步，两三角形能相似吗？

因为$\angle A=\angle B$，所以只需再证

$$\angle AOM=\angle BNO,$$

或 $\angle AMO=\angle BON$.

只需证 $\angle A+\angle AMO+\angle BNO=\pi$. ③

或 $\angle B+\angle BON+\angle AOM=\pi$.

(4) 三个角之和等于 π 可以证明吗?

可以,因为四边形的内角和等于 2π,有

$$2\pi=\angle A+\angle AMN+\angle MNB+\angle B$$
$$=2\angle A+2\angle AMO+2\angle BNO.$$

两边除以 2 即得③式.

证明 如图 4-37,连 OM,ON,由相切知

$$\angle AMO=\frac{1}{2}\angle AMN,$$

$$\angle BNO=\frac{1}{2}\angle MNB,$$

得 $\angle A+\angle AMO+\angle BNO$

$$=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle AMN+\angle MNB)$$
$$=\pi.$$

但 $\angle A+\angle AMO+\angle AOM=\pi$,

得 $\angle AOM=\angle BNO$.

又 $\angle A=\angle B$,

得 $\triangle OMA\backsim\triangle NOB$.

从而 $\dfrac{AM}{AO}=\dfrac{BO}{BN}$.

即 $AM\cdot BN=AO\cdot BO=\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2$.

为定值[①]. □

4. 差异渐缩原则

在解题坐标系上,条件与结论之间位置上的不同,反映了内容及

---

① 沿着此题的思路,笔者编拟了 1995 年高中数学联赛第二试第三题,见例 7-69.

形式上的目标差.解题折线的画出,在于消除它们之间的差异,达到新的平衡.我们在此称为差异渐缩原则.它在§4-1-4反馈原理与解题中曾经谈过.在§6-2-3还要谈到.

例4-31 已知函数 $f(x)=\tan x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. 若 $x_1, x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 且 $x_1\neq x_2$,证明

$$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

[1994年数学高考理科(22)题]

讲解 求证式可具体化为

$$\frac{1}{2}(\tan x_1+\tan x_2)>\tan\frac{x_1+x_2}{2}. \quad ①$$

观察左、右两边的差异并加以消除.有

(1) 两边的函数名称相同,但角不一样,对这一目标差立即想到,变为同角、同名函数:

$$\frac{\tan\frac{x_1}{2}}{1-\tan^2\frac{x_1}{2}}+\frac{\tan\frac{x_2}{2}}{1-\tan^2\frac{x_2}{2}}>\frac{\tan\frac{x_1}{2}+\tan\frac{x_2}{2}}{1-\tan\frac{x_1}{2}\tan\frac{x_2}{2}}. \quad ②$$

(2) 两边的函数与角均已统一,若记

$$a=\tan\frac{x_1}{2},\ b=\tan\frac{x_2}{2}, a,b\in(0,1)$$

则式②为 $$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}>\frac{a+b}{1-ab}. \quad ③$$

很清楚,两边的差异在于运算方式不同,左边是两项之和,右边是一项,立即作出反应,对左边通分合并,可得

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}=\frac{(a+b)(1-ab)}{(1-ab)^2-(a-b)^2}. \quad ④$$

其中恒等式

$$(1-ab)^2-(a-b)^2=(1-a^2)(1-b^2)>0,$$

与例4-29中的恒等式

$$(1+ab)^2-(a+b)^2=(1-a^2)(1-b^2).$$

是等价的.

(3) 对比式③与式④的差异,只须作一步缩小,将式④的分母变为$(1-ab)^2$便可完成全题的证明:

$$\begin{aligned}&\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}\\&=\frac{(a+b)(1-ab)}{(1-ab)^2-(a-b)^2}\\&>\frac{(a+b)(1-ab)}{(1-ab)^2}\\&=\frac{a+b}{1-ab}.\ \square\end{aligned}$$

例 6-60 将继续研究本题.

5. 迹线平移原则

在解题坐标系上,每一道题的题解都有一条思维轨迹,其中有的在结构上会有相似之处,形成一些平行迹线.平时注意积累平行迹线,探求解题思路时有意识寻找和借鉴平行迹线是一个重要的解题原则,我们称为迹线平移原则.

这一原则体现了类比的思想、基本问题的思想,也体现了熟悉化的原则.与“模式识别”的解题策略相通(§6-2-1).

例 4-32　已知关于x的实系数二次方程

$$x^2+ax+b=0.$$

有两个实数根α,β.证明

(Ⅰ) 如果$|\alpha|<2,|\beta|<2$,那么$2|a|<4+b$,且$|b|<4$.

(Ⅱ) 如果$2|a|<4+b$且$|b|<4$,那么$|\alpha|<2,|\beta|<2$.

[1993 年数学高考理科(29)题]

讲解　初步理解题意,有

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-a,\\ \alpha\beta=b.\end{cases}$$

于是,题目可改写为

$$\begin{cases}|\alpha|<2,\\|\beta|<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2|\alpha+\beta|<4+\alpha\beta,\\|\alpha\beta|<4.\end{cases}\quad④$$

这种结构与例 4－29

$$\begin{cases}|A|<1,\\|B|<1\end{cases}\Rightarrow\left|\frac{A+B}{1+AB}\right|<1.\quad②$$

有很多的相似之处,那么,这道课本例题的题解折线能否平移过来,处理我们当前的问题呢? 这是一个念头,一个途径,也是一个进展.事实上,这道高考题可以理解为课本例题经过"两次变换、一次加强"得到.

(1) 对课本作业题作变换

$$\begin{cases}\alpha=2A,\\\beta=2B;\end{cases}$$

则式②可变为

$$\begin{cases}|\alpha|<2,\\|\beta|<2\end{cases}\Rightarrow\left|\frac{2\alpha+2\beta}{4+\alpha\beta}\right|<1.\quad③$$

(2) 对式③再作变换

$$\begin{cases}a=-(\alpha+\beta),\\b=\alpha\beta;\end{cases}\quad④$$

则式③可变为

$$\begin{cases}|\alpha|<2,\\|\beta|<2\end{cases}\Rightarrow2|a|<4+b.\quad⑤$$

其中变换④可以用二次方程 $x^2+ax+b=0$ 有实根 α,β 来代替.

(3) 对式⑤再增加一个充要条件的层次,便得式①.

于是,处理例 4－29 的十几个思路就可以平移过来处理下面的这道高考题[①].

例 4－33　设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列,S_n 是其前 n 项和.证明

---

① 参考文献[35]P.102～115 有 15 种解法.

$$\frac{\log_{0.5}S_n+\log_{0.5}S_{n+2}}{2}>\log_{0.5}S_{n+1}. \quad ①$$

[1995年数学高考文科题]

讲解　可能我们一点也看不出为什么会有这样的对数不等式成立.但是这并不要紧,我们可以考虑同心圆的最内圈,将求证式化为稍稍简单的不等式

$$S_nS_{n+2}<S_{n+1}^2. \quad ②$$

或

$$\frac{S_n}{S_{n+1}}<\frac{S_{n+1}}{S_{n+2}}=\frac{a_1+qS_n}{a_1+qS_{n+1}}. \quad ③$$

在考场上,许多考生对比②与③之后,决定放弃③而采用②,其实③有更好的对称性,更和谐(例1-12),且就是课本不等式一章上的真分数不等式①:已知a,b,m都是正数,并且$a<b$,求证

$$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}. \quad ④$$

据此,视m为a_1,a为qS_n,b为qS_{n+1},有

$$\frac{a_1+qS_n}{a_1+qS_{n+1}}>\frac{qS_n}{qS_{n+1}}=\frac{S_n}{S_{n+1}},$$

或

$$\frac{a_1+qS_n}{a_1+qS_{n+1}}=\frac{\frac{a_1}{q}+S_n}{\frac{a_1}{q}+S_{n+1}}>\frac{S_n}{S_{n+1}}.$$

考生在成功面前撤退,反映了平时没有很好积累题解迹线或临场中不善于平移迹线.

由于真分数不等式④有许多解法,将其平移过来,便可得本例的"一题多解".挑几个有趣的列举如下:

思路1　(定比分点)

---

① 真分数不等式可以直观地说成:糖水加糖变甜了.

$$\frac{S_{n+1}}{S_{n+2}}=\frac{a_1+qS_n}{a_1+qS_{n+1}}=\frac{\frac{S_n}{S_{n+1}}+\frac{a_1}{qS_{n+1}}\cdot 1}{1+\frac{a_1}{qS_{n+1}}}.$$

这表明，$\frac{S_{n+1}}{S_{n+2}}$分$\frac{S_n}{S_{n+1}}$与1为定比$\lambda=\frac{a_1}{qS_{n+1}}>0$，

有
$$\frac{S_n}{S_{n+1}}<\frac{S_{n+1}}{S_{n+2}}<1.$$

取对数即得. □

思路2 （中点与斜率）在直角坐标系上取点$A(a_1,a_1)$，$B(qS_{n+1},qS_n)$，则AB的中点为(图4－39)

$$C:\begin{cases}x=\frac{a_1+qS_{n+1}}{2}=\frac{S_{n+2}}{2},\\ y=\frac{a_1+qS_n}{2}=\frac{S_{n+1}}{2}.\end{cases}$$

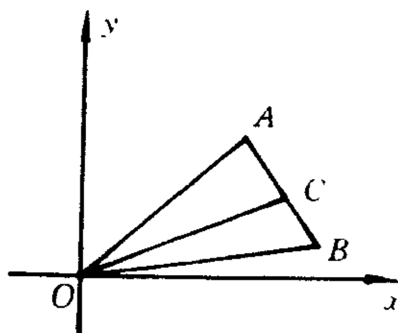


图4－39

显然，三射线的斜率有不等式

$$k_{OB}<k_{OC}<k_{OA},$$

即
$$\frac{S_n}{S_{n+1}}<\frac{S_{n+1}}{S_{n+2}}<1.$$

取对数即得. □

思路3 （复数与斜率）在复平面上取两点$A(a_1,a_1)$，$B(qS_{n+1},qS_n)$，其和为

$$D:\begin{cases}x=a_1+qS_{n+1}=S_{n+2},\\ y=a_1+qS_n=S_{n+1}.\end{cases}$$

则OD为平行四边形$OBDA$的对角线，有斜率不等式(图4－40)

$$k_{OB}<k_{OD}<k_{OA}.$$

即
$$\frac{S_n}{S_{n+1}}<\frac{S_{n+1}}{S_{n+2}}<1.$$

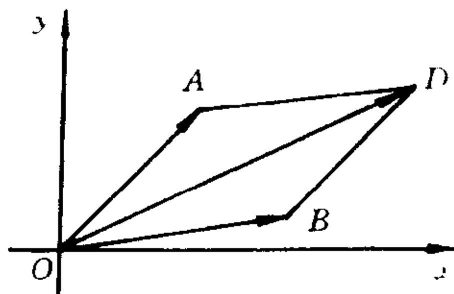


图4－40

取对数即得. □

思路4 (单调性)由

$$\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{a_1+qS_n}{S_n}=\frac{a_1}{S_n}+q$$

知，n 增大时，S_n 也增大，数列 $\left\{\frac{S_{n+1}}{S_n}\right\}$ 是单调递减数列，从而 $\left\{\frac{S_n}{S_{n+1}}\right\}$ 是单调递增数列，有

$$\frac{S_n}{S_{n+1}}<\frac{S_{n+1}}{S_{n+2}}.$$

取对数即得. □

4-2-3 解题过程的改进

追求解题过程的简单，追求思维过程的经济，是解题研究的一项基本任务，也是数学工作者的一个共同性格. 在解题坐标系上，表现为解题折线的简短，或思维链的优化.

解一道题忘一道题，或在同一思维层次上重复做好几道题，并不能获得解题能力的提高. 注重解题过程的分析与改进，就是力图通过解“有限道题”来获取解“无限道题”的那种数学机智.

波利亚说过，一个好的教师应该懂得并且传授给学生下述看法：没有任何一道题是可以解决得十全十美的，总剩下些工作要做，经过充分的探讨与钻研，我们能够改进这个解答，而且在任何情况下，我们总能提高自己对这个解答的理解水平.[①]

解题过程的改进通常要经历两个阶段并进行4个方面的分析.

1. 两个阶段是：整体分解与信息交合

整体分解就是把原解法的全过程分拆为一些信息单元，看用了哪些知识，用了哪些方法，它们是怎样结构在一起的，并从中提炼出几个最本质的步骤. 在这个整体分解中，要注意发现，哪些重要信息是在半途上被白白浪费的，哪些思维回路是在盲目中被多余增添的，

① 见参考文献[27]P.15.

哪些过程是可以合并的,哪些步骤是可以转换的.

信息交合就是抓住整体分解中提炼出来的本质步骤,将信息单元转换或重组成新的信息块,这些新信息块的有序化将删去多余的思维回路,将用更一般的原理去集中现存的许多过程,将用一个简单的技巧去代替现有的常规步骤.于是,一个新的解法就诞生了.

上文中,对例2-16、例3-9、例3-11、例4-9、例4-18的分析都体现了这两个完整的阶段.比如例2-16(P.90),我们首先从原解法中整体分解出三个最本质的步骤,表现为三类公式

① $\tan\frac{3x}{2}=\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}}$, $\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$;

② $\sin x=\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}$;

③ $\frac{1}{2}(\cos x+\cos 2x)=\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

然后将其"串联式"书写:

①→②→③.

作信息交合改为"并联式"书写:

$$\left.\begin{matrix}②\\③\end{matrix}\right\}\to①.$$

得出新证法.虽然所用的公式完全一样,但境界已经不同(实质是从右边推左边).至于例3-9(P.128)等,经过改进之后,其解题长度已大大缩减.

2. 四个方面的分析是:

(1) 看解题过程是否浪费了更重要的信息,以开辟新的解题通道.这需要我们重新审查每一个知识点的发散度,特别是对纵轴作再投影.

(2) 看解题过程多走了哪些思维回路,通过删除、合并来体现简洁美.

对于上述两点,我们有如下的说明.当我们进行解题思路的紧张探索时,总是先瞄准某些已经抓住的方向,展开大跨度、粗线条的联

想或类比，总想排山倒海般直奔解题目标. 这时候的脑风暴无暇顾及更多的细节，也来不及选择更平坦的道路. 但是，当思路一旦打通，解法初步得出时，兴奋之余的沉思，将会使我们冷静找回当初浪费在半途上的更重要的信息，将会使我们清醒看到本来不需要增添的许多思维回路. 进一步的思考，更周密的运筹，常常会激发出一个更机智的数学念头，或者会整理出一个更满足学生心理、更适合教学要求的解题方案. 这时候的兴奋不仅较前更为强烈，而且更充满美感.

一旦获解，就立刻产生感情上的满足，从而导致心理封闭，忽视解题后的再思考，恰好错过了提高的机会，无异于"入宝山而空返".

(3) 看是否可以用更一般的原理去代替现存的许多步骤，提高整个解题的观点和思维的层次.

(4) 看是否可以用一个更特殊的技巧去代替现存的常规步骤，以体现解题的奇异美.

容易明白，任何数学问题的结构都有共性和个性两个方面. 由共性出发，我们可以设法找出处理这一类问题的更高观点或统一原理；而由个性出发，我们又可以找出解决这一道特定题目的特殊技巧. 这两方面的思考，是优美解的重要源泉，而数学的整体性或统一美又为这种思考提供了条件. 沿着知识链、方法链可以找，按照逻辑思维可以找，通过类比、联想、转化、移植、构造也可以找.

总之，在解题坐标系上，解题过程的改进就是条件或结论在两轴上的再投影，就是解题折线的分拆与重组，就是寻找最短链或最优链. 而这一切又都是为了获得"怎样学会解题"的更多启示.

例4－34　已知

$$a^2+b^2-kab=1, \quad ①$$

$$c^2+d^2-kcd=1; \quad ②$$

(a, b, c, d, k 都是实数，$|k|<2$)

求证　$$|ac-bd| \leqslant \frac{2}{\sqrt{4-k^2}}. \quad ③$$

讲解　有的书刊由"数——形"联想得出一个解法. 并且断言：无

论用“消元法”还是“三角换元法”证明，计算量都非常大. 先引述原解法过程如下：

(1) 由已知式①、②的形式想到点(c,d)在椭圆①上.

(2) 由求证式想到点(a,b)在直线

$$ca-db=m \tag{4}$$

上，其中 m 是新引进的待定值，下来要确定

$$m\leqslant\frac{2}{\sqrt{4-k^2}}.$$

(3) 因为(a,b)同时满足①、④，所以 m 的值应使方程组

$$\begin{cases}ca-db=m,\\ a^2+b^2-kab=1\end{cases} \tag{5}$$

有实数解. 消去 b，得关于 a 的二次方程

$$(c^2+d^2-kcd)a^2+(kdm-2cm)a+(m^2-d^2)=0.$$

把②代入，得

$$a^2+(kdm-2cm)a+(m^2-d^2)=0. \tag{6}$$

(4) 由二次方程有实根得判别式非负

$$\Delta=(kdm-2cm)^2-4(m^2-d^2)\geqslant0.$$

再把②代入，得

$$(4-k^2)d^2m^2\leqslant4d^2. \tag{7}$$

(5) 由于 $4-k^2>0$，所以有

$$m^2\leqslant\frac{4}{4-k^2}. \tag{8}$$

开方即得 $\quad |ac-bd|\leqslant\frac{2}{\sqrt{4-k^2}}.$ □

以上联想是成功的，但缺少解后的回顾，我们对解题过程作分析后认为至少存在 4 点不足：

(1) 由⑦到③需要讨论 $d\neq 0$ 的细节[1].

(2) 断言"消去法"、"三角换元法"计算量都非常大,其实缺少根据.下文有简捷的证明.

(3) 没有发挥把①、②两式看成椭圆的功能.这是一个很大的浪费.

(4) 由联立方程组出发,要连续消去 a,b,c,d 四个字母才能得 m 与 k 的关系⑧,费时又费事.

如果我们抓住原式①、②表示椭圆的重要信息,那么可以作旋转变换化为标准形式.

变题　已知

$$\frac{2-k}{4}(a+b)^2+\frac{2+k}{4}(a-b)^2=1,$$

$$\frac{2-k}{4}(c+d)^2+\frac{2+k}{4}(c-d)^2=1;$$

求证　$|ac-bd|\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{4-k^2}}\quad(|k|<2)$.

由此,可顺利引进三角变换:

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2-k}}{2}(a+b),\quad \cos\alpha=\frac{\sqrt{2+k}}{2}(a-b),$$

$$\sin\beta=\frac{\sqrt{2-k}}{2}(c+d),\quad \cos\beta=\frac{\sqrt{2+k}}{2}(c-d).$$

即

$$\begin{cases} a=\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{2-k}}+\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{2+k}}, \\ b=\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{2-k}}-\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{2+k}}, \end{cases}$$

---

[1] $d=0$ 时,由②得 $c^2=1$.视①为 b 的二次方程 $b^2-(ka)b+(a^2-1)=0$,其判别式非负 $\Delta=k^2a^2-4(a^2-1)\geqslant 0$,得 $|ac-bd|=|a|\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{4-k^2}}$.

$$\begin{cases} c = \dfrac{\sin\beta}{\sqrt{2-k}} + \dfrac{\cos\beta}{\sqrt{2+k}}, \\ d = \dfrac{\sin\beta}{\sqrt{2-k}} - \dfrac{\cos\beta}{\sqrt{2+k}}. \end{cases}$$

有
$$|ac - bd| = \left|\frac{2\sin(\alpha+\beta)}{\sqrt{4-k^2}}\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{4-k^2}}. \square$$

这种解法就是把椭圆化为参数方程，然后作极其自然的三角运算．如果再向前走一步，对“变题”作伸缩变换：

$$a_1 = \frac{\sqrt{2-k}}{2}(a+b), \quad a_2 = \frac{\sqrt{2+k}}{2}(a-b),$$

$$b_1 = \frac{\sqrt{2-k}}{2}(c+d), \quad b_2 = \frac{\sqrt{2+k}}{2}(c-d).$$

则有如下简单形式

简题　已知

$$a_1^2 + a_2^2 = 1,$$
$$b_1^2 + b_2^2 = 1.$$

求证　　$|a_1b_2 + a_2b_1| \leqslant 1.$

这只不过是柯西不等式的特例，其难度没有超过中学课本的一道练习题．在柯西不等式的知识链上将产生大批解法[①]．其中一个最大胆、最奇异的代数解法是，将已知两式相乘后配方：

$$\begin{aligned} 1 &= (a^2+b^2-kab)(c^2+d^2-kcd) \\ &= \left[\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}(ac-bd)\right]^2 + \left[(ad+bc) - \frac{k}{2}(ac+bd)\right]^2 \\ &\geqslant \left[\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}(ac-bd)\right]^2. \end{aligned}$$

变形即得．□

---

① 惠州人．让解题更富于美感．湖南数学通讯，1989，3，P.11．文中提供了9种解法．每一种都比原解法简单．

但是,这种解法又是自然的,因为其本质上是

$$\begin{aligned}&(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\\&=(a_1b_2+a_2b_1)^2+(a_1b_1-a_2b_2)^2\\&\geqslant(a_1b_2+a_2b_1)^2.\end{aligned}$$

这样,我们通过找回被浪费的"椭圆"信息,而达到对题目的更本质认识和更简捷求解.

例4－35　已知 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$, ①

求证　$a^2+b^2=1$. ②

讲解　关于这道条件等式证明题,曾经众口一词认为,直接的代数证明是麻烦的,并且已经作为"三角法"的典范经常出没于各类书刊(另一三角法的典范见习题四第24题).为了支持这种观点,人们常作下面两种解法的对比.

证明1　(代数法)由已知式平方

$$a^2-a^2b^2+2ab\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-a^2}+b^2-a^2b^2=1, \quad ③$$

移项　$2ab\sqrt{(1-b^2)(1-a^2)}=1-a^2-b^2+2a^2b^2$,

再平方

$$\begin{aligned}&4a^2b^2(1-a^2-b^2+a^2b^2)\\&=1+a^4+b^4+4a^4b^4-2a^2-2b^2+6a^2b^2-4a^4b^2-4a^2b^4.\end{aligned}$$

即　$$\begin{aligned}0&=a^4+b^4+1+2a^2b^2-2a^2-2b^2\\&=(a^2+b^2-1)^2.\end{aligned}$$

可得　$a^2+b^2=1$. □

证明2　(三角法)由 $\sqrt{1-b^2}$, $\sqrt{1-a^2}$ 有意义可知

$$|a|\leqslant1,\ |b|\leqslant1,$$

$$\sqrt{1-b^2}\leqslant1,\ \sqrt{1-a^2}\leqslant1.$$

因而,式①左边两项的绝对值都不大于1,但右边为1,所以 a,b 都为不大于1的非负数,恰与锐角三角函数有相同的特征.令

$$\begin{cases}a=\cos\theta_1,\\b=\sin\theta_2.\end{cases}\quad \theta_1,\theta_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]. \quad ④$$

则
$$\begin{cases}\sqrt{1-a^2}=\sin\theta_1,\\ \sqrt{1-b^2}=\cos\theta_2.\end{cases} \quad ⑤$$

原式可化为 $\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2=1.$ ⑥

即 $\cos(\theta_1-\theta_2)=1.$

但 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta_1-\theta_2\leqslant\frac{\pi}{2},$

故 $\theta_1-\theta_2=0,$

有 $\theta_1=\theta_2.$ ⑦

得 $a^2+b^2=\cos^2\theta_1+\sin^2\theta_2=\cos^2\theta_1+\sin^2\theta_1=1.$ □

对于这两个解法，我们有如下3点看法：

(1) 由于代数法只从形式上"化整"，盲目地两次平方，因而进行了复杂的平方、配方运算. 但这不是解这道题的必由之路，一旦弄清了题目结构的本质，作一次平方之后就配方，可以大大减少运算量.

证明3 对式①平方后，将③式作移项配方，有

$$0=(1-a^2)(1-b^2)-2ab\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}+a^2b^2$$
$$=[\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}-ab]^2,$$

得 $\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}=ab,$

平方，整理即得. □

若对式①先移项，再平方，过程还可以简化.

证明4 对已知式①移项后平方

$$b^2(1-a^2)=1-2a\sqrt{1-b^2}+a^2(1-b^2),$$

移项配方 $(a-\sqrt{1-b^2})^2=0,$

得 $a=\sqrt{1-b^2}.$

平方即得. □

显然，这个代数解法一点也不比三角解法麻烦，反倒显得三角法是徒然增加许多思维回路：既要把代数形式转化为三角形式，又要把三角函数的关系转化为角的关系，最后才把三角关系转化回代数关

系,与其这样“曲折回肠”不如[证明4]一次平方“干脆利落”.

(2) 三角法能从$\sqrt{1-a^2}$,$\sqrt{1-b^2}$的形式,联想到三角函数的内容,体现了把形式与内容结合起来的思考.可惜的是,这种思考浅尝辄止,白白浪费了许多重要而有用的信息.我们认为,三角法只看到坐标平面上的两个点

$$A(a,\sqrt{1-a^2}),\quad B(\sqrt{1-b^2},b),$$

在单位圆$x^2+y^2=1$上,因而有参数式即三角变换④、⑤.但没有进一步揭示已知等式所体现的内容,即A满足“单位圆上过点B的切线方程”:

$$x\sqrt{1-b^2}+by=1.$$

由切点的惟一性知A,B重合,于是得出比求证更强的结论

$$\begin{cases} a=\sqrt{1-b^2}, \\ b=\sqrt{1-a^2}. \end{cases}$$

我们的这段话,不仅揭示了题目的数学内容,同时也已完成了题目的证明[1].

证明5 已知条件表明,单位圆上的点

$$A(a,\sqrt{1-a^2}),\quad B(\sqrt{1-b^2},b),$$

满足:A在过B的切线

$$x\sqrt{1-b^2}+by=1$$

上,由切点的惟一性,有

$$\begin{cases} a=\sqrt{1-b^2}, \\ \sqrt{1-a^2}=b. \end{cases} \tag{8}$$

平方得 $a^2+b^2=1$. □

---

[1] 笔者于1984年获得这一解法.曾就《中学数学综合题解法新论》P.70例6向作者唐以荣教授提出过,后来发表在上海《中学数学教学》1986年第4期上,该杂志现改名为《上海中学数学》.

(3) 这里的"切点重合"是怎么想出来的呢？其实是从三角法所浪费了的信息又重新捕捉回来的. 三角法中的⑥式即

$$\begin{cases} x\cos\theta_2 + y\sin\theta_2 = 1, \\ x = \cos\theta_1,\ y = \sin\theta_1. \end{cases}$$

这比式①更强烈而直观地告诉我们, A 在过 B 的切线上. 而式⑦

$$\theta_1 = \theta_2.$$

更是清楚而明白地说, A 与 B 重合.

于是, 我们抓住"切点重合"的思路分三步组织成证明 5, 并且沿着"两点重合"的知识链, 继续导出一系列解法:

A, B 重合

→ $|AB| = 0$

→距离公式中平方和为零——配方

→基本不等式(源于配方)

→柯西不等式

→……

证明 6　设 $A(a, \sqrt{1-a^2})$, $B(\sqrt{1-b^2}, b)$, 则

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(a-\sqrt{1-b^2})^2+(\sqrt{1-a^2}-b)^2} \\ &= \sqrt{2[1-(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2})]} \\ &= 0. \end{aligned}$$

故 A, B 重合, 可得⑧. □

证明 7　(配方法)对已知式移项配方

$$\begin{aligned} 0 &= 1-(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}) \\ &= \left[\frac{a^2+(1-b^2)}{2}-a\sqrt{1-b^2}\right]+ \\ &\quad \left[\frac{b^2+(1-a^2)}{2}-b\sqrt{1-a^2}\right] \\ &= \frac{1}{2}[(a-\sqrt{1-b^2})^2+(b-\sqrt{1-a^2})^2]. \end{aligned}$$

由非负数的性质得⑧. □

没有“距离为零”或“切点重合”的启发，这里的配方是有一定难度的，甚至可以说是古怪特殊的，但它只不过是证明6的逆向书写而已.

证明8　由基本不等式，有

$$1=a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}$$

$$\leqslant\frac{a^2+(1-b^2)}{2}+\frac{b^2+(1-a^2)}{2}=1.$$

等号当且仅当⑧时成立. □

证明9　由柯西不等式，有

$$1=a\sqrt{1-b^2}+\sqrt{1-a^2}b$$

$$\leqslant\sqrt{a^2+(1-a^2)}\sqrt{(1-b^2)+b^2}=1.$$

等号成立当且仅当

$$ab=\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}.$$

平方即得. □

证明10　设$z_1=a+\sqrt{1-a^2}i$，$z_2=\sqrt{1-b^2}+bi$.

则　$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,$$

即　$$(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2})^2+(\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}-ab)^2=1.$$

得　$$\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}-ab=0.$$

移项平方即得. □

证明11　引进二次函数

$$f(x)=(ax-\sqrt{1-b^2})^2+(\sqrt{1-a^2}x-b)^2$$

$$=x^2-2(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2})x+1$$

$$=x^2-2x+1$$

$$=(x-1)^2.$$

令$x=1$，得

$$(a-\sqrt{1-b^2})^2+(\sqrt{1-a^2}-b)^2=0.$$

又得出⑧式. □

证明 12 如图 4-41，作△ABC，使 $BA=1$，高 CD 分 AB，得

$$BD=a\sqrt{1-b^2},\ DA=b\sqrt{1-a^2},$$

且高 $CD=ab$.

则 $BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=a$，

同理 $AC=b$.

又由于

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BA\cdot CD=\frac{1}{2}ab$，恰好等于 $\frac{1}{2}BC\cdot AC$，所以△ABC 是直角三角形，有

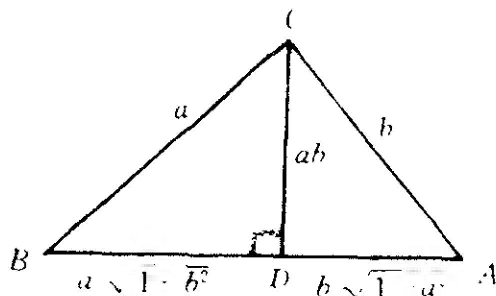


图 4-41

$$a^2+b^2=1.$$

例 4-36 设 a,b,c 为正数，且

$$\begin{cases} a^2+ab+\dfrac{b^2}{3}=25, & ① \\ \dfrac{b^2}{3}+c^2=9, & ② \\ a^2+ac+c^2=16. & ③ \end{cases}$$

求 $ab+2bc+3ac$ 的值.

[1984 年第 18 届全苏数学奥林匹克竞赛]

讲解 这是构造图形解题的优美代表，其主要步骤有

(1) 原式变形

$$\begin{cases} a^2+\left(\dfrac{b}{\sqrt{3}}\right)^2-2a\cdot\dfrac{b}{\sqrt{3}}\cos150^\circ=5^2, \\ \left(\dfrac{b}{\sqrt{3}}\right)^2+c^2=3^2, \\ a^2+c^2-2ac\cos120^\circ=4^2. \end{cases}$$

(2) 把数式信息转换为图形信息. 构造△ABC（如图 4-42），使 $AB=5$，$BC=3$，$CA=4$；

$$\angle AOB=150^\circ,$$

$\angle BOC = 90°$,

$\angle COA = 120°$,

$OA = a$,

$OB = \frac{b}{\sqrt{3}}$,

$OC = c$.

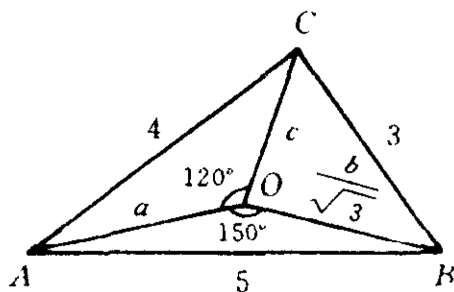


图 4-42

(3) 由面积建立求 $ab + 2bc + 3ac$ 的等量关系.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \times 4 \times 3 &= S_{\triangle ABC} \\ &= S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COA} \\ &= \frac{1}{2} a \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \sin 150° + \frac{1}{2} c \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} ac \sin 120° \\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}}(ab + 2bc + 3ac).\end{aligned}$$

得 $$ab + 2bc + 3ac = 24\sqrt{3}. \square$$

这种解法精巧得使人满足，以至于很少听说此题还有第二个解法. 但是，对题解作整体分解可以得到两条最本质的信息：其一是有一个边长为 3、4、5 的直角三角形，其二是通过面积得出关于 $ab + 2bc + 3ac$ 的等量关系. 抓住这两条，立即可以得出代数解法，并且可以演变出新的几何解法[①].

另证 1　由①－②－③得

$$ab - ac - 2c^2 = 0, \tag{4}$$

又由②×③后再配方得

$$\begin{aligned}9 \times 16 &= \frac{1}{4}(ab - ac - 2c^2)^2 + \frac{1}{12}(ab + 2bc + 3ac)^2 \\ &= \frac{1}{12}(ab + 2bc + 3ac)^2. \end{aligned} \tag{5}$$

① 笔者于 1988 年获得这些解法. 有的已写进《数学通讯》1991 年第 5 期"坐标思想的应用"例 8, P.33.

得 $ab+2bc+3ac=24\sqrt{3}$. □

另证2 如图4－43，在直角坐标系上取

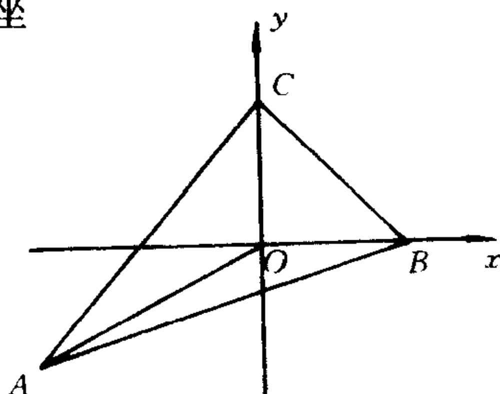


图4－43

$$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,-\frac{a}{2}\right),$$

$$B\left(\frac{b}{\sqrt{3}},0\right),$$

$$C(0,c),$$

依题意有

$$AB=5, BC=3, AC=4,$$

又 AB 的直线方程为

$$\sqrt{3}ax-(2b+3a)y-ab=0.$$

点 C 到 AB 的距离，一方面为

$$h=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{12}{5},$$

另一方面为

$$h=\frac{|\sqrt{3}a\cdot 0-(2b+3a)\cdot c-ab|}{\sqrt{3a^2+(2b+3a)^2}}=\frac{|ab+2bc+3ac|}{\sqrt{12\left(a^2+ab+\frac{b^2}{3}\right)}}=\frac{|ab+2bc+3ac|}{10\sqrt{3}}.$$

得 $$ab+2bc+3ac=24\sqrt{3}.$$ □

另证3 如图4－44，在直角坐标系上取点

$$A\left(-\frac{b}{\sqrt{3}},c\right),\ B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a+2c}{2}\right),$$

则有 $|OA|=3, |OB|=4, |AB|=5$.

这表明 $\triangle AOB$ 是直角三角形，于是点 B 到直线 OA

$$cx+\frac{b}{\sqrt{3}}y=0$$

的距离便是$|OB|=4$,有

$$4=\frac{\left|c\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{b}{\sqrt{3}}\cdot\frac{a+2c}{2}\right|}{\sqrt{c^2+\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2}}=\frac{|ab+2bc+3ac|}{6\sqrt{3}}.$$

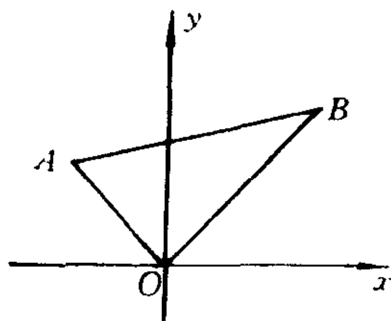


图 4－44

变形即得. □

注意,这个解法揭示了问题的结构实质,将几何语言翻译为代数语言,我们看到,若记

$$x=-\frac{b}{\sqrt{3}},\ y=c,$$

$$u=\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ v=\frac{a+2c}{2},$$

则已知条件为

$$\begin{cases}(x-u)^2+(y-v)^2=25, & ⑥\\ x^2+y^2=9, & ⑦\\ u^2+v^2=16. & ⑧\end{cases}$$

而所求式为

$$ab+2bc+3ac=2\sqrt{3}(uy-xv).$$

本质上是求　　$uy-xv$.

由于⑥式可变为(这相当于④式)

$$xu+yv=0.\qquad ⑨$$

于是,整个问题的求解只不过是初中学过的一个恒等式

$$(x^2+y^2)(u^2+v^2)=(xu+yv)^2+(xv-yu)^2.$$

由于这个恒等式与复数模的性质相联系,与二维柯西不等式相联系,因而继续导出这道题目的更多解法完全是意料中的事,不再赘述.我们只想指出,有了这点背景,直接求出a,b,c并不困难.首先由①－②－③得

$$ab-ac-2c^2-0,$$

即 $$\frac{a+2c}{2}\cdot c=\frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot\frac{b}{\sqrt{3}},$$

化成比例(即把⑨化成比例)

$$\begin{cases}\dfrac{a+2c}{2}=\dfrac{b}{\sqrt{3}}t,\\ \dfrac{\sqrt{3}a}{2}=ct. \qquad (t>0)\end{cases} \tag{⑩}$$

代入③,注意到②,有

$$16=\left(\frac{a+2c}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{\sqrt{3}}t\right)^2+(ct)^2=9t^2.$$

得 $$t=\frac{4}{3}.$$

代入⑩得 $$a=\frac{8}{3\sqrt{3}}c,\ b=\frac{4+3\sqrt{3}}{4}c,$$

代入② $$\frac{43+24\sqrt{3}}{48}c^2+c^2=9,$$

解出 $$c=\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{91+24\sqrt{3}}}.$$

从而 $$a=\frac{32}{\sqrt{91+24\sqrt{3}}},$$

$$b=\frac{27+12\sqrt{3}}{\sqrt{91+24\sqrt{3}}}.$$

还要指出,新的解法对 $a>0,b>0,c>0$ 的依赖是非实质的,直到最后一步才用到它.这与原解法中一开始就用到这一条件有很大的不同.

例4-37 正五边形的每个顶点对应一个整数,使得这5个整数的和为正,若其中3个相邻顶点对应的整数依次为 x,y,z,而中间的 $y<0$,则要进行如下的操作:整数 x,y,z 分别换为 $x+y,-y,y+z$.只要所得的5个整数中至少还有1个为负时,这种操作继续进行.问:是否这种操作进行有限次后必定终止.

[IMO_{27-3}]

讲解　这是1986年国际数学奥林匹克竞赛中一道较难的题目，有位美国选手给出了一个精巧的构思，证明了这种操作进行有限次后必定终止，因而获特别奖．其思路分成三步：

(1) 让一种状态与一个正整数构成对应，即作一个有20项的辅助函数[①]

$$\begin{aligned} f &= f(x,y,z,u,v) \\ &= \sum|x| + \sum|x+y| + \sum|x+y+z| + \sum|x+y+z+u| \\ &= |x|+|y|+|z|+|u|+|v|+|x+y|+|y+z|+ \\ &\quad |z+u|+|u+v|+|v+x|+|x+y+z|+|y+z+u|+ \\ &\quad |z+u+v|+|u+v+x|+|v+x+y|+|x+ \\ &\quad y+z+u|+|y+z+u+v|+|z+u+v+x|+|u+v+ \\ &\quad x+y|+|v+x+y+z|. \end{aligned}$$

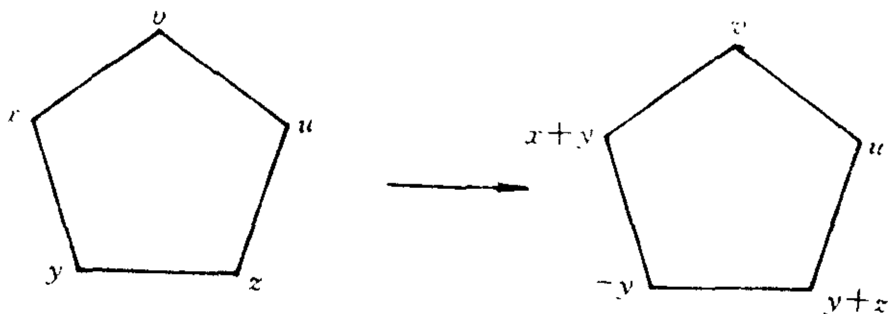


图4-45

对 $y<0$ 进行一次操作便对应另一个整数

$$f_1 = f(x+y, -y, y+z, u, v).$$

(2) 比较两次操作的对应值，有

$$f_1 - f = |x+2y+z+u+v| - |x+z+u+v|.$$

但由　　$$x+y+z+u+v>0,$$

① 记号$\sum|x|$表示$|x|+|y|+|z|+|u|+|v|$；同样$\sum x^2$表示$x^2+y^2+z^2+u^2+v^2$.

知 $$x+z+u+v>-y>0.$$

故有

$$f_1-f=\begin{cases}2y<0, & x+2y+z+u+v\geq 0;\\ -2(x+y+z+u+v)<0, & x+2y+z+u+v<0.\end{cases}$$

这说明,每经一次操作,f 的值严格减少且减少的值不小于2.

(3) 由于开始时,f 的值是自然数,经过若干次减少之后,f 就不能保证为正整数了,因而经有限次操作必定停止. □

这个解法非常精彩,构造的函数也有整齐对称之美,但总感到一共20项太多. 当我们作解题过程分析时发现,辅助函数的作用表现在单调性上,而单调性的判断又归结为两项差

$$|x+2y+z+u+v|-|x+z+u+v| \qquad (1)$$

的计算,其余19项都互相抵消了. 由于 $|x|$ 与 x^2 的单调性是等效的,因此,我们可以把辅助函数 f 的各个绝对值全部改为平方. 令

$$\begin{aligned} g &= g(x,y,z,u,v)\\ &=\sum x^2+\sum(x+y)^2+\sum(x+y+z)^2+\sum(x+y+z+u)^2\\ &=10(x^2+y^2+z^2+u^2+v^2)+12(xy+yz+zu+uv+vx)+\\ &\quad 8(xz+yu+zv+ux+vy)\\ &=6(x+y+z+u+v)^2+2[(x-z)^2+(y-u)^2+\\ &\quad (z-v)^2+(u-x)^2+(v-y)^2]. \end{aligned}$$

其中的 $(x+y+z+u+v)^2$ 为常数,故可把辅助函数改进为

$$\begin{aligned} F &= F(x,y,z,u,v)\\ &=(x-z)^2+(y-u)^2+(z-v)^2+(u-x)^2+(v-y)^2. \end{aligned}$$

两次操作的差为

$$F_1-F=2y(x+y+z+u+v)<0.$$

命题获得完全一样的证明. 但所构造的函数简单多了(却仍保持着整齐对称的形式)[1].

例 4－38　正数 a,b,c,A,B,C 满足条件

---

[1] 也可把 F 写成 $x(x-z)+y(y-u)+z(z-u)+u(u-x)+v(v-y)$ 等.

$$a+A=b+B=c+C=k.$$

求证 $aB+bC+cA<k^2$.

[1981年第21届全苏数学竞赛题]

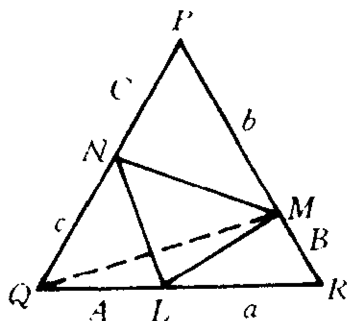


图 4-46

讲解 有一个精美的几何解法:如图4-46,作一个边长为 k 的正三角形 PQR,分别在各边上取 $QL=A$, $LR=a$, $RM=B$, $MP=b$, $PN=C$, $NQ=c$,则有面积关系

$$S_{\triangle LRM}+S_{\triangle MPN}+S_{\triangle NQL}<S_{\triangle PQR}.$$

即 $$\frac{1}{2}aB\sin60^\circ+\frac{1}{2}bC\sin60^\circ+\frac{1}{2}cA\sin60^\circ<\frac{1}{2}k^2\sin60^\circ,$$

得 $$aB+bC+cA<k^2.\ \square$$

这种解法的优美之处就在于它很平凡,无非就是"部分小于全体",就是3个三角形面积之和小于4个三角形之和.而这一事实可以换一种形式来表达,当 $b\geqslant A$ 时,连 QM,则

$$S_{\triangle LRM}<S_{\triangle MQR},$$

$$S_{\triangle MPN}+S_{\triangle NQL}<S_{\triangle MPN}+S_{\triangle NQM}=S_{\triangle MPQ}.$$

经过这一分离,新的形式提供了新的机会,即摆脱图形,直接用代数放缩法求解.

证明[1] 不妨设 b 为 a,b,c,A,B,C 中的最大者,有

$$aB<kB,$$

$$bC+cA\leqslant bC+cb=kb.$$

相加 $$aB+bC+cA<k(B+b)=k^2.\ \square$$

这个证明没有一点几何痕迹,但它确实是由几何证法翻译过来的.这可能正是数学的美妙之处,不同分支之间有着内在的联系,意想不到的影响有时会奇迹般出现在你的面前.

"一个好的证明使我们更明智".原苏联数学家曼宁这样说.

---

1 罗增儒.一个不等式的形数沟通.中学生数学,1989,5,P.2.

4-2-4 解题成果的扩大

解题活动中一种司空见惯的情况是,题目解完了,方法的功能也随之结束.而希尔伯特却说:"数学问题的宝藏是无穷无尽的,一个问题一旦解决,无数新的问题就会取而代之."叫做"你知道的越多,不知道的也越多".于是,客观情况需要我们去思考:解决前一问题的方法是否也能用来解决后继问题?

可能性是存在的.但解决问题的方法很多,有的完全依赖于该问题的特殊条件,有的则触及到该问题的本质.因而有的解法很难作推广,充其量只是平凡的推广;只有那些抓住问题实质的方法才能提供深刻推广的途径.

便于推广的方法常常具有两个特征:

第一、由于抓住了问题的实质而显得特别简单、明了、直截了当.

第二、由于显示了问题的一般性,尽管步骤上不是最简的,但对题目中的特殊条件的依赖是最少的,常常是非实质的.

例4-39 算术平均——平方平均不等式的研究.

对 $a>0,b>0$,有

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}. \quad ①$$

讲解 在这个不等式的众多证法中,我们选出两个来.

证明1 由
$$\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{a^2+b^2+(a^2+b^2)}{4}$$
$$\geqslant\frac{a^2+b^2+2ab}{4}$$
$$=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

开方即得. □

证明2 将①变为

$$\sqrt{\frac{a^2}{2a^2+2b^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{2a^2+2b^2}}\leqslant1. \quad ②$$

$$左边=\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{1}{2}\right)$$
$$=1. \square$$

这两个解法都用到了二维平均值不等式，但对二维平均值不等式的依赖性质是不相同的，[证明1]直接依赖于数字“2”. 而[证明2]是对②中的两个项分别用平均值不等式，其实是不依赖于数字“2”的，字母增多时，无非是多并列几项；并且对每一项用平均值不等式时，对指数及个数的依赖也是非实质的，推广立即成为可能.

推广1　个数推广

对 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，求证

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}\geqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}. \tag{3}$$

证明　将③变为

$$\sqrt{\frac{a_1^2}{n(a_1^2+\cdots+a_n^2)}}+\cdots+\sqrt{\frac{a_n^2}{n(a_1^2+\cdots+a_n^2)}}\leqslant1.$$

$$左边=\sqrt{\frac{a_1^2}{a_1^2+\cdots+a_n^2}\cdot\frac{1}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{a_n^2}{a_1^2+\cdots+a_n^2}\cdot\frac{1}{n}}$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2}{a_1^2+\cdots+a_n^2}+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{a_n^2}{a_1^2+\cdots+a_n^2}+\frac{1}{n}\right)$$
$$=1. \square$$

对照[证明2]可见，这个推广是十分容易、非常平凡的. 而沿用[证明1]的方法来证明就要麻烦得多：

另证　$\dfrac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}$

$$=\frac{(a_1^2+\cdots+a_n^2)+\cdots+(a_1^2+\cdots+a_n^2)}{n^2}$$
$$=\frac{1}{n^2}[(a_1^2+\cdots+a_n^2)+(a_1^2+a_2^2)+(a_1^2+a_3^2)+\cdots+$$

$$(a_1^2+a_n^2)+(a_2^2+a_3^2)+(a_2^2+a_4^2)+\cdots+$$
$$(a_2^2+a_n^2)+\cdots+(a_{n-1}^2+a_n^2)]$$
$$\geqslant\frac{1}{n^2}[(a_1^2+\cdots+a_n^2)+2a_1a_2+2a_1a_3+\cdots+2a_1a_n+$$
$$2a_2a_3+2a_2a_4+\cdots+2a_2a_n+\cdots+2a_{n-1}a_n]$$
$$=\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2.$$

开方即得③. □(另解见例 5－22)

如果说两个解法都能进行“个数”推广的话，那么[证明 1]就不便于进行“指数”上的推广，更难于进行“系数”上的推广了. 我们用[证明 2]的方法来进行 4 个推广(在例 2－1 的最后，我们见过同样的方法解决不同的问题).

推广 2　指数推广

对 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 及 $m,n\in\mathrm{N}_+$，有

$$\sqrt[m]{\frac{a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m}{n}}\geqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}. \qquad ④$$

证明　将④变为

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt[m]{\frac{a_i^m}{(a_1^m+\cdots+a_n^m)n^{m-1}}}\leqslant 1.$$

有

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt[m]{\frac{a_i^m}{(a_1^m+\cdots+a_n^m)n^{m-1}}}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sqrt[m]{\frac{a_i^m}{a_1^m+\cdots+a_n^m}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}\cdots\frac{1}{n}}_{m-1\text{个}}}$$
$$\leqslant\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^m}{a_1^m+\cdots+a_n^m}+\underbrace{\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{m-1\text{个}}\right)$$
$$=\frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^m}{a_1^m+\cdots+a_n^m}+\sum_{i=1}^{n}\frac{m-1}{n}\right) \qquad ⑤$$
$$=\frac{1}{m}[1+(m-1)]=1.\ \square$$

这个推广显示了[证明 2]的方法功能,但其"锋芒"尚未"毕露",下面进行"系数"推广时,更能反映这种方法的优越.我们看到,平均数

$$\frac{a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m}{n}=\frac{a_1^m}{n}+\frac{a_2^m}{n}+\cdots+\frac{a_n^m}{n},$$

每一项 a_i^m 的系数都是$\frac{1}{n}$,满足

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}=1.$$

我们在上面的证明中(特别是式⑤中)看到,a_i^m 的系数相等是非实质的,换成$\frac{1}{k_i}$,只要满足

$$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\cdots+\frac{1}{k_n}=1,$$

那么对于式⑤求和时,仍有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{m-1}{k_i}=m-1.$$

推广 3　系数推广

对 $a_i>0,k_i>0\ (i=1,2,\cdots,n),m,n\in\mathbf{N}_+$,若

$$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\cdots+\frac{1}{k_n}=1,$$

则

$$\sqrt[m]{\frac{a_1^m}{k_1}+\frac{a_2^m}{k_2}+\cdots+\frac{a_n^m}{k_n}}\geqslant\frac{a_1}{k_1}+\frac{a_2}{k_2}+\cdots+\frac{a_n}{k_n}. \qquad ⑥$$

证明　将⑥式变为

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt[m]{\frac{\frac{a_i^m}{k_i^m}}{\frac{a_1^m}{k_1}+\cdots+\frac{a_n^m}{k_n}}}\leqslant 1.$$

$$\text{左边}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt[m]{\frac{\frac{a_i^m}{k_i}}{\frac{a_1^m}{k_1}+\cdots+\frac{a_n^m}{k_n}}\cdot\underbrace{\frac{1}{k_i}\cdots\frac{1}{k_i}}_{m-1\text{个}}}$$

$$\leqslant \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\frac{a_i^m}{k_i}}{\frac{a_1^m}{k_1}+\cdots+\frac{a_n^m}{k_n}}+\frac{m-1}{k_i}\right)$$

$$=\frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{a_i^m}{k_i}}{\frac{a_1^m}{k_1}+\cdots+\frac{a_n^m}{k_n}}+\sum_{i=1}^{n}\frac{m-1}{k_i}\right)$$

$$=\frac{1}{m}[1+(m-1)]=1. \square$$

当 $n=2$ 时,有

$$\frac{a_1^m}{k_1}+\frac{a_2^m}{k_2}\geqslant\left(\frac{a_1}{k_1}+\frac{a_2}{k_2}\right)^m. \quad ⑦$$

对不等式⑦,令

$$a=\frac{a_1}{k_1},\ b=\frac{a_2}{k_2};$$

$$\lambda_1=\frac{1}{k_1},\ \lambda_2=\frac{1}{k_2}.$$

则有

推论 1 对 $a>0,b>0,m\in N$,及 $\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_1+\lambda_2=1$,有

$$\frac{a^m}{\lambda_1^{m-1}}+\frac{b^m}{\lambda_2^{m-1}}\geqslant(a+b)^m. \quad ⑧$$

对不等式⑧分别取

(1) $\lambda_1=\frac{1}{1+x},\ \lambda_2=\frac{x}{1+x}$;

(2) $\lambda_1=\frac{c}{c+d},\ \lambda_2=\frac{d}{c+d}$;

(3) $\lambda_1=\sin^2 x,\ \lambda_2=\cos^2 x$.

则有

推论 2 对 $a>0,b>0,x>0$,有

$$(1+x)^{m-1}a^m+\left(1+\frac{1}{x}\right)^{m-1}b^m\geqslant(a+b)^m. \quad ⑨$$

推论 3　对 $a>0,b>0,c>0,d>0$，有

$$\frac{a^m}{c^{m-1}}+\frac{b^m}{d^{m-1}}\geqslant\frac{(a+b)^m}{(c+d)^{m-1}}.\qquad ⑩$$

推论 4　对 $a>0,b>0,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，有

$$\frac{a^m}{\sin^{2m-2}x}+\frac{b^m}{\cos^{2m-2}x}\geqslant(a+b)^m.\qquad ⑪$$

不等式⑪中正弦、余弦的指数是偶数，那么，指数为奇数行不行呢？令 $k=2m-2$，则 $m=\frac{k+2}{2}$，有

推广 4　对 $a>0,b>0,k\in\mathbf{N}_+,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，有

$$\frac{a^{\frac{k+2}{2}}}{\sin^k x}+\frac{b^{\frac{k+2}{2}}}{\cos^k x}\geqslant(a+b)^{\frac{k+2}{2}}.\qquad ⑫$$

等号成立当且仅当 $x=\arctan\sqrt{\frac{a}{b}}$.

证明　将⑫变为

$$\frac{a}{\left(\frac{a^{\frac{k+2}{2}}}{\sin^k x}+\frac{b^{\frac{k+2}{2}}}{\cos^k x}\right)^{\frac{2}{k+2}}}+\frac{b}{\left(\frac{a^{\frac{k+2}{2}}}{\sin^k x}+\frac{b^{\frac{k+2}{2}}}{\cos^k x}\right)^{\frac{2}{k+2}}}\leqslant 1.$$

记　$A=\frac{a^{\frac{k+2}{2}}}{\sin^k x}$，$B=\frac{b^{\frac{k+2}{2}}}{\cos^k x}$，则

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\sqrt[k+2]{\frac{A}{A+B}\cdot\frac{A}{A+B}\cdot\underbrace{\sin^2 x\cdots\sin^2 x}_{k\text{个}}}+\\&\quad\sqrt[k+2]{\frac{B}{A+B}\cdot\frac{B}{A+B}\cdot\underbrace{\cos^2 x\cdots\cos^2 x}_{k\text{个}}}\\&\leqslant\frac{1}{k+2}\left(\frac{2A}{A+B}+k\sin^2 x\right)+\frac{1}{k+2}\left(\frac{2B}{A+B}+k\cos^2 x\right)\\&=1.\end{aligned}$$

等号成立当且仅当

$$\begin{cases}\dfrac{A}{A+B}=\sin^2 x,\\[2ex]\dfrac{B}{A+B}=\cos^2 x.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}\dfrac{a^{\frac{k+2}{2}}}{A+B}=\sin^{k+2}x,\\[2ex]\dfrac{b^{\frac{k+2}{2}}}{A+B}=\cos^{k+2}x.\end{cases}$$

相除得
$$\tan x=\sqrt{\frac{a}{b}},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

有
$$x=\arctan\sqrt{\frac{a}{b}}.\ \square$$

也可以把⑫写成

$$\frac{a}{\sin^k x}+\frac{b}{\cos^k x}\geqslant\left(a^{\frac{2}{k+2}}+b^{\frac{2}{k+2}}\right)^{\frac{k+2}{2}}. \tag{15}$$

当 $x=\arctan\sqrt[k+2]{\dfrac{a}{b}}$ 时取等号.

这一结论也可以用例 2－1 的推广结论来证明,因为它们源于同样的方法.由

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)}$$
$$\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

有
$$\left(\frac{a}{\sin^k x}+\frac{b}{\cos^k x}\right)^{\frac{2}{k+2}}$$
$$=\Big[\left(\frac{a}{\sin^k x}+\frac{b}{\cos^k x}\right)\left(\frac{a}{\sin^k x}+\frac{b}{\cos^k x}\right)\cdot$$
$$\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)\cdots(\sin^2 x+\cos^2 x)}_{n\text{个}}\Big]^{\frac{1}{k+2}}$$
$$\geqslant\left(\frac{a}{\sin^k x}\cdot\frac{a}{\sin^k x}\cdot\sin^{2k}x\right)^{\frac{1}{k+2}}+\left(\frac{b}{\cos^k x}\cdot\frac{b}{\cos^k x}\cdot\cos^{2k}x\right)^{\frac{1}{k+2}}$$
$$=a^{\frac{2}{k+2}}+b^{\frac{2}{k+2}}.$$

变形即可得⑬. □

当 $k=1$ 时,对 $a>0,b>0,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,由⑬有[1]

$$\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}\geqslant\sqrt{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^3}.\quad ⑭$$

当 $x=\arctan\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ 时取等号.

容易看出,所有这些推广都与[证明2]的方法实质、书写格式相同.这正是揭示问题实质的方法所具有的推广功能.虽然⑬与①已经在形式上有很大的差别,但当 $k=2,x=\frac{\pi}{4}$ 时,⑬又回到了①.

例 4-40　(Weizenboeck 不等式的研究)在△ABC 中,记 a、b、c 为三边长,Δ 为面积,则有

$$a^2+b^2+c^2\geqslant4\sqrt{3}\Delta.\quad (1)$$

[IMO_{3-2}]

讲解　这个不等式的证法不下十几种,我们来看较有特色的两个.

证明 1　记周长为$(a+b+c)$的正三角形的面积为 Δ_0,则

$$\Delta\leqslant\Delta_0=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2.$$

有

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&\geqslant3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\\&=3\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta_0\\&\geqslant4\sqrt{3}\Delta.\ \square\end{aligned}$$

这个证明的关键步骤有两个,每一个对于字母个数及字母指数的依赖都是非实质的.第一步,不等式

---

[1] 罗增儒.函数 $y=\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}$ 最小值的初等求法.数学通讯,1988,12,P.21.

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2,$$

可推广为

$$a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m\geqslant n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^m.$$

第三步,"周长为定值的三角形中,正三角形的面积最大"可推广为"周长为定值的凸 n 边形中,正 n 边形的面积最大".因此,有

推广1　在 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中,记 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 条边长,Δ 为面积,则有

$$a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m\geqslant\left[4n^{\frac{2}{m}-\frac{m}{}}\Delta\tan\frac{\pi}{n}\right]^{\frac{m}{2}}.\qquad (2)$$

证明　记周长为 $(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 的正 n 边形的面积为 Δ_0,则

$$\Delta\leqslant\Delta_0=\frac{n}{4}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2\cot\frac{\pi}{n}.$$

有

$$\begin{aligned}&a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m\\ \geqslant&\, n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^m\\ =&\, n\left[\frac{4\Delta_0}{n}\tan\frac{\pi}{n}\right]^{\frac{m}{2}}\\ \geqslant&\left[4n^{\frac{2}{m}-\frac{m}{}}\Delta\tan\frac{\pi}{n}\right]^{\frac{m}{2}}.\ \square\end{aligned}$$

证明2　由海伦公式有

$$16\Delta^2=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4).$$

因而由柯西不等式有

$$\begin{aligned}&4\sqrt{3}\Delta+2(a^2+b^2+c^2)\\ =&(4\Delta)\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{2}a^2)\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2}b^2)\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2}c^2)\cdot\sqrt{2}\\ \leqslant&\sqrt{16\Delta^2+2(a^4+b^4+c^4)}\cdot\sqrt{3+2+2+2}\\ =&3(a^2+b^2+c^2).\end{aligned}$$

移项即得.□

这个证明的实质步骤是用到了四维柯西不等式,出现的两组

数为

$$(4\Delta,\sqrt{2}a^2,\sqrt{2}b^2,\sqrt{2}c^2),$$
$$(\sqrt{3},\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

后者是前者当 $a=b=c=1$ 时的特例,将第二组数一般化,得

$$(4\Delta,\sqrt{2}a^2,\sqrt{2}b^2,\sqrt{2}c^2),$$
$$(4\Delta_1,\sqrt{2}a_1^2,\sqrt{2}b_1^2,\sqrt{2}c_1^2).$$

当然还能应用四维柯西不等式,这就得出了涉及两个三角形的 Pedoe 不等式.

推广 2　设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边长分别是 a,b,c 与 a_1, b_1, c_1,它们的面积分别为 Δ,Δ_1. 则

$$a_1^2(-a^2+b^2+c^2)+b_1^2(a^2-b^2+c^2)+c_1^2(a^2+b^2-c^2)\geqslant 16\Delta\Delta_1.\quad ③$$

等号当且仅当 $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$ 时成立.

证明　将③变为[①]

$$16\Delta\Delta_1\leqslant(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-2(a^2a_1^2+b^2b_1^2+c^2c_1^2).$$

由柯西不等式有

$$\begin{aligned}&16\Delta\Delta_1+2(a^2a_1^2+b^2b_1^2+c^2c_1^2)\\&=(4\Delta)(4\Delta_1)+(\sqrt{2}a^2)(\sqrt{2}a_1^2)+(\sqrt{2}b^2)(\sqrt{2}b_1^2)+(\sqrt{2}c^2)(\sqrt{2}c_1^2)\\&\leqslant\sqrt{16\Delta^2+2(a^4+b^4+c^4)}\sqrt{16\Delta_1^2+2(a_1^4+b_1^4+c_1^4)}\\&=(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2).\end{aligned}$$

变形即得. □

原不等式还有一个加强

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\Delta+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

留给读者去证明.

例 4-41　(从三维平均值不等式到 n 维平均值不等式)对 $a_i>0$, $(i=1,2,\cdots,n)$,记

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

---

① 此式当 $a=a_1,b=b_1,c=c_1$ 时,正好取等号得出海伦公式.

$$G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

则有 $$A_n\geqslant G_n.\quad ①$$

讲解 当 $n=3$ 时，不等式①为

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\geqslant\sqrt[3]{a_1a_2a_3}.\quad ②$$

很早就有一个经典的证明：

$$A_3=\frac{a_1+a_2+a_3}{3}$$

$$=\frac{a_1+a_2+a_3+A_3}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+A_3}{2}\right)\quad ③$$

$$\geqslant\frac{1}{2}(\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3A_3})\quad ④$$

$$\geqslant\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3A_3}},\quad ⑤$$

即 $$A_3^4\geqslant a_1a_2a_3A_3,$$

得 $$A_3\geqslant\sqrt[3]{a_1a_2a_3}=G_3.\ \square\quad ⑥$$

但是，很长一段时间人们未能用同样的步骤来处理一般情况. 原因是没有抓住每一步骤的实质. 请看我们的分析.

(1) 步骤③式的意思是把 A_3 退为 A_2，分解为两个"二维算术平均数"，有循环方程

$$A_3=\frac{1}{2}\left(A_2+\frac{a_3+A_3}{2}\right).$$

其推广形式是，把 A_{n+1} 退为 A_n，分解为两个"n 维算术平均数"，有循环方程

$$A_{n+1}=\frac{1}{2}\left[A_n+\frac{a_{n+1}+(n-1)A_{n+1}}{n}\right].\quad ③_1$$

(2) 由式③到④的含义是对 A_3 的低一维情况，用二维平均值不等式. 相应地③$_1$ 式便应对 A_{n+1} 的低一维情况，用 n 维平均值不等式 $A_n\geqslant G_n$（这可以由数学归纳法的假设来保证）. 即由③$_1$ 得

$$A_{n+1} \geqslant \frac{1}{2}\left(G_n + \sqrt[n]{a_{n+1}A_{n+1}^{n-1}}\right). \qquad ④_1$$

(3) 由式④到⑤的含义是应用 $A_2 \geqslant G_2$(当 $n=3$ 时,第(2)步与第(3)步形式上一样,但性质有区别,前者是降一维处理,后者是二维处理).其一般形式是由$④_1$得

$$\begin{aligned} A_{n+1} &\geqslant \frac{1}{2}\left(G_n + \sqrt[n]{a_{n+1}A_{n+1}^{n-1}}\right) \\ &\geqslant \sqrt{G_n \sqrt[n]{a_{n+1}A_{n+1}^{n-1}}} \\ &= \sqrt[2n]{a_1a_2\cdots a_na_{n+1}A_{n+1}^{n-1}}, \end{aligned} \qquad ⑤_1$$

变形得
$$A_{n+1} \geqslant \sqrt[n+1]{a_1a_2\cdots a_{n+1}} = G_{n+1}. \qquad ⑥_1$$

把这些实质步骤串联起来,即可得不等式①的数学归纳法证明.

证明　当 $n=2$ 时,$A_2 \geqslant G_2$ 成立.

假设 $n=k$ 时,有

$$A_k \geqslant G_k.$$

则
$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \frac{1}{2k}\left[(k+1)A_{k+1} + (k-1)A_{k+1}\right] \\ &= \frac{1}{2k}\left[kA_k + a_{k+1} + (k-1)A_{k+1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[A_k + \frac{a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{k}\right] \\ &\geqslant \frac{1}{2}\left(G_k + \sqrt[k]{a_{k+1}A_{k+1}^{k-1}}\right) \\ &\geqslant \sqrt{G_k\sqrt[k]{a_{k+1}A_{k+1}^{k-1}}} \\ &= \sqrt[2k]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}A_{k+1}^{k-1}}, \end{aligned}$$

有
$$A_{k+1}^{2k} \geqslant G_{k+1}^{k+1}A_{k+1}^{k-1},$$

得
$$A_{k+1} \geqslant G_{k+1}.$$

这表明,不等式对 $n=k+1$ 时成立.

由数学归纳法知不等式①成立. □

用逆向归纳法证明本题见例 5-8(P.284).

例 4-42　在$\triangle ABC$中,证明

$$\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{8}.$$

讲解 此题的解法很多，先看较常见的一种.

证明 1 不妨设△*ABC* 为锐角三角形（否则左边为非正数，显然小于$\frac{1}{8}$），有

$$\begin{aligned}&\cos A\cos B\cos C\\=&\frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)]\cos C\\=&\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos C]\cos C\\\leqslant&\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\cos(A-B)-\cos C+\cos C}{2}\right]^2\\=&\frac{1}{8}\cos^2(A-B)\\\leqslant&\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

等号当
$$\begin{cases}\cos(A-B)-\cos C=\cos C,\\A-B=0,\end{cases}$$
即 $A=B=C=60^\circ$ 时成立. □

这一解法直接依赖于三角形，对于空间四面体没有任何启示. 再看另一解法.

证明 2 不妨设△*ABC* 为锐角三角形，由射影定理，有

$$a=b\cos C+c\cos B\geqslant2\sqrt{bc\cos B\cos C}.$$

同理
$$b\geqslant2\sqrt{ac\cos A\cos C},$$
$$c\geqslant2\sqrt{ab\cos A\cos B}.$$

相乘并约去 abc，得

$$1\geqslant8\cos A\cos B\cos C,$$

即
$$\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{8}.\ \square$$

这个证法整齐、对称、十分优美，仅用到射影定理，或说揭示了不等式与射影定理的内在联系，这是本质的. 因为射影定理在三维空间

也存在,推广立即成为可能.

推广 设 $A_1A_2A_3A_4$ 是空间中的一个四面体. $\theta_{12},\theta_{13},\theta_{14},\theta_{23},\theta_{24},\theta_{34}$ 是6条棱 $A_1A_2,A_1A_3,A_1A_4,A_2A_3,A_2A_4,A_3A_4$ 上的二面角的平面角.如果这6个角都是锐角,证明

$$\cos\theta_{12}\cos\theta_{13}\cos\theta_{14}\cos\theta_{23}\cos\theta_{24}\cos\theta_{34}\leqslant\frac{1}{3^6}.$$

证明 设四面体的4个面的面积为

$$S_1=S_{\triangle A_2A_3A_4},$$

$$S_2=S_{\triangle A_1A_3A_4},$$

$$S_3=S_{\triangle A_1A_2A_4},$$

$$S_4=S_{\triangle A_1A_2A_3}.$$

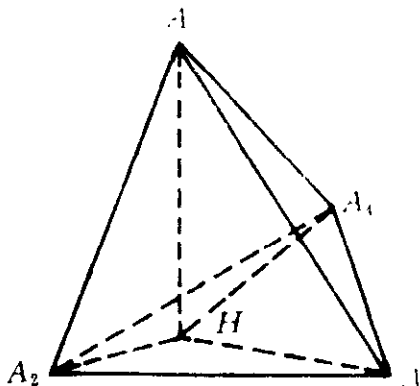


图 4-47

过 A_1 作对面的垂线 A_1H,交 $\triangle A_2A_3A_4$ 于 H,则有

$$\begin{aligned}S_1&=S_{\triangle HA_3A_4}+S_{\triangle HA_2A_4}+S_{\triangle HA_2A_3}\\&=S_2\cos\theta_{34}+S_3\cos\theta_{24}+S_4\cos\theta_{23}.\end{aligned}$$

这就是空间射影定理,有

$$S_1\geqslant3\sqrt[3]{S_2S_3S_4\cos\theta_{23}\cos\theta_{24}\cos\theta_{34}}.$$

同理

$$S_2\geqslant3\sqrt[3]{S_1S_3S_4\cos\theta_{13}\cos\theta_{14}\cos\theta_{34}},$$

$$S_3\geqslant3\sqrt[3]{S_1S_2S_4\cos\theta_{12}\cos\theta_{14}\cos\theta_{24}},$$

$$S_4\geqslant3\sqrt[3]{S_1S_2S_3\cos\theta_{12}\cos\theta_{13}\cos\theta_{23}}.$$

相乘并约去 $S_1S_2S_3S_4$,得

$$1\geqslant3^4(\cos\theta_{12}\cos\theta_{13}\cos\theta_{14}\cos\theta_{23}\cos\theta_{24}\cos\theta_{34})^{\frac{2}{3}}.$$

即

$$\cos\theta_{12}\cos\theta_{13}\cos\theta_{14}\cos\theta_{23}\cos\theta_{24}\cos\theta_{34}\leqslant\frac{1}{3^6}.$$

例 4-43 已知 $\dfrac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta}+\dfrac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta}=1$,

求证　$$\frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}=1.\tag{1}$$

证明 1　已知条件表明点

$$A\left(\frac{\cos^2\alpha}{\cos\beta},\frac{\sin^2\alpha}{\sin\beta}\right)$$

在单位圆上，又由显然的恒等式

$$\frac{\cos^2\alpha}{\cos\beta}\cdot\cos\beta+\frac{\sin^2\alpha}{\sin\beta}\cdot\sin\beta=1$$

知，A 点在过 $B(\cos\beta,\sin\beta)$（也在单位圆上）的切线

$$x\cos\beta+y\sin\beta=1$$

上．由切点的惟一性得 A,B 重合[1]．

$$\begin{cases}\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos\beta}=\cos\beta,\\[2mm]\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\beta}=\sin\beta,\end{cases}$$

即　$$\begin{cases}\cos^2\alpha=\cos^2\beta,\\ \sin^2\alpha=\sin^2\beta.\end{cases}\tag{2}$$

得　$$\frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}=\cos^2\beta+\sin^2\beta=1.\ \square$$

这个解法充分利用了条件的特殊性，既简捷又精巧．但它依赖于平面结构、依赖于指数为偶数，作指数推广时，受到限制．

证明 2　由平均值不等式有

$$\frac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta}+\cos^2\beta\geqslant 2\cos^2\alpha,\tag{3}$$

$$\frac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta}+\sin^2\beta\geqslant 2\sin^2\alpha.\tag{4}$$

---

[1] 这里的处理方法与例 4—35 的证明 5 相同．因而不难改写成配方的形式．事实上，已知条件等价于 $\left(\frac{\cos^2\alpha}{\cos\beta}-\cos\beta\right)^2+\left(\frac{\sin^2\alpha}{\sin\beta}-\sin\beta\right)^2=0$．请继续参见例 6—79．

相加　$$2=\frac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta}+\cos^2\beta+\frac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta}+\sin^2\beta\geqslant 2.$$

这表明式③、④同时取等号,有

$$\begin{cases}\dfrac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta}=\cos^2\beta,\\[2mm]\dfrac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta}=\sin^2\beta.\end{cases}$$

这与式②是等价的,命题得证. □

这个证明的关键是由③、④导出②,而③、④对于“个数”与“指数”都是可以推广的.

推广题　已知$\dfrac{\cos^{n+2}\alpha}{\cos^n\beta}+\dfrac{\sin^{n+2}\alpha}{\sin^n\beta}=1$,

求证　$\dfrac{\cos^{n+2}\beta}{\cos^n\alpha}+\dfrac{\sin^{n+2}\beta}{\sin^n\alpha}=1.$

证明　(习题一第9题)由平均值不等式有

$$\frac{\cos^{n+2}\alpha}{\cos^n\beta}+\frac{\cos^{n+2}\alpha}{\cos^n\beta}+\underbrace{\cos^2\beta+\cdots+\cos^2\beta}_{n个}\geqslant(n+2)\cos^2\alpha,$$

$$\frac{\sin^{n+2}\alpha}{\sin^n\beta}+\frac{\sin^{n+2}\alpha}{\sin^n\beta}+\underbrace{\sin^2\beta+\cdots+\sin^2\beta}_{n个}\geqslant(n+2)\sin^2\alpha.$$

相加　$$n+2=2\left(\frac{\cos^{n+2}\alpha}{\cos^n\beta}+\frac{\sin^{n+2}\alpha}{\sin^n\beta}\right)+n\geqslant n+2.$$

这表明上述二个不等式同时取等号,有

$$\begin{cases}\dfrac{\cos^{n+2}\alpha}{\cos^n\beta}=\cos^2\beta,\\[2mm]\dfrac{\sin^{n+2}\alpha}{\sin^n\beta}=\sin^2\beta,\end{cases}$$

得　$$\begin{cases}\cos^{n+2}\alpha=\cos^{n+2}\beta,\\ \sin^{n+2}\alpha=\sin^{n+2}\beta.\end{cases}$$

进而　$$\frac{\cos^{n+2}\beta}{\cos^n\alpha}+\frac{\sin^{n+2}\beta}{\sin^n\alpha}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.\ \square$$

由上面一些例子的讲解可以看到,分析解法中每一步的实质是

捕捉实质性解法的有效手段,而一旦抓住了实质性解法,推广的前景便一片光明.

习　题　四

1. “正在花园里玩耍的孩子们都是你家的吗?”客人问道.“那些孩子是4家的.”主人回答说.“我家的最多,我兄弟家的少些,我妹妹家的更少,我堂兄家的最少.”接着他又说:“他们最爱玩的是棒球.但人数不够分成两个队(每队9人).”他沉思着说:“说也奇怪,这4家孩子数之积恰是我家的门牌号数,这是你进门时看到的.”

客人说:“我对对付付可以算个数学家,让我试试看能否算出各家孩子的数目.”他算了一下说:“我还需要知道一点情况,你堂兄家有一个小孩吗?”主人答复了他的问题.之后客人说:“知道了你家的门牌号数与你对我的问题的答复,我现在可以推算出每家小孩的确切数目了.”问这4家每家各有几个小孩?

2. 由于检验计算机程序的需要,斯坦福大学的麦克锡提出一个逻辑难题,$S—P$ 谜题:自然数 m,n 满足 $2\leqslant m\leqslant n\leqslant 99$. S 先生知道它们的和 s,P 先生知道它们的积 p.对话如下:

S 说,我知道你不知道这两个数是什么,但我也不知道.

P 说,现在我知道这两个数了.

S 说,现在我也知道这两个数了.

试由条件及对话确定 m,n.

求解以下3~6题,并用系统方法论的观点作出解释.

3. 已知 $x,y\in\mathbf{R}$,且

$$x^2+y^2+2y\leqslant 0,$$

求证

$$x^2+y^2+6x+8>0.$$

4. 求证$\triangle ABC$ 为等腰三角形的充要条件是

$$\begin{vmatrix} \cos^2 A & \sin A & 1 \\ \cos^2 B & \sin B & 1 \\ \cos^2 C & \sin C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

5. 有两个同心圆盘,各分成 n 个相等的小格,外盘固定,内盘可以转动,内外两盘小格上分别填有实数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n,$$
$$b_1, b_2, \cdots, b_n.$$

且满足

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 0,$$
$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n < 0.$$

证明　可将内盘转动到一个适当位置,使两个盘的小格对齐,这时,两个盘 n 个对应小格内数字乘积的和为一正数.

6. 分别举一个例子说明解题中的

(1) 系统与要素;

(2) 过程与状态;

(3) 结构与功能.

7. 将下列不等式转化为二次曲线问题然后求解:

(1) $x^2 + 2x - 8 \leqslant 0$;

(2) $x^2 + 8x + 15 \geqslant 0$;

(3) $\begin{cases} x^2 - 16 < 0, \\ x^2 - 4x + 3 \geqslant 0; \end{cases}$

(4) $3 \leqslant |5 - 2x| < 9$;

(5) $\sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{x^2 + 4x + 8} \leqslant 6$.

8. 构造方程求解下题:

已知　$9a + 3b + c = 0,$

$9d + 3e + f = 0.$

求证　$(cd - af)^2 = (ae - bd)(bf - ce)$.

9. 用 10 种方法,从不同的角度寻找解题思路.

证明　对于任意实数 t,复数

$$z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}\,i$$

的模 $r=|z|$ 满足 $r\leqslant\sqrt[4]{2}$.

[1983 年高考题]

10. 从知识链上寻找多种解法,证明

$$ac+bd\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}.$$

11. 用例 4-39 的方法证明,对 $n\in\mathbf{N}_+$, $a>0$, $b>0$,有

$$\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}}\leqslant\sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}}.$$

12. 证明例 4-40 的加强,在 $\triangle ABC$ 中,有

$$a^2+b^2+c^2\geqslant4\sqrt{3}\Delta+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

13-1 将半径为 R 的 4 个球两两相切地放在桌面上,求上面一个球的球心到桌面的距离.

理解本题求解方法的关键,再解下面的题目.

13-2 将半径为 1 的 4 个球两两相切地放在桌面上,现在想在 4 个球中间放一个小球,使这个小球与已知的 4 个小球都相切,试求这个小球的半径.

13-3 将半径为 1 的 4 个球两两相切地放在一个大球里,并且使大球与它们相切,试求此大球的半径.

13-4 在一个半径为 R 的大球里有 8 个半径相等的小球都与大球相切且切于大球 S 的一个大圆上,这 8 个小球每相邻的两个又互相外切,在大球和诸小球之间再放一个球 S_1, S_1 与大球内切与 8 个小球外切,试求 S_1 的半径.

13-5 在半径为 R 的大球里有 8 个半径相等的小球与其内切,这 8 个小球的球心在一个正方体的顶点上且相邻的两个互相外切,试求小球半径.

13-6 平面上有 4 个半径为 R 的大球,其中 3 个两两外切,第 4 个球与前 3 个中的两个相外切,4 个大球球心在同一平面上.在这 4 个大球的上面再放两个互相外切半径相等的小球,并同 3 个大球相外切.求大球与小球半径之比.

14. 已知 a,b,c 是方程

$$x^3+Ax^2+Bx+1=0,$$

的 3 个根,求值

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}.$$

(提示:参见例 4－9、例 2－5)

分析 15～16 题中的“思考”,知难而进,找出一个直接运用数学归纳法的证明.

15. 设 $0<a<1$,定义 $a_1=1+a$,$a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+a(n\geqslant1)$. 证明对一切 n 有 $a_n>1$.

思考:显然有 $a_1>1$;但若设 $a_k>1$,则不能推出 $a_{k+1}>1$,因为把 $a_k>1$ 代入递推式

$$a_{k+1}=\frac{1}{a_k}+a<\frac{1}{1}+a=1+a.$$

不等号的方向是相反的.

所以,这道题目不能使用数学归纳法来直接证明.

16. 证明

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<2.$$

思考:显然有 $S_1=1<2$;但若设 $S_k<2$,则不能推出 $S_{k+1}<2$,因为把 $S_k<2$ 代入递推式

$$S_{k+1}=S_k+a_{k+1}<2+\frac{1}{2^k},$$

有 $2+\frac{1}{2^k}$ 永远大于 2.

所以,这道题目不能使用数学归纳法来直接证明.

分析 17～25 题的求解,或作出改进、或作出推广.

17. 设复数 z_1 和 z_2 满足关系式

$$z_1\overline{z_2}+\overline{A}z_1+\overline{A}z_2=0,$$

其中 A 为不等于 0 的复数,证明

(1) $|z_1+A||z_2+A|=|A|^2$;

(2) $\frac{z_1+A}{z_2+A}=\left|\frac{z_1+A}{z_2+A}\right|$.

[1987 年高考理科第六题]

解 (1) 略.

(2) 由 $A\neq 0$ 和(1)的结论知 $z_2+A\neq 0$.

$$\frac{z_1+A}{z_2+A}=\frac{(z_1+A)(\overline{z_2}+\overline{A})}{(z_2+A)(\overline{z_2}+\overline{A})}$$

$$=\frac{z_1\overline{z_2}+\overline{A}z_1+\overline{A}z_2+\overline{A}A}{|z_2+A|^2}$$

$$=\frac{|A|^2}{|z_2+A|^2}.$$

利用(1)的结果

$$\frac{z_1+A}{z_2+A}=\frac{|z_1+A||z_2+A|}{|z_2+A|^2}$$

$$=\frac{|z_1+A|}{|z_2+A|}$$

$$=\left|\frac{z_1+A}{z_2+A}\right|.\ \square$$

18. 如图 4-48,圆柱的轴截面 $ABCD$ 是正方形,点 E 在底面的圆周上,$AF\perp DE$,F 是垂足.求证 $AF\perp DB$.

[1995 年高考理科 23(1)题]

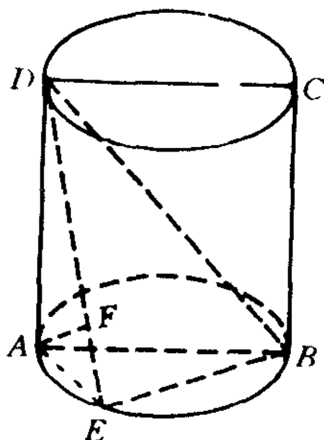


图 4-48

解 根据圆柱性质,$DA\perp$平面 ABE.

因为 $EB\subset$平面 ABE

所以 $DA\perp EB$.

因为 AB 是圆柱底面的直径,点 E 在圆周上,所以 $AE\perp EB$,

又 $AE\cap AD=A$,

故得 $EB\perp$平面 DAE

因为　　$AF \subset$ 平面 DAE

所以　　$EB \perp AF$,

又　　$AF \perp DE$, 且 $EB \cap DE = E$,

故得　　$AF \perp$ 平面 DEB

因为　　$DB \subset$ 平面 DEB,

所以　　$AF \perp DB$. □

(提示:直接利用三垂线定理)

19. 已知二次函数 $y = x^2 - mx + (m-2)$ 的图像与 x 轴交于 A, B 两点,且 $|AB| = \frac{5}{2}$,抛物线的顶点为 C,求 $\triangle ABC$ 的面积.

[某地中考题]

解　设两根为 x_1, x_2,则

$$x_1 + x_2 = m,$$

$$x_1 x_2 = m - 2;$$

从而 $|AB| = |x_1 - x_2|$

$$= \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}$$

$$= \sqrt{m^2 - 4m + 8}$$

$$= \frac{5}{2}.$$

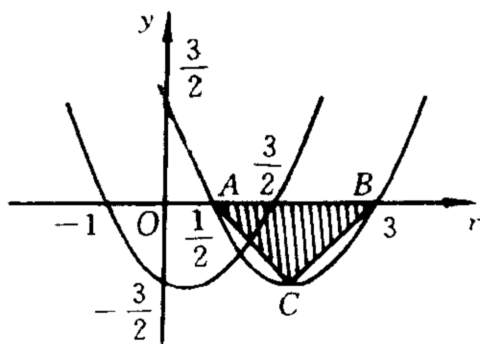


图 4-49

得　　$4m^2 - 16m + 7 = 0$;

有 $m_1 = \frac{7}{2}$,从而 $y = x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$;

或 $m_2 = \frac{1}{2}$,从而 $y = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

两种情况下均有　$y_c = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{25}{16}$.

所以　　$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|AB||y_c|$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{25}{16}$$

$$= \frac{125}{64}.\ \square$$

20. 求 $\sin^2 20° + \cos^2 50° + \sin 20° \cos 50°$ 的值.
[1995 年文科高考第 (23)题]

解 设 $x = \sin^2 20° + \cos^2 50° + \sin 20° \cos 50°$,

配对 $y = \cos^2 20° + \sin^2 50° - \cos 20° \sin 50°$;

则 $x + y = 2 - \sin 30° = \frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} x - y &= -\cos 40° + \cos 100° + \sin 70° \\ &= -2\sin 70° \sin 30° + \sin 70° \\ &= -\sin 70° + \sin 70° \\ &= 0. \end{aligned}$$

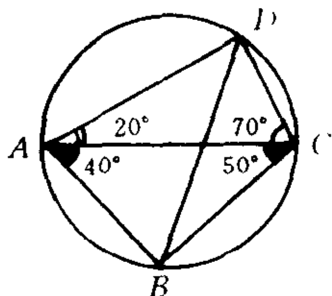


图 4-50

从而得 $x = y = \frac{3}{4}$. □

(提示:(1)如图 4-50 中,直径 $AC = 1$,$\angle ACB = 50°$,$\angle CAD = 20°$,指出 x,y 的几何意义;(2) 将题中的角度一般化为 α,β.)

21. 某轮船公司每天中午都有一艘轮船从哈佛开往纽约,并且每天的同一时刻也有一艘轮船从纽约开往哈佛. 轮船在途中所花的时间来去都是 7 昼夜,而且都是匀速航行在同一航线上. 问今天中午从哈佛开出的轮船,在开往纽约的航行过程中,将遇到几艘同一公司的轮船从对面开来?

解 如图,这是一个“无字的证明”:

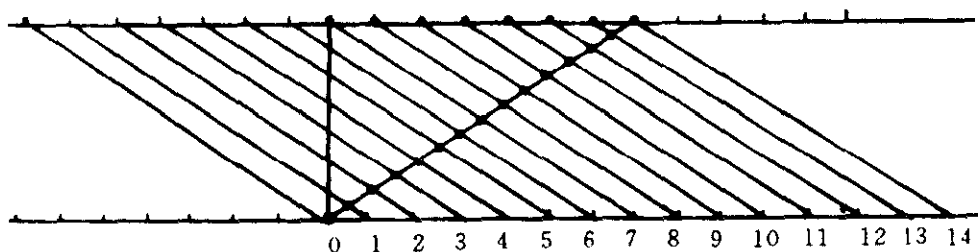


图 4-51

(提示:相遇时,两船航行的时间之差必为整数个昼夜.)

22. 若 $2x + y \geqslant 1$,试求函数

$$w=y^2-2y+x^2+4x$$

的最小值.

解　湖南数学通讯1988年第1期P.10处理如下:

若采用纯代数的配方、消元等方法求解,显然是繁杂的,我们注意到所给条件 $2x+y\geqslant1$ 为坐标平面中的一个区域,所求函数又对应一条二次曲线,因而很自然地可借助于图形的某些启示.

设 $P(x,y)$ 是坐标平面 Oxy 中的一点,作直线 l:

$$2x+y-1=0.$$

因 $2x+y\geqslant1$,则 P 点只能取自 l 的右上方(包括 l)区域.

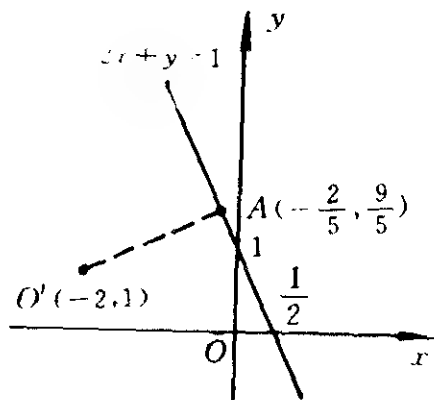


图4-52

同时,由函数式变形得

$$(x+2)^2+(y-1)^2=w+5.$$

这表明 $P(x,y)$ 在以点 $O'(-2,1)$ 为圆心,$r=\sqrt{w+5}$ 为半径的圆上.同时,半径 r 又为 P 到 O' 的距离,而 P 只能取 l 的右上方的点.因而我们作 $O'A\perp l$,A 为垂足.则当 P 取为垂足 A 时,半径 r(因而 w)最小.

因过 O' 且垂直于 l 的直线方程为

$$y=-\frac{1}{2}(x+2)+1.$$

解得垂足 A 的坐标为 $\left(-\frac{2}{5},\frac{9}{5}\right)$,又

$$|O'A|=\frac{|2(-2)+1-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt5},$$

$$\sqrt{w+5}=r\geqslant\frac{4}{\sqrt5},$$

则
$$w\geqslant-\frac{9}{5}.$$

故得出 $x=-\frac{2}{5}$,$y=\frac{9}{5}$ 时,w 有最小值 $-\frac{9}{5}$. □

(提示：既然 w 在 l 与⊙O'的切点处 A 取最小值，那么可以配方，使 $x=-\frac{2}{5}$，$y=\frac{9}{5}$.)

23. 设 $\frac{\sec^3\theta}{\sec\alpha}-\frac{\tan^3\theta}{\tan\alpha}=1$（$\alpha,\theta$ 为锐角），

试证 $$\frac{\csc^3\theta}{\csc\alpha}-\frac{\cot^3\theta}{\cot\alpha}=1.$$

解　这是数学通报 1991 年 2 月号问题解答第 697 题，第 3 期 P.46 给出的答案如下：

由已知得
$$\frac{\sec^3\theta}{\sec\alpha}-\frac{\tan^3\theta}{\tan\alpha}=\sec^2\theta-\tan^2\theta,$$
$$\frac{\sec^3\theta}{\sec\alpha}-\frac{\tan^3\theta}{\tan\alpha}=\sec^2\alpha-\tan^2\alpha;$$

即
$$\frac{\sec^2\theta(\sec\theta-\sec\alpha)}{\sec\alpha}=\frac{\tan^2\theta(\tan\theta-\tan\alpha)}{\tan\alpha},\qquad ①$$
$$\frac{\sec^3\theta-\sec^3\alpha}{\sec\alpha}=\frac{\tan^3\theta-\tan^3\alpha}{\tan\alpha}.\qquad ②$$

易知，$\alpha=\theta$ 时，结论显然成立. 若 $\alpha\neq\theta$，由②÷①整理得
$$\frac{\sec^2\theta+\sec\theta\sec\alpha+\sec^2\alpha}{\sec^2\theta}=\frac{\tan^2\theta+\tan\theta\tan\alpha+\tan^2\alpha}{\tan^2\theta}$$

即
$$\frac{\sec^2\alpha}{\sec^2\theta}-\frac{\tan^2\alpha}{\tan^2\theta}+\frac{\sec\alpha}{\sec\theta}-\frac{\tan\alpha}{\tan\theta}=0.$$

所以
$$\left(\frac{\sec\alpha}{\sec\theta}-\frac{\tan\alpha}{\tan\theta}\right)\left(\frac{\sec\alpha}{\sec\theta}+\frac{\tan\alpha}{\tan\theta}+1\right)=0.$$

由于 α,θ 为锐角，得
$$\frac{\sec\alpha}{\sec\theta}-\frac{\tan\alpha}{\tan\theta}=0,$$

即
$$\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha\cdot\cos\theta}{\cos\alpha\cdot\sin\theta}=0.$$

于是 $\sin\alpha=\sin\theta$，这与 $\alpha\neq\theta$ 矛盾，因此 $\alpha=\theta$. 故
$$\frac{\csc^3\theta}{\csc\alpha}-\frac{\cot^3\theta}{\cot\alpha}=1.\ \square$$

(提示：证 $\alpha=\theta$ 对于结论不是必要的[①].)

24. 解方程组

$$\begin{cases}\sqrt{x(1-y)}+\sqrt{y(1-x)}=m,\\ \sqrt{x(1-x)}+\sqrt{y(1-y)}=n.\end{cases}$$

其中 m,n 是实数.

解　这是《数学通报》1964 年第 7 期问题解答第 542 题，第 8 期 P.51 给出的答案如下，一直为各书刊所沿袭：

因为 m,n 是实数，所以 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$. 令 $x=\sin^2\alpha$，$y=\sin^2\beta$，则

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=m,\\ \sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta=n,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=m,\\ \sin2\alpha+\sin2\beta=2n,\end{cases}$$

或
$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=m,\\ \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=n.\end{cases}$$

当 $m\neq 0, |n|\leqslant|m|\leqslant 1$ 时，我们有

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\arcsin m,\\ \alpha-\beta=\arccos\dfrac{n}{m},\end{cases}$$

所以
$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{2}\left(\arcsin m+\arccos\dfrac{n}{m}\right),\\ \beta=\dfrac{1}{2}\left(\arcsin m-\arccos\dfrac{n}{m}\right),\end{cases}$$

从而
$$\begin{cases}x=\sin^2\dfrac{1}{2}\left(\arcsin m+\arccos\dfrac{n}{m}\right),\\ y=\sin^2\dfrac{1}{2}\left(\arcsin m-\arccos\dfrac{n}{m}\right).\end{cases}$$

当 $m=n=0$ 时，由原方程立即得出

---

① 罗增儒. 解题坐标系的构想. 中学数学(武汉)，1992，3 例 6，P.4.

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases} \square$$

(提示：解答是否完整？答案表达式是否最简？)

25. 三角形内有 n 个点，把这 $n+3$ 个点作连线组成互不相交的小三角形，这样的小三角形有多少个？

解法1 设有 x 个三角形，则其内角和一方面为 $x\pi$，另方面，三角形内每一点对应一个周角，原三角形的三个顶点对应一个平角，有

$$x\pi = n\cdot 2\pi + \pi.$$

得 $$x=2n+1. \square$$

解法2 设有 a_n 个三角形，易知有递推关系

$$\begin{cases} a_1=3, \\ a_{k+1}=a_k+2. \end{cases}$$

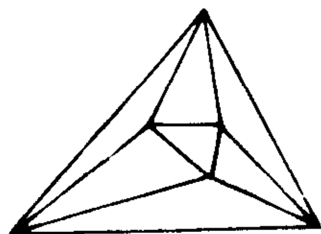


图 4-53

解得 $$a_n=2n+1. \square$$

(此解法默认了剖分的惟一性，请思考是否合理？)

解法3 视平面图形为空间简单多面体的投影．设小三角形有 x 个，则

$$V=x+1,\ E=n+3,\quad F=\frac{3(x+1)}{2}.$$

代入欧拉公式 $V+E-F=2$，可解得

$$x=2n+1. \square$$

(提示：分别作出推广)

26. 用物理知识证明[①]

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}.$$

(参见例 6—116)

① 罗增儒．$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$ 的 10 种证明．湖南数学通讯，1985，5，P.4.

第五章　解题方法

本章讨论与解题方法有关的几个问题,如数学方法的文化审视,解题方法的研究课题,反例的作用与构造.重点是提出方法研究应深入进行的6个基本问题,作为示范,介绍了配方法的研究.

5-1　数学方法的认识

对于数学方法有不同角度、不同层次的认识,我们先从方法说起.

5-1-1　方法的理解

对于"方法"的含义,古今中外,人们从不同的角度作过不同的理解[1].

1. 方法是一种规则和标准

《墨子·天志》中记载,轮人有规,匠人有矩[2]."今轮人操其规,将以量度天下之圆与不圆也,曰:中吾规谓之圆,不中吾规者谓之不圆.是以圆与不圆可得而知也,此其故何?是圆法明也.匠人亦操其矩,将以度量天下之方与不方也,曰:中我矩者谓之方,不中我矩者谓之不方.是以方与不方皆可得而知之.此其故何?则方法明也".

2. 方法是一种道路和途径

---

① 参见《自然辩证法研究》1986年第四期,韩增禄文.

② 规即圆规;矩是由长短两直尺相交成直角的拐尺,尺上有刻度,短尺为勾,长尺为股.《孟子》曰:"不认规矩,不能成方圆."

17 世纪英国哲学家霍布斯认为:"在哲学里,'方法'就是根据结果的已知原因来发现结果,或者根据原因的已知结果来发现原因时所采取的最便捷的道路."

3. 方法是一种工具和手段

黑格尔在他的《逻辑学》中明确指出:"在探索的认识中,方法也就是工具,是主观方面的某种手段,主观方面通过这个手段和客体发生关系……"

4. 方法是一种程序和结构

亚里士多德把逻辑证明的方法称为"科学的实际程序".弗兰西斯·培根把实验方法称之为"实验程序".美国科学哲学家约翰·洛西认为:"科学方法……的主题是各门学科的程序和结构."

5. 方法是一种技巧和艺术

贝弗里奇把他论述科学研究方法的著作命名为《科学研究的艺术》.意大利学者佩拉在谈到方法的含义时认为:"首先,科学方法是一个程序……;其次,科学方法是一套规则;第三,科学方法是一种概念上和操作上的技巧,由于它的作用,由程序构成规则规定的一个步骤才被实际完成."

6. 方法是一种理论知识的实际应用

原苏联学者什托夫认为:"理论和科学方法之间的区别是相对的,甚至可以说,科学方法就是理论的实际应用,就是行动中的理论."原苏联学者萨奇柯夫也断言:真正的科学方法就是行动的理论.

7. 方法是一种理论知识的自我认识

黑格尔在谈到"真正的哲学方法"时指出:"这个方法就是关于逻辑内容的内在自身运动的形式的意识."

8. 方法是适当的整理和排列

笛卡儿说:所谓方法就是把我们应该注意的事物进行适当的整理和排列.

9. 方法是问题的对立面

孝廉著《辩证逻辑》(安徽人民出版社)认为:"方法是客观(自然

与社会)规律的正确反映,并能有效地解决人们面临的问题.即方法又转过来成为解决问题的思想、方针、路线、战略、策略、计划、方案、措施等."所以说"方法是问题的对立面".

在《科学学辞典》(刘茂才、张伟民主编)里,方法是这样解释的:"方法"这个词起源于希腊词 μετο 和 οδοζ. μετο "顺着"和"直"的意思, οδοζ 是"道路"的意思,因此,"方法"这个词在字面上就意味着(正确的)道路运动[①].方法是在任何一个领域中的行为方式,是用来达到某种目的的手段的总和.它是人们认识、改造世界,所应用的方式和手段.人们认识和改造世界,必然要进行一系列的思维的实践活动,这些活动所采用的各种方式,统称为方法.

同样,解决数学问题的方法——数学解题方法也有不同角度、不同层次的认识,如

1. 数学方法就是对数学内容的理解.也有人说"方法寓于内容之中".

2. 数学方法就是对数学形式的认识,就是变换形式的全过程,方法就是变形.

3. 波利亚说:一个想法使用一次是一个技巧,经过多次的使用就可以成为一种方法[②].

4. 弗里德曼说:解数学题,这就是要找到一种一般数学原理的序列,把这些原理用于习题的条件或者条件的推论,得到习题所要的东西,即习题的答案.

5. 斯诺夫斯卡娅说:解题就是把题归结为已经解过的题.

6. 塔尔塔科夫斯基打比方说,寻找题解就好像去抓藏在石堆里的老鼠.

7. 鲁宾什节依认为,人们解题是一个改编习题的过程.

---

① 数学家笛卡儿有句名言:"那些只是极慢地前进的人,如果总是遵循正确的道路,可以比那些奔跑着然而离开正确道路的走在前面很多."

② 波利亚、舍贵.数学分析中的问题和定理,德文初版前言(ⅲ).

8. 解题就是隐蔽条件的明朗化.

9. 解题就是已知信息的有序化.

10. 解题方法就是解题主体解开数学黑箱之谜的途径、手段与方法.

……

按照徐利治教授的观点,方法论就是把某种共同的发展规律和研究方法作为讨论对象的一门学问.而数学方法论主要是研究和讨论数学的发展规律、数学的思想方法及数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问.

5.1-2 数学方法的审视

数学方法有两种不同的含义,一种是指数学工作者解决数学问题的方法,另一种不是指或主要不是指数学家研究数学的方法,而是指科研人员以数学概念和理论揭示所研究事物的内在联系和运动规律的方法,这一节偏重于在后一意义上来使用数学方法这个词①.因此,所谓数学方法,就是运用数学所提供的概念、理论和方法对所研究的对象进行定量的分析、描述、推导和计算,以便从量的关系上认识事物发展变化的规律性的方法②.之所以要这样做,主要是想从文化的角度对数学方法作一审视.

数学方法是一个有序的系统结构的统一体,它与数学的特征相一致,具有几个主要的特点.

1. 思想材料的形式化抽象

各门科学都具有抽象性,但数学的抽象程度更高,因为数学的抽象中只保留量的关系与纯粹有序的形式,而舍弃其他的一切.有时,我们甚至看不到它与现实世界有什么联系.比如,世界上本来并没有

① 前一含义在数学方法论著作中已经谈得很多,后一含义的文化审视更适合本书的主题.

② 吴岱明.科学研究方法学.湖南人民出版社,1987,5,P.379.

"二次方程"这个实物,也没有"二次方程解法"这个实物,二次方程及其解法是人对自然界的概括和认识,是经过人加工了的思想.数学研究的对象,它的概念与理论的抽象性,决定了数学方法的抽象性.

数学抽象性的一个区别于其他学科抽象性的特点是形式化,在数学的抽象中,要舍弃其他的一切特征并且用高度形式化的符号与语言来描述,把现实问题转化成数学符号之间的运算关系或图形之间的组合关系.没有这一点,就没有数学.原苏联数学家辛钦说:一切数学学科的决定性特点总是某种形式化的方法.……数学问题的解决,不能由它所反映的物体或现象的物质本性去解决,而只能由它的形式结构特点去解决.

作为形式化抽象的一个典型例子,我们见到,在数学中由实体公理化方法到形式公理化方法的发展.前者的典型代表是欧几里得的《几何原本》,后者的典型代表是希尔伯特的《几何基础》.希尔伯特不但把欧几里得的几何系统整理成一个纯粹的演绎系统,而且引入公理系统的相容性、独立性和完备性.凡满足这些特性的理论体系都可成为独立的公理化体系,从而将数学方法的抽象性和形式化又提到更高的程度.

2. 策略创造与逻辑演绎的结合

数学方法在揭示事物量与形式及其之间的关系时,不是通过直接的实验方法来实现的,而是通过一系列的逻辑推理和逻辑证明的方法来实现的.数学定理的证明,必须是由已知的公理、定理、经过逻辑推导、一环扣一环、步步有根据来逐步推出.所以数学方法具有逻辑的严格性.谁都知道,没有逻辑证明的数学不能算作数学,不会逻辑演绎的学生不能算学会了数学.

但是,数学并不是逻辑的附庸,在宏观上,数学方法是生动活泼的策略创造.如果说,三次方程的根是客观存在的话,那么求根的方法则是人类智慧的发明.在这个策略创造或智慧发明的过程中,少不了直觉归纳、类比联想、观念更新、顿悟机巧等,这些又常常不是那么严格的.事实上,任何一种新的数学理论只靠严谨的逻辑演绎是"推"

不出来的,必须加上生动的思维创造,一旦有了新的想法,采用了新的策略,掌握了新的技巧,数学方法就大步前进.人们的直觉和顿悟,往往已经得出了整个理论的70%,剩下的30%才是逻辑验证.数学史上冠以某数学家名字的猜想、定理、法则,往往一开始并无逻辑证明,逻辑推理是后人补做的,但是,人们仍把功劳归于首创者,道理也就在这里.

目前,对数学方法的认识,侧重于"逻辑演绎"方面,从而忽视了观念形态上的策略创造.应该认识到,逻辑演绎是基础,策略创造是主导,要把二者结合起来,才是完善的.

3. 通用精确简约的科学语言①

首先,数学方法具有量的确定性,因为数学的结论是无可争辩的和确信无疑的.量虽然有时也呈变态形式,但在确定条件下,它有确定值或具有确定变化范围,有遵循的规律.数学在研究量及量变化的关系时,所得的结果,都有确定的规定性.数学的抽象也不是任意的、主观的,而是从量的角度深刻地揭示客观规律.1946年勒维耶通过计算,在笔尖上发现海王星,被科学史传为佳话(这是一个多么精确的科学语言!)爱因斯坦在狭义相对论中用数学方法获得的质能公式预示了原子核破裂将发出巨大的能量.爱因斯坦曾这样描述数学:"为什么数学比其他一切科学受到特殊的尊重,一个理由是,它的命题是绝对可靠和无可争辩的,而其他一切科学的命题在某种程度上都是可争辩的,并且经常处于会被新发现的事实推翻的危险之中.数学给与精确的自然科学以某种程度的可靠性,没有数学,这些科学是达不到这种可靠性的."

其次,数学方法有广泛的应用性.有一句格言说"数学比科学大得多",许多科学大师都有这样的信念:"我们生活在受精确的数学定

---

① 关于数学的特点,张奠宙等著《数学教育学》分析了三条.1° 数学对象的特点:思想材料的形式化抽象;2° 数学思维的特点:策略创造与逻辑演绎的结合;3° 数学知识的特点:通用精确简约的科学语言.见该书P.14~P.20.

律制约的宇宙之中”.任何科学都有自己的研究对象和应用范围,而量与形式及其之间的关系则贯穿于一切领域和一切事物之中.对不同的领域和不同的事物进行定量分析时,都离不开数学方法,数学越是抽象就越得到广泛的应用,在王梓坤院士主笔的“今日数学及其应用”报告中,有大批生动的例证.严士健教授在“面向21世纪的中国数学教育改革”一文中也专门谈到数学的新应用①.

数学方法应用的普遍性,还由于它是一种精确通用的科学语言.伽里略说:“自然界的伟大的书是用数学语言写成的.”这种数学语言不仅形式上简明扼要,而且表达的内容深刻、精确.自然科学的许多定律,都是用简明的数学公式表达的,这种表达,没有含糊不清或者产生歧义的缺点,也没有交往过程中的冗余信息,它总是用最少、最明确的语言去传达最大量最准确的信息.在当代,凡是发展比较完备的科学理论,几乎都建立了自己完美的数学表达式.一门学科使用的数学越多,表示这门学科越成熟.数学方法作为一种世界性的科学语言正在被全世界各学科所使用,学科的科学化就是学科的数学化——这已经成为所谓科学数学化的趋势.

4. 机巧性与程式化的结合

数学方法在解决问题时面临大量可供使用的命题和可加尝试的途径需要作出机巧的选择,很多时候,还要进行从无到有的策略创造.这是一个十分生动和非常神奇的情景.另一方面,在具体实践中,又必须进行呆板的、冰冷的、固定的演算和复杂的推理,表现为程式化.准确的计算、严格的推理、精确的公式,这些都是程式,数学方法的本质就是数学思想的程式化.一方面是灵活机动的创造性思想,另一方面是机械程式的操作,两者缺一不可,如果思想不能转化为操作,思想会流于空洞;同样,如果操作没有思想做灵魂,充其量为雕虫小技.

---

① 见严士健主编.21世纪中国数学教育展望(2).北京师范大学出版社,1995年12月.

5. 知识的核心、思维的体操

数学内容与数学方法是密切联系的,数学方法伴随着数学的发展而发展,没有数学,当然说不上数学方法.但“从知识结构的角度看,数学方法是属于深层次结构的知识,它是由理性类的科学方法相联系的元科学知识(知识之知识)和哲学知识(知识之母)所组成的.如果真正掌握了深层次结构的知识,也就掌握了思维规则和发现其他知识的方法.因此,从某种意义上讲,数学方法是数学知识体系的灵魂”[①].日本数学家米山国藏说的好:“无论对于科学工作者、技术人员,还是数学教育工作者,最重要的就是数学的精神、思想和方法,而数学知识是第二位的.”

人们常说,数学是思维的体操,而数学的训练主要的就是数学方法的训练.这是一个公民与科学工作者都离不开的基本训练,许多国家的教育工作者都把本语、外语和数学作为三门语言课来学习.

数学方法的训练使人们具有数学的头脑,工作计划性强、条理性好,有严格的逻辑推理能力,注重优化结构,擅于科学决策,富有创造性.所有这一切,优化了人的思维素质,仿佛在头脑里贮藏了能量,一旦需要就会产生爆炸性的威力释放在各个方面.从1969年开始到1983年的16次诺贝尔经济奖中,有9次由数学家获得,说明良好的数学素质将在一切方面放射光芒[②].

这些已经涉及到数学方法的文化价值与教育功能了.

综合以上的5个方面,我们可以说数学方法在科学研究和社会生活中有不可替代的作用:

(1) 数学方法能提供定量分析和精确计算的手段.

(2) 数学方法能提供一种简洁精确的形式化语言.

---

① 郑隆炘.科学思想方法与科学教育.山东教育出版社,1994年3月,P.114~P.115.

② 1994年,数学家John F. Nash又以其21岁时写的数学短文而获诺贝尔经济学奖.

(3) 数学方法能提供逻辑推理和科学抽象的工具.

(4) 数学方法能为总结科学理论和创立新学科提供新的手段.

难怪有人说,数学方法是数学的本质,只有充分了解数学方法的人才是真正的数学家.

5-1-3 解题方法的层次性

这里说的解题方法,是指数学工作者解决数学问题的方法.对此,不仅有理解角度上的不同,而且也有应用层次上的区别.目前,数学解题方法还没有一个统一的分类,我们在这里先将方法分成3个层次,第一层次是一般哲学方法,这是最高层次;第二层次是科学研究方法;第三层次是学科研究方法.这三个层次是顺序包含关系.对第三层次,又可以分成三类,即创立学科的方法,进行思维的方法,具体解题的方法.说明如下.

第一类 创立学科的方法.有公理化方法、模型化方法、结构化方法,以及集合论方法、极限方法、坐标法等.具有统率全局的作用.比如:

公理化方法,这是从尽可能少的基本概念和基本公理出发,应用严格的逻辑推理,推出其余命题或定理,以至建立整个理论演绎系统的一种方法.这里的基本概念是一些不定义的原始概念,它们必须是真正基本的、而无法用更原始、更简单的概念去定义的概念,必须是数学实体的高度纯化的抽象.这里的基本公理,作为对基本概念相互关系的规定,不是随意选定的,它应该满足相容性、独立性、完备性.公元前300年问世的欧几里得《几何原本》是古代数学公理化的一个辉煌成就,1899年希尔伯特的《几何基础》则是近代公理化方法的代表作.公理化方法是整理学科知识,使之条理化、系统化、上升为理论体系的一种有效手段,在其他自然科学中也有很广泛的应用.公理化方法已经成为数学研究的一个基本方法,而其本身又成为科学研究的对象——数理逻辑所研究的一个重要内容.

模型化方法,这是把所考察的现实问题,化为数学问题,构造相

应的数学模型,通过对数学模型的研究,使问题得以解决的一种数学方法.欧拉解决“七桥问题”用的就是这个方法.数学模型与现实原型的关系是反映与被反映的关系,这个反映实质上是人类思维的一种创造.其基本形式为:

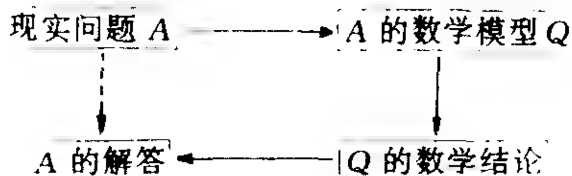


图 5-1

第二类,进行思维的方法.有实验、猜想、类比、联想、归纳、演绎、分析、综合等,具有通理、通法、适应面广的特征.比如

类比法,这是根据两个对象的某些相同属性作出它们的另一些属性也相同的一种推理形式.它以比较为基础,采用下面的公式

A 对象具有属性 a,b,c,d;

B 对象具有属性 a,b,c;

所以,B 对象可能具有属性 d.

虽然,由于客观事物的互异性,类比法得出的结论不是必然的,但它是提出猜想、获得发现的一个伟大源泉.数学中常见的类比有,平面与空间的类比,数与形的类比,简单与复杂的类比,有限与无限的类比等.类比法的一个著名例子是欧拉求级数和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

归纳法,这是从个别事实,概括出一般原理的一种思维方法,它也是获得发现的一个伟大源泉,其基本模式为

对象 $A,B,C,D,\cdots$ 均属于 S 类.

对象 A 具有属性 P,

对象 B 具有属性 P,

对象 C 具有属性 P.

所以,S 类对象具有属性 P.

归纳法在数学上同时具有发现真理和证明命题双重作用.作为一种思维方法,它在使用中是有层次、有阶段、有原则、有目的的.它的目的是探究表象之中的规律性;它的使用原则是由表及里、由浅入深、不断总结、逐步逼近;它在使用中涉及的思维层次是经验思维(源于实践)、直觉思维(大胆猜测)、形式思维(通过比较得出一般规律的表达式),它的使用阶段为:试验——归纳——猜想——证明.

演绎法,这是从一般原理推出个别结论的逻辑方法.目前我们的中学数学是演绎法的一统天下,无论是教科书的编排,还是教师的课堂教学,以至学生的解题过程,无不使用演绎法.其基本的推理格式就是形式逻辑中的三段论:

一切 M 都是 P.　　(大前提)

S 是 M.　　(小前提)

所以,S 是 P.　　(结论)

演绎与归纳是相辅相成、对立统一的.在由个别到一般的过程中,思维方式以归纳为主,同时也包含着演绎;在从一般到个别的过程中,则以演绎为主,同时也必须有归纳.整个认识过程要求人们不应当以一个去排斥另一个.波利亚在《怎样解题》的序言中说过:通过研究解题的方法,我们可以看到数学的另一个侧面.是的,数学有两个侧面,它是欧几里得式的严谨科学,但它也是别的什么东西.用欧几里得方式提出来的数学看来像是一门系统的演绎科学;但在创造过程中的数学看来像是一门实验性的归纳科学.这两个侧面都像数学本身一样古老.但从某一点说来,第二个侧面则是新的,因为以前从来就没有"照本宣科"地把处于发现过程中的数学照原样提供给学生、或教师自己、或公众.

第三类,具体解题的方法.这又可以依其适应面的范围分为两类.

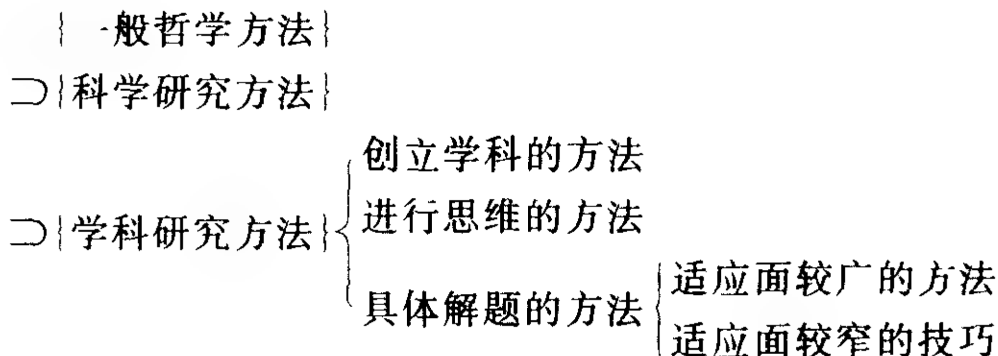
(1) 适应面较广的解题方法.有消元法、换元法、待定系数法、反证法、坐标法、三角法、构造法、递推法(包括数学归纳法)、配方法等.

(2) 适应面较窄的解题技巧.比如因式分解中的"分裂中项"法,

恒等变形中的"替1法",三角函数作图中的"五点法",几何证明中的"补形法"、"面(体)积法",不等式证明中的"放缩法",数列求和中的"拆项相消法"等,不一而足.

仅仅是不等式的证明我们就可以列举出一长串的方法与技巧:比较法、综合法、分析法、反证法、基本不等式法、放缩法、叠加法、连乘法、数学归纳法、判别式法、求极值法、辅助函数法、构造法、微分法.而微分法又可以有求极值、确定单调性、中值定理、凹凸性质等多种形式.

综上所述,解题方法的粗略层次为:



5-2　解题方法的研究

解题方法的研究正在热潮之中,亦在起步之始,需要弄清的问题很多,也很广,它们的解决主要是《数学方法论》课程的任务.下面我们提出6个较为基本的研究课题,并谈一些粗浅的认识:

要研究解题方法的实质.

要研究解题方法的功能.

要研究解题方法的逻辑基础.

要研究解题方法的变化形式.

要研究解题方法的应用层次.

要研究解题方法的正确使用.

5-2-1　实　质

就是说,要研究解题方法的实质.

一般认为,数学对象和数学真理具有客观性,数学知识是人们对客观存在的反映或发现;但数学上大量精巧的方法则是人脑的能动性的产物,把它们称作发明或创造是合适的.当然,这种发明不是凭空想象的,它与数学实践活动相联系,与数学知识的不断发展及数学方法的不断更新相联系.我们探讨解题方法的实质,就是要透过那机械操作的形式去弄清每一个解题方法与什么样的数学知识相联系,与什么样的数学方法相结合.比如

1. 判别式法的认识[①]

判别式法只能算技巧层次的解题方法,但它在讨论方程、证明不等式、求函数值域(极值),研究函数(或曲线)性质等许多方面的神通广大,有时甚至连我们自己也目瞪口呆,而误用判别式所造成的后果又使我们莫名其妙.这都需要我们从本质上去认识"判别式".我们先来对实系数一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0),\qquad ①$$

作这样的配方,两边乘以 $4a$,

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0,$$

把常数项移到右方,两边加上 b^2 可配方

$$(2ax)^2+2\cdot(2ax)\cdot b+b^2=b^2-4ac,$$

得

$$b^2-4ac=(2ax+b)^2.\qquad ②$$

这就得出了判别式

$$\Delta=b^2-4ac.\qquad ③$$

并且由这个式子的符号便可判别二次方程是否有实根,实根是否相等.如果我们对判别式不是只见到孤立的式③,而是把式②作为一个整体并且与式①联系起来看.那么,我们将看到:

---

① 罗增儒.数学观点的教学.中学数学教学参考,1986,1,P.2.

(1) 判别式实质上是配方法的结果，并且表示为一个完全平方式$(2ax+b)^2$(因而在实数范围内具有非负性质). 所以，判别式法就把配方法与非负数的性质合二而一，并且能省去配方的具体过程而直接发挥配方法与非负数性质的双重功能.

(2) 表现为非负数性质或源于配方法的数学命题还很多. 比如基本不等式与柯西不等式

$$a^2+b^2\geqslant 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2\geqslant 0.$$

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2 \geqslant (ac+bd)^2.$$

这就不难建立起与判别式法有关的知识链或方法链(参见例 4－34 的注). 如：

判别式法——配方法——基本不等式——柯西不等式——三角函数的值域——……

(3) 在方程的观点之下，实数范围内判别式的整体结构

$$b^2-4ac=(2ax+b)^2\geqslant 0 \quad ④$$

中，既联系着等式又联系着不等式，还联系着可以分离开来的(a,b,c 与 a,b,x)4 个字母，这种得天独厚的结构，也是判别式有广泛应用的一个原因.

(4) 进一步，当 a,b,c,x 本身为实函数时，由式①到式②的配方过程依然有效，因而判别式作为配方法的结果并取完全平方式的作用，可以离开二次方程而得到开拓(因而例 1－3 的解法是正确的)，但在开拓的过程中，由于式④中的不等式未必能取等号，因而也会出现误判，表现出"判别式法"的局限性. 了解这一原因，就能提高自觉性，避免盲目性.

(5) 平方式为非负数是实数的性质，在复数范围内，$(2ax+b)^2\geqslant 0$ 并不成立，这也是判别式产生误判的一个原因.

顺便提起，由式②可以看到，配方法对式①有隐去一次项的功能，甚至我们可以认为，用配方法解二次方程实质上是作线性变换

$$y=2ax+b,$$

把①变为　$y^2=b^2-4ac$.

从而求解.同理,可以作线性变换

$$y=3ax+b,$$

消去二次方程

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

的平方项,化为

$x^3+px+q=0$ 的形式.

配平方消去一次项的功能在坐标平移中也有体现.

2. 换元法的实质

在§4-1-2中(P.146),我们曾经列举过换元法的三种基本形式:新元代旧式、新式代旧元、新式代旧式.因此,下述一些"换元法"的定义均有片面性:

(1) 在解题中为了化繁为简、化难为易、促使未知向已知转化的目的,把某个式子看成一个新的未知数,实行变量替换的办法称为换元法.

(2) 在解代数或三角问题时,常常可以把某个较为复杂的式子(根式、对数式、指数式、三角函数式、反三角函数式等)看做一个整体,以一个新的未知数替换它,使所研究的问题变得较为简单或变换为已经熟悉的问题.这样的方法就称为换元法.

那么,怎样理解才算是全面的呢?我们觉得无论那种换元形式,其本质上都是引进一个对应,对原来给定的关系式进行分解或实施复合.所以说,换元法的理论基础是"等量"代换.

例5-1　设对所有实数 x,不等式

$$x^2\log_2\frac{4(a+1)}{a}+2x\log_2\frac{2a}{a+1}+\log_2\frac{(a+1)^2}{4a^2}>0 \qquad ①$$

恒成立,求 a 的取值范围.

[1987年数学高考理科第五题]

讲解　当年许多考生将问题转化为不等式组

$$\begin{cases}\dfrac{a}{a+1}>0,\\ \log_2\dfrac{4(a+1)}{a}>0,\\ \left(2\log_2\dfrac{2a}{a+1}\right)^2-4\log_2\dfrac{4(a+1)}{a}\cdot\log_2\dfrac{(a+1)^2}{4a^2}<0.\end{cases}$$

再下来就望而却步了.

若变换一下形式,令 $m=\log_2\dfrac{a+1}{2a}$,则①可变为

$$x^2(3+m)-2mx+2m>0,$$

或 $$3x^2+[(x-1)^2+1]m>0. \qquad ②$$

这种形式的变换,揭示了问题的实质,式②对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立等价于

$$m>0.$$

下来的求解就没有什么困难了.

同样,对例 3-10(P.131)作变换

$$a=x-y,\ b=y-z.$$

则问题变为

$$(a+b)^2-4ab=0\Rightarrow a=b.$$

有初中一年级的乘法公式便可完成.

而习题四第 17(1)题中(P.247),若令

$$\alpha=z_1+A,\ \beta=z_2+A,$$

则题目变为

$$\overline{\alpha\beta}=|A|^2\Rightarrow|\alpha||\beta|=|A|^2.$$

这几乎不证自明.

在例 4-36 中(P.220),令

$$x=-\frac{b}{\sqrt{3}},\ y=c,$$

$$u=\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ v=\frac{a+2c}{2}.$$

问题的实质为

$$\begin{cases} xu+yv=0, \\ x^2+y^2=9, \\ u^2+v^2=16. \end{cases} \Rightarrow \quad uy-xv=?$$

继续参见例6－74(P.421).所以说,恰当的变形,将有助于暴露问题的本质.

3. 在映射的观点看来,抽屉原理体现了有限集合间的一个本质特性:如果两个有限集的元素不相等,那么它们之间不能建立一一映射.所以把 $n+1$ 个苹果放进 n 个抽屉时,必有一个抽屉至少放有2个苹果.

这是从内容上看抽屉原理,若从方法的角度看,抽屉原理又是反证法的一种固定形式:若不然则有一系列不等式,再求和得出矛盾.

设 n 个抽屉 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 放的苹果数为 $|A_i|(i=1,2,\cdots,n)$.若"必有一个抽屉至少放有2个苹果"不成立,则有

$$\begin{aligned} &|A_1|\leqslant 1, \\ &|A_2|\leqslant 1, \\ &\cdots\cdots \\ &|A_n|\leqslant 1. \end{aligned}$$

相加
$$n+1=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|\leqslant n.$$

这一矛盾说明,必有一个抽屉至少放有2个苹果.

抽屉原理的其他形式都可以按照这个固定的格式来证明.(参见§5－2－4,P.279)

4. 基本量方法体现了向量空间中基的思想在中学数学中的具体应用.

5. 数学归纳法的早期例证可以从欧几里得对素数个数无穷的证明中找到,1575年莫罗利科在他所著的《算术》一书中,明确地提出递归推理的思想方法,这一思想由于帕斯卡的工作而得到提炼和广泛传播.在数学上曾把它叫做"逐次归纳法"、"完全归纳法",因为它与通常的归纳程序有极其相似之处.虽然数学归纳法早就被广泛

使用,甚至称为“是数学中全部优点的根源”(庞加莱),但数学归纳法的可靠性或逻辑基础是直到 1889 年意大利数学家皮亚诺发表《算术原理新方法》提出自然数的公理体系时才得以奠定的.人们放心地使用着数学归纳法,但数学归纳法到底是归纳法还是演绎法,目前认识并未统一.中国社会科学院哲学研究所的张家龙先生在“评一本数学教学参考书”中(《数学通讯》1～2(1981))明确指出“数学归纳法不是完全归纳法”,而证圆周角定理用的是“分情况证法”,“同完全归纳法是风马牛不相及的”.上海复旦大学附中曾容老师在“数学归纳法的教学探讨”(《数学教学》1982 年第 1 期 P.37)中谈到,学生为什么感到困难,原因在于“因为数学归纳法不是归纳法,也谈不上是完全归纳法,把不是归纳法的数学归纳法,当做归纳法来教,必然是牵强的,不自然的,是难以理解的.”另一方面,许多中学教师强调[①]:用归纳的方法教“数学归纳法”,并把归纳法小结如下:

归纳法
- 不完全归纳法、结论或然.
- 完全归纳法
  - 穷举法
  - 数学归纳法

  结论必然.

上面,我们列举了 5 个方法并发表一些议论,只是作为“要研究解题方法的实质”的一个开头.

5－2－2 功 能

这里说的功能,主要指方法在论证中的功效、作用与能力,暂不涉及方法的教养功能.弄清方法的论证功能,不仅能充分发挥方法的论证能力,而且还能扩大方法的潜能(比如数学归纳法加强命题).应该说,目前对很多方法的功能我们都没有认真研究过,就像家里买了一台电脑,只起了一个打字机的作用,很多功能都尚未发挥出来.

1. 根据我们上面对判别式的认识,是否可以找到判别式的 3 个基本功能.

① 如中学数学教学参考,1981 年第 4 期 P.23;1994 年第 5 期 P.38.

(1) 具有配方法的功能. 因此,能用配方法处理的问题可以考虑换成判别式法简捷处理;反之,能用判别式处理的问题,一定可以用配方法来处理.

(2) 具有完全平方式的功能. 这在实数范围内要产生非负数,因而可以用来处理大批不等式问题.

(3) 具有分离字母的功能. 能从 a,b,c,x 的关系式中,把 a,b,c 分离出来.如例 1-3(P.14)就利用判别式使三角函数内的 x 与其他 x 分离开来.

例5-2　求方程

$$5x^2+6xy+2y^2-14x-8y+10=0 \qquad ①$$

的所有实数解.

讲解　中学生数学 1982 年第 2 期 P.16 给出了一很好的判别式法.即将原式整理成关于 x 的一元二次方程

$$5x^2+(6y-14)x+(2y^2-8y+10)=0. \qquad ②$$

它有实数解,当且仅当其判别式不小于零,即

$$(6y-14)^2-4\times5\times(2y^2-8y+10)\geqslant0.$$

整理后,得　$-(y+1)^2\geqslant0.$

因此,只有　$(y+1)^2=0.$

即 $y=-1$,而此时

$$x=-\frac{6y-14}{2\times5}=2.$$

于是,原方程只有惟一的一组实数解

$$\begin{cases}x=2,\\ y=-1.\end{cases} \square$$

这个解法显示了"判别式法"的功能,但原文认为"像本例这样的问题,无论如何也无法配成平方,也就是说,配方法对它是束手无策的."这就割裂了判别式法与配方法的关系.事实上,本例不仅能够配方,而且有多种形式的配方.

配方 1[①] 将原方程拆项

$$4x^2+4xy+y^2-12x-6y+9$$
$$+x^2+2xy+y^2-2x-2y+1=0.$$

整理,得

$$(2x+y)^2-6(2x+y)+9+(x+y)^2-2(x+y)+1=0.$$

配方,得 $$(2x+y-3)^2+(x+y-1)^2=0. \quad ③$$

因为 $$(2x+y-3)^2\geqslant 0,$$
$$(x+y-1)^2\geqslant 0.$$

当且仅当 $$\begin{cases}(2x+y-3)^2=0,\\(x+y-1)^2=0\end{cases}$$

时,原方程成立,解之,得方程的解为

$$\begin{cases}x_1=x_2=2,\\y_1=y_2=-1.\end{cases}\ \square$$

如果说,这种解法需要拆项、添项,技巧性较强,直接与经验相联系的话,那么下一个配方法则完全程序化——§5-2-1 中对二次方程的配方过程.

配方 2 将原方程整理成②,然后两边乘以 $a=5$,有[②]

$$25x^2+5(6y-14)x+5(2y^2-8y+10)=0,$$

配方 $$(5x)^2+2(5x)(3y-7)+(3y-7)^2$$
$$-(3y-7)^2+5(2y^2-8y+10)=0,$$

即 $$(5x+3y-7)^2+(y+1)^2=0. \quad ④$$

得 $$\begin{cases}5x+3y-7=0,\\y+1=0.\end{cases}$$

解得 $$x=2,\ y=-1.\ \square$$

另外,还可以将原式整理成 y 的二次方程,得出配方

① 罗庆洲.一点意见.中学生数学,1983,3,P.26.

② 当二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中的 b 为偶数时,两边乘以 a 便可顺利配方.

$$(2y+3x-4)^2+(x-2)^2=0. \quad ⑤$$

把④与⑤相加,也一定是配方式

$$(5x+3y-7)^2+(2y+3x-4)^2+(x-2)^2+(y+1)^2=0. \quad ⑥$$

2. 对于反证法,常常有一种功能认识不足的误解,以为是正面直接证法走不通,迫不得已而采取的被动的、反面的、间接的证法.其实反证法是一个积极的证明大法.因为

(1) 适用面广.一般说来,任意一个数学命题"$A\Rightarrow B$"都可考虑使用反证法,很多命题的正面证法也都能改写成反证法(如数学归纳法改用最小数原理就变成反证法了),特别地,有些命题非常适用反证法,否则就很困难,甚至无从下手(§5-2-6).

(2) 产生有效增设.对"$A\Rightarrow B$"用反证法"A 且 $\overline{B}\Rightarrow C$ 且 $\overline{C}$"时,等于增加了一个"已知条件"$\overline{B}$,使得推理能更方便也更容易进行.这个新增加的条件"$\overline{B}$"是解题的有效增设(§6-2-9).

(3) 思路选择余地大.对"$A\Rightarrow B$"目的地只有一个,思路的选择受到限制;而"A 且 $\overline{B}\Rightarrow C$ 且 $\overline{C}$"中的 C,有广泛的选择余地.特别地,当 C 就是 A 时,就相当于证明了逆否命题"$\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$"①.

(4) 推理方便.在探索解题思路时,由 B 找充分条件,头绪较多,有的头绪靠不上 A,不如由"A 且 $\overline{B}$"找必要条件方便.

3. 深入理解数学归纳法,可以通过加强命题来扩充它的功能.比如说,一个关于有限数字的命题,可以通过推广到任意自然数而使用数学归纳法;又比如说,一个较弱的命题提供了较弱的归纳假设,使证明发生困难,而将其变为一个较强的命题时,就提供了较强的归纳假设,使证明更为顺利(§6-2-9有效增设).

例5-3　求证

---

① 可见,把反证法理解为"改证逆否命题"将缩小反证法的应用范围、削弱反证法的使用功能.反证法是从证明反论题虚假从而证明原论题真实的方法.

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{n}-1). \quad ①$$

讲解 直接用数学归纳法证是这样：

$n=1$ 时，$1>0$，命题显然成立.

设 $n=k$ 时，有

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>2(\sqrt{k}-1),$$

两边加上 $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ 时，

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>2(\sqrt{k}-1)+\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

但
$$2(\sqrt{k}-1)+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2(\sqrt{k+1}-1).$$

所以，推不出命题对 $n=k+1$ 成立.

若将命题加强为

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{n+1}-1), \quad ②$$

则②成立时，必可推出①成立. 由于更强的命题提供更强的归纳假设，所以②比①更容易用数学归纳法来证明. 波利亚是这样说的："在数学归纳法中求证的结论和为了证明它所能动用的手段是成比例的. 它们的比为 $n+1$ 比 n. 因此加强求证的结论也可能带来好处，因为与此同时我们也加强了证明过程中可以动用的手段."①

$n=1$ 时，$2(\sqrt{2}-1)=\frac{2}{\sqrt{2}+1}<1$，不等式②成立.

假设 $n=k$ 时，不等式②成立，即

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>2(\sqrt{k+1}-1).$$

---

① 波利亚、舍贵．数学分析中的问题和定理，德文初版前言(ⅳ)，张奠宙等译.

则
$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$
$$>2(\sqrt{k+1}-1)+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$
$$=\frac{2k+3}{\sqrt{k+1}}-2$$
$$=\frac{\sqrt{4k^2+12k+9}}{\sqrt{k+1}}-2$$
$$>\frac{\sqrt{4k^2+12k+8}}{\sqrt{k+1}}-2$$
$$=\frac{2\sqrt{(k+1)(k+2)}}{\sqrt{k+1}}-2$$
$$=2\sqrt{k+2}-2$$
$$=2[\sqrt{(k+1)+1}-1].$$
这表明,不等式②对于 $n=k+1$ 时成立.

由数学归纳法知,不等式②成立,从而不等式①成立. □

需要指出的是,有些命题"不能用数学归纳法直接证明",只是由于我们使用方法不当,这就削弱了方法的功能.

例5－4 用数学归纳法证明
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<2. \quad ①$$

讲解 在习题四第16题中(P.247)我们已经知道数学归纳法遇到了麻烦,但这到底是方法的"功力不足"还是我们的"使用不当"呢? 我们认为是后者而不是前者.请看数学归纳法证明.

当 $n=1$,$1<2$,命题成立.

假设 $n=k$ 时,命题成立,即
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}<2.$$
则当 $n=k+1$ 时,有

$$
\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^k}\\
&=1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}\right)\\
&<1+\frac{1}{2}\cdot 2\\
&=2.
\end{aligned}
$$

命题成立.由数学归纳法得原不等式成立. □

可类似地研究 $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}<2$.

5.2-3 逻辑基础

就是说要弄清解题方法与逻辑方法的关系(尚未涉及深奥的数学哲学问题),这有助于我们进一步认清方法的实质,避免盲目性、提高自觉性.

如上所说,数学归纳法到底是归纳法还是演绎法?中学课本暗示着数学归结法是归纳法的一种特殊形式,《中学数学教材教法》(总论)①P.114 认为"数学归纳法不属于前面所说的归纳推理",而与反证法、同一法一起属于"间接推理".既然理论上的认识都很不一致,那数学归纳法的教学怎能顺利进行呢?

类似的情况还很不少.

1. 解方程的逻辑基础

对一个方程

$$f(x)=0 \tag{A}$$

的两边进行加、减、乘、除、乘方、开方、求指数幂、求对数、求三角函数、求反三角函数等运算,得出

$$x=a. \tag{B}$$

其实质是,若等式(A)成立,则等式(B)成立.这是一个必要条件的

① 参考文献[17].

过程,还不能保证等式(B)成立时,必有等式(A)成立.弄清了这个逻辑关系之后就不难明白,完整的解方程还必须把 $x=a$ 代入原方程"检验".

因此,解方程的完整过程应该包括"解方程"与"检验"这两个缺一不可的步骤.那么,为什么有的方程可以不检验呢?比如一元一次方程、一元二次方程、线性方程组等.原因是这些方程我们已经证明了"同解原理",这些同解原理保证了(A)对于(B)既是充分的又是必要的.

2. 反证法的逻辑基础

从整体上看,反证法的逻辑基础是排中律,但更细致的分析表明,反证法每一具体步骤的逻辑依据并不完全相同.我们把反证法证明一个命题"$A \Rightarrow B$"细致地分成4步:

第一步　假定 B 不成立,则 B 成立,用了排中律.

第二步　对"A 且 $\overline{B}$"进行正确推理,用了充足理由律.(理解反证法的本质,$\overline{B}$ 参加推理应是必不可少的)

第三步　对"A 且 $\overline{B}$"的正确推理终于得出 C 且 $\overline{C}$,依据矛盾律得出矛盾.

第四步　因而 $\overline{B}$ 不成立,再由排中律得出 B 成立.

这里的 C 可以代表已知条件,也可以代表公理、定义、定理,还可以代表反证法的临时假设或"A 且 $\overline{B}$"所能推出的某一个命题.

将上述步骤的中间过程省去,反证法可以概括成这样一个公式:

否定 —— 推理 —— 否定.

即从否定结论出发,经过正确的推理,达到新的否定.这里的实质是一种间接的肯定.所以,反证法也是这样一种方法,通过证明与命题"$A \Rightarrow B$"逻辑等价的命题为真,从而间接地证明了命题"$A \Rightarrow B$".

5-2-4　变化形式

很多方法都含有多种情况(如换元法包含了三种换元).另外还有一些变化形式与等价形式,以适应各种各样的题型和千变万化的

场合.有些变化形式等于扩大了方法的功能.从另一个角度说,就是若不研究清楚方法的各种变化形式,在具体运用中就会缩小方法的功能,而这方面的损失将是无法弥补的.

1. 数学归纳法的多种变化形式

设 $P(n)$是一个含有自然数 n 的命题(此处自然数指正整数),用数学归纳法证明其对一切自然数 n 真的理论基础是皮亚诺自然数公理中的数学归纳原理.

(1) 归纳公理.若自然数N的子集 M 满足

1) $1\in M$;

2) $k\in M\Rightarrow k+1\in M$;

则 $M=\mathrm{N}$.

(2) 第一数学归纳法.如果

1) $P(1)$真;

2) $P(k)$真$\Rightarrow P(k+1)$真.

那么,$P(n)$对一切自然数 n 真.

证明 设 M 是使$P(n)$成立的自然数集合,$M\subseteq\mathrm{N}$.因为 $P(1)$真,所以 $1\in M$.又由 $P(k)$真可推出 $P(k+1)$真知,$k\in M\Rightarrow k+1\in M$.由归纳公理得 $M=\mathrm{N}$.即 $P(n)$对一切自然数 n 真.□

(3) 第二数学归纳法.如果

1) $P(1)$真;

2) 由 $m\leqslant k$ 时$P(m)$真$\Rightarrow P(k+1)$真.

那么,$P(n)$对一切自然数 n 真.

证明 记命题 $Q(n)$真当且仅当 $P(1),P(2),\cdots,P(n)$皆真.

1) 由 $P(1)$真知 $Q(1)$真;

2) 假设 $Q(k)$真,即 $P(1),P(2),\cdots,P(k)$真,由归纳假设知$P(k+1)$真,从而 $Q(k+1)$真.

由第一数学归纳法知,$Q(n)$对一切自然数 n 真.从而 $P(n)$对一切自然数 n 成立.

例5-5 已知 对任意的 $n\in\mathrm{N}+$,有 $a_n>0$,且

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^3 = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2.$$

求证 $a_n = n$.

[1989 年高中数学联赛题]

此题宜用第二数学归纳法,证法略.

(4) 有限项数学归纳法. 设 m 为一给定的自然数,如果

1) $P(1)$真;

2) $P(k)$真$(1 \leqslant k < m) \Rightarrow P(k+1)$真.

那么,$P(n)$对不超过 m 的自然数n 真.

例 5-6 已知 $m, n \in \mathrm{N}$ 且 $n \geqslant m \geqslant 3$,求证

$$m \cdot n^m \geqslant (n+1)^m.$$

证明 对 m 用数学归纳法.

(1) $m = 3$ 时,

$$\begin{aligned} 3 \cdot n^3 &= n^3 + 2n^3 \\ &\geqslant n^3 + 6n^2 \\ &> n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= (n+1)^3. \end{aligned}$$

命题成立.

(2) 设 $m = k < n$ 命题成立,即

$$k \cdot n^k > (n+1)^k.$$

则

$$\begin{aligned} (k+1)n^{k+1} &= (k+1) \cdot n \cdot n^k \\ &= (kn + n)n^k \\ &\geqslant (kn + k)n^k \\ &= (n+1)k \cdot n^k \\ &> (n+1) \cdot (n+1)^k \quad (\text{归纳假设}) \\ &= (n+1)^{k+1}. \end{aligned}$$

这表明 $m = k + 1$ 时命题成立.

由数学归纳法知命题对 $n\geqslant m\geqslant 3$ 成立①. □

(5) 跳跃式数学归纳法. 如果

1) $P(1),P(2),\cdots,P(m)$真;

2) $P(k)$真$\Rightarrow P(k+m)$真.

那么,$P(n)$对一切自然数 n 真.

证明 记命题 $Q(n)$真当且仅当 $P(n),P(n+1),\cdots,P(n+m)$真.

1) 由 $P(1),P(2),\cdots,P(m)$真知 $Q(1)$真.

2) 假设 $Q(k)$真,即 $P(k),P(k+1),\cdots,P(k+m)$真,由归纳假设"$P(k+1)\Rightarrow P(k+1+m)$",知 $P(k+1),P(k+2),\cdots,P(k+m),P(k+1+m)$真,即 $Q(k+1)$真.

由第一数学归纳法知 $Q(n)$对一切自然数 n 真,从而 $P(n)$对一切自然数 n 真.

例 5-7 设 $0<a<1$,定义

$$\begin{cases} a_1=1+a, \\ a_{n+1}=\dfrac{1}{a_n}+a \ (n\geqslant 1). \end{cases}$$

证明 对一切 n 有 $a_n>1$.

[1979 年加拿大竞赛题]

讲解 在习题四第 15 题中(P.247),我们已经知道本例用数学归纳法遇到了麻烦.问题在于对 a_{k+1}用归纳假设 $a_k>1$ 时不等式反向,那么再来一次递推,对 a_{k+2}用归纳假设不等式的方向不就又变回来了.

(1) 当 $n=1$ 时,$a_1=1+a>1$,命题成立.

当 $n=2$ 时

$$a_2=\frac{1}{a_1}+a=\frac{1+a+a^2}{1+a}=1+\frac{a^2}{1+a}>1.$$

---

① 取 $m=n$,可得 $n^{n+1}>(n+1)^n$.

命题也成立.

(2) 假设 $n=k$ 时,命题成立,$a_k>1$,则

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= \frac{1}{a_{k+1}}+a \\ &= \frac{1}{\frac{1}{a_k}+a}+a \\ &> \frac{1}{\frac{1}{1}+a}+a \\ &= \frac{1+a+a^2}{1+a} \\ &> 1. \end{aligned}$$

这表明 $n=k+2$ 时命题成立.

由数学归纳法知,命题对一切自然数 n 成立. □

本例的另一处理是将结论加强为证明

$$1<a_n<\frac{1}{1-a} \text{ 或 } 1<a_n\leqslant 1+a.$$

均可用第一数学归纳法完成.

(6) 逆向数学归纳法. 如果

1) 有无穷多个自然数使 $P(n)$ 真;

2) $P(k)$ 真 $\Rightarrow P(k-1)$ 真.

那么,$P(n)$ 对一切自然数 n 真.

这个命题的另一表述是,如果

1) 对任一自然数 n,总有 $n'\geqslant n$ 使 $P(n')$ 真;

2) $P(k)$ 真 $\Rightarrow P(k-1)$ 真.

那么,$P(n)$ 对一切自然数 n 真.

这个命题用有限项数学归纳法或反证法来证比较方便. 其中的"有无穷多个自然数使 $P(n)$ 真"常取 $P(2^k)$ 真,或 $P(2k)$,$P(2k-1)$ 真.

这个方法也可以形象地称为"留空回填". 第一步证明了有无穷

个自然数 x_n 使 $P(x_n)$ 真 $(n=1,2,\cdots)$，剩下来的就是 (x_{n-1},x_n) 上的自然数尚未证明. 再由第二步，有

$$P(x_n)\text{ 真}\rightarrow P(x_n-1)\text{ 真}\Rightarrow\cdots\Rightarrow P(x_{n-1}+1)\text{ 真}.$$

这就把"空"填上了. 所以，这里的逆向倒推暗藏着正向推进的一面.

例5-8 证明算术平均——几何平均不等式

$$A_n\geqslant G_n.$$

证明 第一步用第一数学归纳法证明 $n=2^m$ 时成立，从而有无穷多个自然数使不等式成立.

第二步假设 $A_k\geqslant G_k$，由

$$\begin{aligned}A_{k-1}&=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}\\&=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+A_{k-1}}{k}\\&\geqslant\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_{k-1}A_{k-1}},\text{（归纳假设）}\end{aligned}$$

即
$$A_{k-1}^k\geqslant a_1a_2\cdots a_{k-1}A_{k-1},$$
$$A_{k-1}^{k-1}\geqslant a_1a_2\cdots a_{k-1},$$

得
$$A_{k-1}\geqslant G_{k-1}.$$

由逆向数学归纳法知不等式对一切自然数 n 真（例 4－41，P.237）. □

(7) 最小数原理. 自然数的非空子集必有一个是最小的.

这与第一数学归纳法之间的关系请参见华罗庚《数学归纳法》P.56. 由于最小数原理证第一数学归纳法用的是反证法，所以凡能用第一数学归纳法证明的命题，都可借用最小数原理而改写为反证法. 华罗庚教授说：最小数原理① 不仅在理论研究上很重要，在具体使用时，有时也比归纳法原来的形式更为方便（见例 6—70）.

(8) 无穷递降法. 如果只要对某个自然数 m 使 $P(m)$ 真，便有

---

① 参见王连笑. 极端原理与解题. 河南科学技术出版社，1997 年 1 月第 1 版.

自然数 $m_1<m$ 且 $P(m_1)$ 真，那么，命题 $P(n)$ 必假.

这与最小数原理是等价的，其证明可参见数学教学杂志 1987 年第 3 期P.6（李大元：数学归纳法几种常见形式的等价性）. 这一方法为费马首创并用来证明 $x^4+y^4=z^4$ 没有正整数解. 在例 6－27（P.372）中我们将使用来证明$\sqrt{2}$为无理数.

(9) 翘翘板数学归纳法. 设有两个命题 $P(n)$，$Q(n)$，满足

1) $P(1)$真；

2) $P(k)$真$\Rightarrow Q(k)$真，

　$Q(k)$真$\Rightarrow P(k+1)$真.

那么，$P(n)$，$Q(n)$对一切自然数 n 真.

另一种形式是：

1) $P(1)$，$Q(1)$真；

2) $P(k)$，$Q(k)$真$\Rightarrow P(k+1)$真，

　$Q(k)$，$P(k+1)$真$\Rightarrow Q(k+1)$真.

那么，$P(n)$，$Q(n)$对一切自然数 n 真.

例5－9　已知　数列

$$\begin{cases}a_1=a_2=1,\\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n\geqslant 1).\end{cases}$$

求证　$a_{n+1}^2+a_n^2=a_{2n+1}$.　①

讲解　我们试用第一数学归纳法.

当 $n=1$ 时，$a_2^2+a_1^2=2=a_3$，命题①成立.

假设 $n=k$ 时，有

$$a_{k+1}^2+a_k^2=a_{2k+1}.$$

要证　$a_{k+2}^2+a_{k+1}^2=a_{2k+3}$.

由　
$$\begin{aligned}a_{k+2}^2+a_{k+1}^2&=(a_{k+1}+a_k)^2+a_{k+1}^2\\&=a_{k+1}^2+2a_ka_{k+1}+(a_k^2+a_{k+1}^2)\\&=a_{k+1}^2+2a_ka_{k+1}+a_{2k+1}.\ （归纳假设）\end{aligned}$$

下来要证　$a_{k+1}^2+2a_ka_{k+1}=a_{2k+2}$.　②

再用第一数学归纳法.

当 $n=1$ 时,$a_2^2+2a_1a_2=3=a_4$,命题②成立.

假设 $n=k$ 时,有

$$a_{k+1}^2+2a_ka_{k+1}=a_{2k+2}.$$

下来要证 $$a_{k+2}^2+2a_{k+1}a_{k+2}=a_{2k+4}.$$

由 $$\begin{aligned}a_{k+2}^2+2a_{k+1}a_{k+2}&=a_{k+2}^2+2a_{k+1}(a_{k+1}+a_k)\\&=(a_{k+2}^2+a_{k+1}^2)+(a_{k+1}^2+2a_ka_{k+1})\\&=(a_{k+2}^2+a_{k+1}^2)+a_{2k+2}.\text{(归纳假设)}\end{aligned}$$

这又导致我们去证

$$a_{k+2}^2+a_{k+1}^2=a_{2k+3}.$$

这就像翘翘板一样,要证①导致我们去证②,要证②又导致我们去证①.因此,我们将它一齐证.记

$$P(n):\ a_{n+1}^2+a_n^2=a_{2n+1}.$$

$$Q(n):\ a_{n+1}^2+2a_na_{n+1}=a_{2n+2}.$$

(1) 当 $n=1$ 时,显然有 $P(1),Q(1)$ 真.

(2) 假设 $P(k),Q(k)$ 真,即

$$a_{k+1}^2+a_k^2=a_{2k+1},$$

$$a_{k+1}^2+2a_ka_{k+1}=a_{2k+2}.$$

则 $$\begin{aligned}a_{k+2}^2+a_{k+1}^2&=(a_{k+1}+a_k)^2+a_{k+1}^2\\&=(a_{k+1}^2+2a_ka_{k+1})+(a_k^2+a_{k+1}^2)\\&=a_{2k+2}+a_{2k+1}\\&=a_{2k+3}.\end{aligned}$$

有 $P(k+1)$ 真;又由

$$\begin{aligned}a_{k+2}^2+2a_{k+1}a_{k+2}&=a_{k+2}^2+2a_{k+1}(a_{k+1}+a_k)\\&=(a_{k+2}^2+a_{k+1}^2)+(a_{k+1}^2+2a_ka_{k+1})\\&=a_{2k+3}+a_{2k+2}\\&=a_{2k+4}.\end{aligned}$$

有 $Q(k+1)$ 真.

由翘翘板数学归纳法知 $P(n),Q(n)$对一切自然数 n 真.更有 $P(n)$真. □

本例的处理,也体现了数学归纳法加强命题.

(10) 双参数数学归纳法. 设 $P(n,m)$是一个含有两个独立自然数 n,m 的命题,如果

1) $P(1,m)$对任意的自然数 m 真,$P(n,1)$对任意自然数 n 真;

2) 假定 $P(k+1,l)$与 $P(k,l+1)$真时,可以推出 $P(k+1,l+1)$真.

那么,$P(n,m)$对任意自然数 n,m 真.

例 5-10 设 $f(n,m)$在自然数上定义,满足

$$\begin{cases} f(1,m)=f(n,1)=1, \\ f(n,m)\leqslant f(n,m-1)+f(n-1,m)\ (m,n\geqslant 2). \end{cases}$$

求证 $f(n,m)\leqslant C_{m+n-2}^{n-1}$. (规定 $C_0^0=1$)

证明 1)显然有

$$f(1,m)=1\leqslant C_{m-1}^{0};$$

$$f(n,1)=1\leqslant C_{n-1}^{n-1}.$$

2) 假设 $f(k+1,l)\leqslant C_{k+l-1}^{k}$,

$$f(k,l+1)\leqslant C_{k+l-1}^{k-1}.$$

则

$$\begin{aligned} f(k+1,l+1) &\leqslant f(k+1,l)+f(k,l+1) \\ &\leqslant C_{k+l-1}^{k}+C_{k+l-1}^{k-1} \\ &=C_{k+l}^{k}. \end{aligned}$$

由双参数数学归纳法知,命题对一切自然数 m,n 均成立. □

(11) 递归定义的合理性. 华罗庚教授说:递归函数是一个在正整数集上定义了的函数 $f(n)$.首先,$f(1)$有定义;其次,如果知道了 $f(1),f(2),\cdots,f(k)$,那么 $f(k+1)$也就完全知道了.这实在不是什么新东西,而只是数学归纳法的重申(华罗庚《数学归纳法》P.26).

(12) 此外,数学归纳法还有一些具体的变形,如

1）欲证　$f(n)=g(n)$.

只须　（i）验证 $f(1)=g(1)$,

（ii）假设 $f(k)=g(k)$,能推出

$f(k+1)-f(k)=g(k+1)-g(k)$

$\left(或\dfrac{f(k+1)}{f(k)}=\dfrac{g(k+1)}{g(k)},g(k)\neq 0.\right)$

2）欲证　$f(n)>g(n)$.

只须　（i）验证 $f(1)>g(1)$,

（ii）假设 $f(k)>g(k)$,能推出

$f(k+1)-f(k)>g(k+1)-g(k)$

$\left(或\dfrac{f(k+1)}{f(k)}>\dfrac{g(k+1)}{g(k)},g(k)>0.\right)$

3）欲证　$m\mid f(n)$.

只须　（i）验证 $m\mid f(1)$

（ii）假设 $m\mid f(k)$,能推出

$m\mid f(k+1)-f(k)$.

4）整数数学归纳法：设有一个与整数有关的命题 $p(n)$,如果

（i）命题 $p(n_0)$成立；

（ii）假设命题 $p(k)$成立时,命题 $p(k+1)$,$p(k-1)$均成立,则这个命题 $p(n)$对一切整数 n 都成立．

例 5－11　求证

(1) $\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}<\dfrac{(n+1)^2}{2}$.

(2) 设 $f(n)=\dfrac{n^5}{5}+\dfrac{n^4}{2}+\dfrac{n^3}{3}-\dfrac{n}{30}$,求证 $n\in Z$ 时 $f(n)\in Z$.

证明略.

2．抽屉原理及其变形[①]

---

① 抽屉原理又称鸽笼原理、狄利克雷原理、面积重叠原理等,是证明存在性命题的有力工具.

我们可以列举出 10 种形式,有的表现在有限集合上,有的表现在无限集合上,有的表现在代数上,有的表现在几何上;有的表现在元素多于集合上,有的表现在集合多于元素上.

(1) 若把 $n+1$ 个元素放进 n 个集合,则必存在一个集合至少放有 2 个元素.

(2) 若把 $mn+1$ 个元素放进 n 个集合,则必存在一个集合至少放有 $m+1$ 个元素.

(3) 若把 $m_1+m_2+\cdots+m_n+1$ 个元素放进 n 个集合,则必存在一个集合至少放有 m_k+1 个元素$(1\leqslant k\leqslant n)$.

(4) 若 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=S$,则必存在 a_k,a_l,使 $a_k\geqslant\frac{S}{n}$,$a_l\leqslant\frac{S}{n}(1\leqslant k,l\leqslant n)$.

(5) 若 $a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant 0$,则必存在 $a_k\geqslant 0(1\leqslant k\leqslant n)$;若 $a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant 0$,则必存在 $a_k\leqslant 0(1\leqslant k\leqslant n)$.

(6) 若把无穷集合分成有限个子集合,则必存在一个子集合含有无穷多个元素.

(7) 若把$[0+1+2+\cdots+(n-1)]-1$ 个元素放进 n 个集合,则至少有 2 个集合的元素一样多.

(8) 若把 $k[0+1+2+\cdots+(n-1)]-1$ 个元素放进 kn 个集合,则至少有 $k+1$ 个集合的元素一样多.

(9) 若把 $mn-1$ 个元素放进 n 个集合,则必有一个集合至多含有 $m-1$ 个元素①.

(10) 若把 n 个面积为 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 的平面图形放到面积为 S 的平面图形上,并且 $S_1+S_2+\cdots+S_n>S$,则至少存在两个图形有公共点.

所以这些命题的证明格式基本上是相同的,即假设结论不成立,则得出一个不等式组,然后求和引出矛盾(参见§5-2-1).如

---

① 与形式(2)相比较,我们称形式⑨为第二抽屉原理.

证明(3) 若不然,则每一个集合 A_k 最多放有 m_k 个元素,有

$$|A_k|\leqslant m_k,\ (k=1,2,\cdots,n)$$

求和

$$m_1+m_2+\cdots+m_n+1=\sum_{k=1}^{n}|A_k|\leqslant m_1+m_2+\cdots+m_n.$$

矛盾. □

证明(4) 先证存在 $a_k\geqslant\frac{S}{n}$. 若不然,则对每一个 i,有

$$a_i<\frac{S}{n}.$$

求和

$$S=\sum_{i=1}^{n}a_i<\sum_{i=1}^{n}\frac{S}{n}=S.$$

矛盾. □

证明(7) 若不然,则各个集合的元素互不相同,按其元素从少到多记为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,则

$$|A_1|\geqslant 0,$$
$$|A_2|\geqslant 1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$|A_n|\geqslant n-1.$$

求和

$$[0+1+\cdots+(n-1)]-1=\sum_{i=1}^{n}|A_i|\geqslant 0+1+\cdots+(n-1).$$

矛盾. □

5-2-5 应用层次

弄清解题方法的应用层次,可以加深我们对方法的认识,提高灵活运用方法的能力. 同时,在解题教学中,对不同的教学阶段能掌握好恰当的分寸.

1. 抽屉原理形式(1)、(2)的应用有 6 个层次

(1) 题目本身直接给出元素与集合.

例 5-12 在全校 400 名新生中,至少有两个学生同一天生日.

(2) 题目本身只直接给出元素或集合中的一个,另一个要去构造.(多数情况下是构造抽屉)

例5-13 任意给定的7个不同的自然数中,必有两个数其和或差是10的倍数.

讲解 按自然数的个位数把自然数分成6类:[0],[1,9],[2,8],[3,7],[4,6],[5],这是构造了6个抽屉.

(3) 题目本身既未直接给出元素又未给出集合,要由已知条件去构造"集合"与"元素".

例5-14 把1到10的自然数摆成一个圆圈,证明:一定存在3个相邻的数,它们的和大于17.

讲解 从1开始,按顺时针方向将10个数记为$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_9$,由

$$\begin{aligned}&(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+(a_7+a_8+a_9)\\&=2+3+\cdots+10\\&=54=3\times17+3.\end{aligned}$$

知,3个括号中,至少有一个大于17. □

这实质上是构造3个"集合"和54个"元素".

(4) 抽屉原理逆用,反求元素或集合.

例5-15 袋内装有100个小球,其中红球25个,蓝球23个,黄球10个,绿球14个,白球20个,黑球8个.现从袋中任意摸出球来,如果要使摸出的球中至少有15个同色的,那么从袋中一次至少要摸多少个球?

讲解 最坏的可能是黄、绿、黑球全摸出来了,有$10+14+8=32$个.从红、蓝、白三种球中至少要摸$3\times14+1=43$个,才能保证有15个同色,故从袋中一次至少要摸$32+43=75$个. □

这实质上是反求"元素"数.

(5) 多次应用抽屉原理.

例5-16 有17个科学家,其中每一个人和其他所有的人通信,在他们的通信中只讨论3个题目,而且每两个科学家之间只讨论

一个题目.求证 至少有3个科学家相互之间在讨论同一题目.[IMO_{6-4}]

讲解 两次应用抽屉原理.设x先生与其他16个人讨论3个问题,由$16=3\times5+1$知,必有6个人与x讨论同一问题,记为A问题.

若这6个人当中还有2个讨论A,则命题成立,否则这6个人只讨论其余两个问题,取其中一位y先生,因他与其余5个人只讨论两个问题,由$5=2\times2+1$知,必有3个人与y讨论同一个问题,记为B问题.

若这3个人当中还有2个讨论B,则命题成立,否则这3个人无人讨论A,B.必定互相之间讨论第三个问题.命题也成立.□

例4—8(P.157)也是多次应用抽屉原理.

(6) 抽屉原理与其他数学方法的综合使用.

例5-17 $x_1,x_2,\cdots,x_n$都是实数且满足条件$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=1$,求证对于每一个整数$k\geqslant2$,存在$n$个不全为零的整数$a_i$,$|a_i|\leqslant k-1$,$i=1,2,\cdots,n$,使得

$$|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}.$$

[IMO_{28-3}]

讲解 这是抽屉原理与柯西不等式的综合应用.

对$k\geqslant2$,有$k-1$仍为自然数,设$b_i(i=1,2,\cdots,n)$取遍$0,1,2,\cdots,k-1$,则存在k^n个数组

$$(b_1,b_2,\cdots,b_n), \quad ①$$

每一个都满足

$$\begin{aligned}&b_1|x_1|+b_2|x_2|+\cdots+b_n|x_n| \quad ②\\ \leqslant&\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\\ =&\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}\\ \leqslant&\sqrt{n(k-1)^2}\end{aligned}$$

$$=(k-1)\sqrt{n}.$$

现将区间$[0,(k-1)\sqrt{n}]$作 k^n-1 等分,则①中的 k^n 个数组必有不同的两个

$$(b'_1,b'_2,\cdots,b'_n),$$
$$(b''_1,b''_2,\cdots,b''_n).$$

使代数式②的值属于同一等分.即

$$\begin{aligned}&\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}\\ &\geqslant\left|(b'_1|x_1|+b'_2|x_2|+\cdots+b'_n|x_n|)-\right.\\ &\quad\left.(b''_1|x_1|+b''_2|x_2|+\cdots+b''_n|x_n|)\right|\\ &=|(b'_1-b''_1)|x_1|+(b'_2-b''_2)|x_2|+\cdots+(b'_n-b''_n)|x_n||.\end{aligned}$$

取
$$a_i=\begin{cases}b'_i-b''_i, & \text{当 } x_i\geqslant 0 \text{ 时},\\ b''_i-b'_i, & \text{当 } x_i<0 \text{ 时},\end{cases}$$

则 a_i 不全为0,且

$$|a_i|=|b'_i-b''_i|\leqslant k-1,$$
$$a_ix_i=(b'_i-b''_i)|x_i|,$$

从而
$$|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}.\ \square$$

2. 基本不等式的应用

定理的应用经常从两个方面提供解题的重要方法.其一是证明定理的方法,这经常是数学家呕心血创造出来的典型方法;其二是使用定理去解决更多问题的方法.我们常说,要注意定理、公式的正用、逆用、连用、变用、巧用和活用,其实就是定理应用的几个层次.下面,我们以基本不等式为例,说一说它的灵活运用.对

$$a^2+b^2\geqslant 2ab.$$

有　(1) 变形1,$ab\leqslant\frac{1}{2}\left(\lambda^2a^2+\frac{b^2}{\lambda^2}\right)$.

例5－18　柯西不等式

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}.$$

简证　取$\lambda^2=\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}}$.(分母不为0)

有
$$a_ib_i\leqslant\frac{1}{2}\left(\lambda^2a_i^2+\frac{b_i^2}{\lambda^2}\right).$$

得
$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\frac{1}{2}\left(\lambda^2\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}{\lambda^2}\right)$$
$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}.\ \square$$

(2) 变形2,$\dfrac{a^2}{b}\geqslant 2a-b\ (b>0)$.

例5-19　设$x_1,x_2,\cdots,x_n$都是正数,求证
$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n.$$
[1984年高中数学联赛题]

证明　由变形2,有
$$\frac{x_1^2}{x_2}\geqslant 2x_1-x_2,$$
$$\frac{x_2^2}{x_3}\geqslant 2x_2-x_3,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant 2x_n-x_1.$$
相加即得. $\square$

(3) 变形3,$\dfrac{a}{b^2}\geqslant\dfrac{2}{b}-\dfrac{1}{a}(a>0)$.

例5-20　已知$a_1,a_2,\cdots,a_n$为两两各不相同的正整数,求证对任何正整数n,下列不等式成立
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

[IMO_{20-5}]

证明　由变形 3,有

$$\frac{a_1}{1^2}\geqslant\frac{2}{1}-\frac{1}{a_1},$$

$$\frac{a_2}{2^2}\geqslant\frac{2}{2}-\frac{1}{a_2},$$

……

$$\frac{a_n}{n^2}\geqslant\frac{2}{n}-\frac{1}{a_n}.$$

相加

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}. \square$$

(4) 变形 4,$\frac{a^2}{b}\geqslant a-\frac{b}{4}$ $(b>0)$.

例 5－21　设 a,b,c 为正实数且满足 $abc=1$. 试证

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}.$$

[IMO_{36-2}]

证明　由

$$\frac{1}{a^3(b+c)}=\frac{1}{a^2(ab+ac)}=\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)}\geqslant\frac{1}{a}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right).$$

同理

$$\frac{1}{b^3(c+a)}\geqslant\frac{1}{b}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right),$$

$$\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{1}{c}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right).$$

相加

$$\text{左边}\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}=\frac{3}{2}. \square$$

同样的方法可以处理 1990 全苏数学竞赛题：对于和为 1 的正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，有不等式

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geqslant\frac{1}{2}.$$

(5) 变形 5，$a(a-b)>b(a-b)$.

例 5－22 $\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}\geqslant\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

证明 记 $b=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，由变形 5，有

$$a_1(a_1-b)\geqslant b(a_1-b),$$
$$a_2(a_2-b)\geqslant b(a_2-b),$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_n(a_n-b)\geqslant b(a_n-b).$$

相加
$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)-b(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$
$$\geqslant b[(a_1+a_2+\cdots+a_n)-nb]$$
$$=0.$$

得
$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geqslant\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{n}.$$

除以 n，再开方即得. □

(6) 变形 6，$a^2\geqslant 2ax-x^2$，x 为参数.

例 5－23 已知 x,y,z 为实数且 $x+y+z=1$，试证

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}.$$

证明 由变形 6，有

$$x^2\geqslant 2tx-t^2, \qquad ①$$
$$y^2\geqslant 2ty-t^2, \qquad ②$$
$$z^2\geqslant 2tz-t^2. \qquad ③$$

相加
$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2t(x+y+z)-3t^2$$
$$=2t-3t^2.$$

为使所求证不等式成立，令

$$2t-3t^2=\frac{1}{3},$$

即 $$9t^2-6t+1=0,$$

得 $$t=\frac{1}{3}.$$

在①、②、③式中取 $t=\frac{1}{3}$,相加即得所证. □

其实此例是例 5－22 的特殊情况. 而例 5－22 就是例 4－39 的推广 1(P.229).

(7) 变形 7, $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}(a+b)^2$ 或 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

由此可解决许多无理不等式问题

5－2－6 正确使用

任何方法都有它成立的条件,都有它适用的范围,离开条件、超越范围就会犯错误. 同时,方法在使用中还有一个走样不走样的问题,由于数学知识或逻辑知识的原因,由于策略性或心理性的错误,都会导致方法的使用不当或功能减退,影响解题的成功率.

比如,判别式要在实数范围内才有产生非负性的功能,遇到虚数问题时,就不能盲目套用;至于判别式法求值域(或最值),它的前提是

$$\Delta=(2ax+b)^2\geqslant 0$$

当中的不等式能取等号,当 x 为任意实数时这是可以做得到的,但当 x 限定在某一有限区间时,就不一定能做到了. 这些都产生判别式法的局限性.

又如数学归纳法. 对于与自然数无关的命题,不能直接用;有些自然数的命题虽可用数学归纳法,但不如直接证明简便;还有些与自然数有关的命题也无法用数学归纳法. 另外,凡是能用数学归纳法证明的命题,都需要先有结果,因而掩盖了结论的发生过程. 这些都反映了数学归纳法的局限性.

再如反证法,我们说过反证法是一个证明大法(P.275),但它也不是万能的,它的优势主要在于下列场合:

(1) 命题的结论以否定形式出现;

(2) 命题的结论以“至多”、“至少”的形式出现;

(3) 命题的结论以“无限”的形式出现;

(4) 命题的结论以“惟一”的形式出现;

(5) 学科开始的时候;

(6) 由已知条件难以推出什么的时候;

(7) 存在性命题;

(8) 逆命题.

削弱方法的使用功能、缩小方法的使用范围,也是方法使用不当的一个表现.在例 4-34,例 5-2,例 5-4,例 5-7 等处我们已经见到过.

下面我们来看几个方法使用不当的例子,更详细的错例分析见§7-3.

首先看例 5-23 的另一证法:设

$$\begin{cases} x=\frac{1}{3}-t, \\ y=\frac{1}{3}-2t, \\ z=\frac{1}{3}+3t. \end{cases} \tag{A}$$

则
$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}+14t^2\geqslant\frac{1}{3}. \square$$

这是换元法使用不当的错误.当然满足(A)的 x,y,z 也一定满足

$$x+y+z=1. \tag{B}$$

但反过来不对.从几何上看,方程(B)表示一个平面,方程组(A)表示一条直线,原题要证明平面上每一点到原点的距离 $d\geqslant\frac{1}{3}$.而换元法只证明了平面上的一条直线

$$\frac{x-\frac{1}{3}}{-1}=\frac{y-\frac{1}{3}}{-2}=\frac{z-\frac{1}{3}}{3}$$

具有该性质$\left(d\geqslant\frac{1}{3}\right)$，至于直线外的点则还没有证明是否成立．这在逻辑上叫做“偷换概念”（见§7－3）．

例 5－24　设 $f(0)=10, f(n+1)=nf(n)+1$，求证

$$f(n)\geqslant 10.\ (n=0,1,2,\cdots)$$

证明　(1) $f(0)\geqslant 10$，命题是成立的．

(2) 假设 $f(k)\geqslant 10$，由

$$f(k+1)=kf(k)+1>f(k)\geqslant 10,$$

知 $f(n)\geqslant 10$ 对一切 $n=0,1,2,\cdots$，成立．□

评析　这是数学归纳法使用不当的错误．因为递推性的基础是从 $n=0$ 开始的，因而第二步递推性的根据

$$f(k+1)>f(k),\qquad ①$$

也应该从 $n=0$ 开始，但 $n=0$ 时

$$f(1)=0\cdot f(0)+1=1<f(0).$$

式①不成立．事实上 $n=1,2,3$ 命题均不成立．

$$f(2)=1\cdot f(1)+1=2<10,$$

$$f(3)=2\cdot f(2)+1=5<10.$$

应在 $n\geqslant 4$ 时，命题才成立．

例 5－25　所有的自然数都相等．

证明　(1) 只有一个自然数时，自己与自己相等，命题成立．

(2) 假设 k 个自然数都相等，对 $k+1$ 个自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}$，我们把归纳假设分别应用于

$$a_1, a_2, \cdots, a_k;$$

$$a_2, a_3, \cdots, a_{k+1}.$$

则分别有　$a_1=a_2=\cdots=a_k,$

$$a_2=a_3=\cdots=a_{k+1}.$$

从而 $k+1$ 个自然数都相等.

由数学归纳法知,所有的自然数都相等. □

评析 这是数学归纳法应用的错误.关键在第一步的奠基并没有提供不同自然数间相等的正确性基础.事实上,第二步中 $k=1$ 时,已无法得出两个自然数相等.(回想例2-1)

例5-26 已知 $x_1>0,x_1\neq 1$,且 $x_{n+1}=\dfrac{x_n(x_n^2+3)}{3x^n+1}(n=1,2,\cdots)$.试证 数列 $\{x_n\}$ 或者对任意自然数 n 都满足 $x_n<x_{n+1}$,或者对任意自然数 n 都满足 $x_n>x_{n+1}$.

[1986年高考理科第(八)题]

证明 数学通讯1986年第11期P.26发表了一个中学生的证法如下(立即作了更正):

假设数列 $\{x_n\}$ 对任意自然数 n 既不满足 $x_n<x_{n+1}$,也不满足 $x_n>x_{n+1}$,则满足

$$x_n=x_{n+1}. \tag{①}$$

由题设 $$x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1},$$

所以 $$x_n=\frac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}.$$

即 $$3x_n^3+x_n=x_n^3+3x_n.$$

所以 $$x_n(x_n^2-1)=0.$$

所以 $$x_n=0,\text{或 } x_n=1,\text{或 } x_n=-1. \tag{②}$$

但由题设 $x_1>0,x_1\neq 1$,且

$$x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}.$$

知 $$x_n>0\text{ 且 }x_n\neq 1. \tag{③}$$

故②与③矛盾,因此假设不成立.数列 $\{x_n\}$ 对任意自然数 n 或者都满足 $x_n<x_{n+1}$,或者都满足 $x_n>x_{n+1}$. □

评析 这是反证法使用不当.主要是"反设不真",否定"x_n 为单

调数列”不能得出“x_n 为常数列”，还可能“x_n 为摆动数列”. 正确的反设应是：存在 p,q，使 $x_p \geqslant x_{p+1}$ 且 $x_q \leqslant x_{q+1}$.[1,2]

例 5－27　化下列方程为整式方程[3]

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}=1. \qquad ①$$

讲解　在几何上，这表示了点(x,y)到两个定点$(-1,0)$，$(1,0)$的距离之和为定长，我们预计它应为“椭圆”，但万万没有想到两次平方之后竟得出了双曲线.

把①变为

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=1-\sqrt{(x-1)^2+y^2} \qquad ②$$

平方，得

$$1-4x=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}. \qquad ③$$

再平方，得

$$12x^2-4y^2=3,$$

即

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1. \qquad ④$$

这是双曲线的标准方程. □

“椭圆”怎么会变为“双曲线”了呢？检查每一步骤，演算是准确的. 问题在于方程变形中的平方运算产生了增根. 事实上，对②两边平方，相当于对

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}-\left[1-\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right]=0,$$

的两边乘以一个代数式

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\left[1-\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right],$$

因而产生增根

---

① 丁怀成、李清煜. 用反证法证 86 年高考理科数学第八题. 数学通讯，1987，4，P.40.

② 陈永明. 从一道高考题的错证看学点数理逻辑的必要性. 数学教学，1990，1，P.10.

③ 罗增儒. 方程变形的困惑. 中学数学(湖北)，1990，9，P.12.

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+[1-\sqrt{(x-1)^2+y^2}]=0 \quad ⑤$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2}-\sqrt{(x-1)^2+y^2}=-1.$$

这正是双曲线④的一支.

当第二次平方时,相当于对

$$(1-4x)-2\sqrt{(x-1)^2+y^2}=0,$$

的两边乘以一个代数式

$$(1-4x)+2\sqrt{(x-1)^2+y^2},$$

因而又产生增根

$$1-4x+2\sqrt{(x-1)^2+y^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2}-\sqrt{(x-1)^2+y^2}=1. \quad ⑥$$

这正是双曲线⑥的另一支.

事实上,原方程无解(两边之和等于第三边一半的三角形不存在),但经过两次增根得出双曲线方程.

5-3 配方法的研究

上一节我们对解题方法的研究提出了一些课题,它的解决,以及更广泛、更深入的数学方法论建设有待同行们的共同努力.我们只觉得,从一些较为简单、最为具体的技巧开始,再逐步深入到高层次的方法中去可能是一个好主意.正是本着这种精神,让我们开始对配方法的研究.

5-3-1 问题的提出

通过配方来解题是一个十分基本、非常具体的数学技巧.我们在初中时就接触它(乘法公式、因式分解、二次方程、二次函数,……),直到大学还不断使用它(最小二乘法、二次型、矩阵打洞、积分换元,……).应该说,这是我们认识较早、了解较多、运用较好的解题方法.

那么,还值得把配方法郑重其事地拿出来进行一番研究吗?我们说,有3个方面的问题构成了研究的必要性.

问题1　盲目扩大方法的使用范围

这种情况屡屡发生在理论修养不高而又解题经验不足的时候,最常见的是:

(1) 把有约束条件的平方式匆忙取零,误认上(下)界为极值.

(2) 把实数平方的非负性照搬到虚数上去.

这方面的例子很多,较典型的如

例5-28　求 $f(x)=a\sin^2x+b\sin x+c\ (a>0, x\in\mathrm{R})$ 的极值.

例5-29　设实数 x, y 满足 $3x^2+y^2=6x$,求 x^2+y^2 的最大值.

问题2　缩小方法的使用范围

首先一种表现是,由于方法使用不当,造成失误,因而就认为该类问题不能用配方法来求解,这是把"使用不当"等同于"不能使用".

另一种表现是把"不会使用"等同于"不能使用".比如例4-35 (P.215),人们长期没有认真找出配方恒等式①

$$
\begin{aligned}
&1-(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2})\\
&=\frac{1}{2}[(a-\sqrt{1-b^2})^2+(b-\sqrt{1-a^2})^2]
\end{aligned}
$$

或

$$
\begin{aligned}
&1-(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2})^2\\
&=(ab-\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2})^2\\
&=(a^2+b^2-1)^2+(a\sqrt{1-a^2}-b\sqrt{1-b^2})^2\\
&=\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

因而盲目迷信三角法.

又如例5-2(P.273),不是不能用配方法求解,而是可以用多种

① 这些配方还要用在例5-44上.

配方途径来求解.

再如习题四第22题容易得出不止一种配方(P.392):

$$5w=(2x+y-1)^2+(x-2y+4)^2+8(2x+y-1)-9\geqslant-9$$

或 $$25w=(5x+2)^2+(5y-9)^2+40(2x+y-1)-45\geqslant-45.$$

由此,可顺利得出,当 $x=-\frac{2}{5}$,$y=\frac{9}{5}$ 时,w 有最小值 $-\frac{9}{5}$.

如果说,使用不当的失误可以发现也不难改正的话,那么把“不会”作“不能”的损失则是无法挽回的.

问题3　研究的误区

关于配方法的文章俯拾即是,有“八用”也有“十用”的.真可谓够深入、够细致的了.但这些工作的致命弱点是,解题研究没有上升为理论,大多是用现成的例子说明现成的观点,或用现成的观点说明现成的例子.整个研究工作依然陷在低层次的、没有新突破的误区之中.这既是上述两个问题存在的原因,也是整个方法研究现状的结果.

5－3－2　配方法的初步认识

虽然配方法不排除使用更高次数的配方,但是它的通常含义或用得最多的是配平方,因此,这里所讨论的配方是指:使数学式出现完全平方项的恒等变形.

定义　应用配方变形来解数学题的方法叫做配方法.

1. 基本配方单元

对大量配方集中分类并细致剖析后,我们认为,构成丰富多彩配方的最基本细胞或信息单元是:二项式平方的逆写.[①]

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2. \tag{5-1}$$

---

① 由此不难得出各种变形:$a^2+b^2=(a\pm b)^2\mp2ab$,a^2+ba $\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2-\frac{b^2}{4}$,$\pm2ab=(a\pm b)^2-(a^2+b^2)$等.

由这个细胞，不难推出较为复杂的配方，如多项和的平方与多项平方的和

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2. \tag{5-2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2. \tag{5-3}$$

从这些公式出发，可以进行各种各样的配方，因此，我们就把(5-1)称为基本配方单元，它是基础知识. 如何应用基础知识离不开基本技能，我们用基本配方形式来描述它.

2. 基本配方形式

由最基本的信息单元，组成一些最常使用的信息块，再由信息块去实施解题指令，这是我们对配方法使用步骤的基本看法. 但是千差万别的配方简直无法穷举，其中有哪几个是基本的配方形式呢？我们认为基本的有 3 个.

基本配方 1　对称多项式 a^2+ab+b^2 的配方.

我们的研究表明，对这个简单式子的配方是十分灵活多样的，写成余弦定理或勾股定理的形式

$$\begin{cases} a^2+ab+b^2 = a^2+b^2-2|a||b|\cos\theta, \\ \theta = 60^\circ \text{或} 120^\circ; \end{cases}$$

$$a^2+ab+b^2 = \left(a+\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2.$$

只是因为它们具有数形结合的特征而更加引人注目. 事实上，这个式子有不下 10 种配方形式，每一种形式都有应用.

$$a^2+ab+b^2$$

$$=(a+b)^2-ab \tag{5-4)$_1$}$$

$$=(a-b)^2+3ab \tag{5-4)$_2$}$$

$$=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}b}{2}\right)^2 \tag{5-4)$_3$}$$

$$=\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)\right]^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \tag{5-4)$_4$}$$

$$=\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2+ab \tag{5-4}_5$$

$$=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 \tag{5-4}_6$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}b\right)^2-\left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2 \tag{5-4}_7$$

$$=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}+\frac{\sqrt{3}b}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{3}}\right)^2 \tag{5-4}_8$$

$$=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}b}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}b}{3}\right)^2 \tag{5-4}_9$$

$$=\left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2+ab+\frac{a(a+b)}{2}+\frac{b(a+b)}{2}, \tag{5-4}_{10}$$

$$=a^2+b^2+\frac{(a+b)^2}{4}-\frac{(a-b)^2}{4} \tag{5-4}_{11}$$

$$=\cdots\cdots$$

更一般地,有

(1) $a^2+kab+b^2$ 的配方

$$a^2+kab+b^2$$

$$=(a+b)^2+(k-2)ab \tag{5-5}_1$$

$$=(a-b)^2+(k+2)ab \tag{5-5}_2$$

$$=\left(a+\frac{kb}{2}\right)^2+\frac{4-k^2}{4}b^2 \tag{5-5}_3$$

$$=\frac{2+k}{4}(a+b)^2+\frac{2-k}{4}(a-b)^2 \tag{5-5}_4$$

$$=\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{(a-b)^2}{2}+kab \tag{5-5}_5$$

$$=\frac{(a+kb)^2}{2}+\frac{a^2}{2}+\frac{2-k}{2}b^2 \tag{5-5}_6$$

$$=\frac{3}{2}a^2+\frac{2+k^2}{2}b^2-\left(\frac{a-kb}{\sqrt{2}}\right)^2 \tag{5-5}_7$$

$$=\frac{(a+kb)^2}{4}+\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}+\frac{\sqrt{3}b}{6}\right)^2+\frac{3-k^2}{3}b^2 \tag{5-5}_8$$

$$=a^2+b^2+\frac{(a+kb)^2}{4}-\frac{(a-kb)^2}{4} \qquad (5-5)_9$$

$$=\frac{(a-b)^2}{2}+kab+\frac{a(a+b)}{2}+\frac{b(a+b)}{2} \qquad (5-5)_{10}$$

$=\cdots\cdots$

(2) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的配方

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \qquad (5-6)_1$$

$$=(a-b)^2+(b-c)^2+(a-b)(b-c). \qquad (5-6)_2$$

这正是基本配方1，又可仿照$(5-4)_k(k=1,2,\cdots)$写出大批配方.

例5－30　若$x>0,y>0,z>0$，求证

$$\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{y^2-yz+z^2}>\sqrt{z^2-zx+x^2}.$$

讲解　这是构造空间图形解题的范例.由

$a^2-ab+b^2=a^2+b^2-2ab\cos 60°$

可作三棱锥 $V-ABC$（图5－2），使

$VA=x$,

$VB=y$,

$VC=z$,

$\angle AVB=\angle BVC=\angle CVA=60°$.

由$\triangle ABC$中两边之和大于第三边即得所求. □

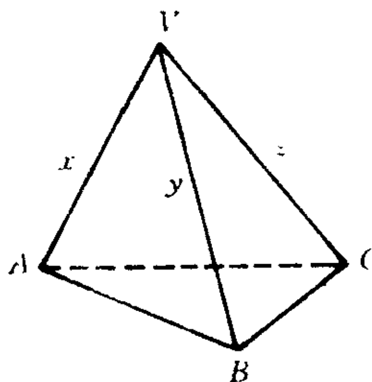


图5－2

这里用的是空间距离的性质.若将距离表示为解析几何公式，则配方法的功能也就显示出来了.首先指出不等式

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}.$$

取等号当且仅当 $a_i=\lambda b_i(i=1,2,3)$.

然后由配方公式$(5-4)_3$，$(5-4)_8$，$(5-4)_9$，有

$$\sqrt{x^2-xy+y^2}=\sqrt{\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}y}{2}\right)^2+0^2},$$

$$\sqrt{y^2-yz+z^2}=\sqrt{\left(\frac{z}{2}-\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}y}{2}-\frac{\sqrt{3}z}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}z}{3}\right)^2},$$

$$\sqrt{z^2-zx+x^2}=\sqrt{\left(x-\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}z}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}z}{3}\right)^2}.$$

应用上述不等式即得. □

事实上,这只不过是将图 5-2 建立空间直角坐标系,并取点

$$A(x,0,0),\quad B\left(\frac{y}{2},\frac{\sqrt{3}y}{2},0\right),\quad C\left(\frac{z}{2},\frac{\sqrt{3}z}{6},\frac{\sqrt{6}z}{3}\right).$$

问题转化为 $AB+BC>AC$.

下列几题可以用类似方法解决.

例 5-31 对实数 a,b,c,有

(1) $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}\geqslant\sqrt{c^2+a^2}$.

取点 $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$.

(2) $\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}\geqslant\sqrt{c^2+ca+a^2}$.

取点 $A\left(\frac{\sqrt{3}a}{2},\frac{a}{2}\right)$, $B\left(-\frac{\sqrt{3}b}{2},\frac{b}{2}\right)$, $C(0,-c)$.

(3) $\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\geqslant\sqrt{c^2+ca+a^2}$.

取点 $A\left(\frac{\sqrt{3}a}{2},\frac{a}{2}\right)$, $B(0,b)$, $C\left(-\frac{\sqrt{3}c}{2},\frac{c}{2}\right)$.

(4) $\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}\geqslant\sqrt{c^2+ac+a^2}$.

取点 $A(a,0,0)$, $B\left(\frac{b}{2},\frac{\sqrt{3}b}{2},0\right)$, $C\left(-\frac{c}{2},\frac{\sqrt{3}c}{6},\frac{\sqrt{6}c}{3}\right)$.

例 5-32 把曲线方程

$$x^2-kxy+y^2=1\ (|k|\neq 2),$$

化为标准形式.

解 由$(5-5)_4$,有

$$x^2 - kxy + y^2 = \frac{2+k}{2}\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{2-k}{2}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2$$

作变换
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}}, \\ y_1 = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

得
$$\frac{2+k}{2}x_1^2 + \frac{2-k}{2}y_1^2 = 1.$$

(1) 当 $k=0$ 时为单位圆；

(2) 当 $0<|k|<2$ 时为椭圆；

(3) 当 $|k|>2$ 时为双曲线. □

例 5-33　设 $a-b=2+\sqrt{3}$, $b-c=2-\sqrt{3}$，则 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值为______.

解　由配方 $(5-6)_2$，有[①]

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-b)(b-c) \\ &= (2+\sqrt{3})^2 + (2-\sqrt{3})^2 + (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) \\ &= 15. \ \square \end{aligned}$$

基本配方 2　一元二次三项式 $ax^2+bx+c(a>0)$ 的配方.

这个配方直接与因式分解、二次方程、二次函数、二次不等式等重要内容相联系，其主要形式有 3 个：

$$ax^2+bx+c$$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} \qquad (5-7)_1$$

$$= a\left(x+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 + (b-2\sqrt{ac})x \text{（其中 } ac>0\text{）} \qquad (5-7)_2$$

$$= \frac{(2c+bx)^2}{4c} + \frac{4ac-b^2}{4c}x^2 \text{（其中 } c\neq 0\text{）}. \qquad (5-7)_3$$

---

① 对于填空题也可用特例法，取 $a=2$, $b=-\sqrt{3}$, $c=-2$ 代入求值.

基本配方3 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$的配方

$$
\begin{aligned}
&(a^2+b^2)(c^2+d^2)\\
&=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2 \qquad (5-8)_1\\
&=(a^2-b^2)(c^2-d^2)+(ad+bc)^2+(ad-bc)^2. \qquad (5-8)_2
\end{aligned}
$$

其中$(5-8)_1$的配方可以表现为复数模的性质：

$$
\begin{cases}|z_1||z_2|=|z_1z_2|,\\ z_1=a-bi, z_2=c+di.\end{cases}
$$

更一般地，有

(1) $$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2 = (ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2. \qquad (5-9)$$

(2)
$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\\
&=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\right)\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i^2b_j^2-a_ib_ia_jb_j)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i^2b_j^2-2a_ib_ia_jb_j+a_j^2b_i^2)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j-a_jb_i)^2. \qquad (5-10)
\end{aligned}
$$

(3)
$$
\begin{aligned}
&(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)\\
&=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)^2\\
&\quad+(a_1b_2-a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)^2\\
&\quad+(a_1b_3-a_3b_1+a_4b_2-a_2b_4)^2\\
&\quad+(a_1b_4-a_4b_1+a_2b_3-a_3b_2)^2. \qquad (5-11)
\end{aligned}
$$

例5-34 解方程组

$$
\begin{cases}x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{4}, & ①\\ -8x+6y-24z=39. & ②\end{cases}
$$

解 由配方(5-9)得

$$39^2=(-8x+6y-24z)^2$$

$$= (64 + 36 + 576)(x^2 + y^2 + z^2) - (8y + 6x)^2 - (6z + 24y)^2 - (8z - 24x)^2$$
$$= 39^2 - (8y + 6x)^2 - (6z + 24y)^2 - (8z - 24x)^2.$$

得
$$\begin{cases} 8y + 6x = 0, \\ 6z + 24y = 0, \\ 8z - 24x = 0. \end{cases}$$

与方程(2)联立可得

$$x = -\frac{6}{13},\ y = \frac{9}{26},\ z = -\frac{18}{13}.\ \square$$

这道题的几何意义是,空间中的平面与球相切,求出切点为

$$\left(-\frac{6}{13}, \frac{9}{26}, -\frac{18}{13}\right).$$

上述3个基本配方形式,构成了配方的基本技能.由于配方的基础知识是很少、很浅的,所以配方问题主要是一个技能问题.为了有效培养配方技能,进一步掌握配方的基本特征与基本功能是有益的.

3. 配方的基本特征

特征1　配方目标有确定性.

就是说,配方有一个明确而具体的思维指向——出现平方式.这就使得具体配方时,能够排除干扰、瞄准目标、集中思想、一攻到底.然而,这种确定性并不导致呆板,因为对于千差万别的数学问题,如何拆项、添项?配几项式的完全平方?配几个完全平方式?等等,都是非常灵活的.§5-3-1已提到这方面的例子,例4-34(P.211),例4-35(P.215),例4-36(P.220),例5-30(P.307)也体现有这种灵活性.

特征2　配方途径有多向性.

就是说,同一个式子可以有不同的配方结果,可以配一个平方式,也可以配多个平方式.在基本配方形式中,我们已经看到 $a^2 + ab + b^2$ 有不下10种配方,$ax^2 + bx + c$ 也有3种常用的配方.于是,不同的配方形式就可以用来解决不同的数学问题,或为同一数学问题提供不同的解决办法.这对发散思维的培养是很有好处的.

例 5-35 根据函数单调性的定义，证明函数 $f(x)=-x^3+1$，在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数.

[1991 年数学高考理科(24)题]

讲解 对 $x_1<x_2$，有

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2).$$

问题转化为证明

$$x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0\ (x_1\neq x_2).$$

这可以在基本配方 1 的"流水线"上成批生产出多个解法.

特征 3 配方对象有多样性.

数、字母、具体的数学式、抽象的函数关系等都可以进行配方.

特征 4 配方使用有多重性.

配方可以并列地多次使用，也可以连续地重复使用.

特征 5 配方应用有广泛性.

无论是初等数学还是高等数学，无论是代数还是几何，无论是相等关系还是不等关系，无论是求值还是证明，无论是连续问题还是离散问题，无论是简单的整数还是抽象的解析式，都能用到配方，都已成为配方法知识链上的一环. 由于中学里"二次方"的问题非常普遍，所以中学数学中的配方法应用，几乎可以没完没了的历数下去：因式分解(从而数的整除问题)、根式或复数的开方、解方程、解不等式、函数性质的讨论、建立基本不等式及更广泛的不等式证明、二次曲线化简等等.

5-3-3 配方法的基本功能

配方是一种以"出现平方式"为思维指向的恒等变形，因而，配方法既具有一般恒等变形的功能，又具有"平方式"从而在实数范围内产生非负数的特殊功能. 至于配方法的更多作用，如配方消去一次项、配方分离字母等，都可以分解成这两个基本功能的组合与派生.

基本功能 1 变换形式

就是说，保持恒等而改变数学式的形状与结构. 这也就是为着所

期望的目标去转换信息,改变情境,促使隐蔽的条件明朗化,把问题的本质暴露出来.例4-36(P.220)的配方式⑥、⑦、⑧暴露了3个已知式之间的关系,例4-34(P.211)的配方式(变题)使顺利引进变换.难怪人们说,方法就是对形式的认识,就是变换形式,就是变换形式的全过程.

变换形式的配方法功能多用在相等关系表示的问题上,如求值、解方程、因式分解等.

配方变形的困难难在拆项、添项的灵活性上,而配方变形的精美,也正美在拆项、添项的技巧上.从教育价值上看,这正是培养能力、发展思维的最好机会.

虽然变换形式直接与第二个基本功能相联系,但它也能独立发挥作用.请看这方面的几个例子.

例5-36 在实数域内解方程

$$\begin{cases} x^2-y^2=8, \\ xy=3. \end{cases}$$

解 把原方程写成复数形式

$$(x^2-y^2)+2xyi=8+6i,$$

两边分别配方 $(x+yi)^2=(3+i)^2$,

得 $$x+yi=\pm(3+i),$$

有 $$\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=-3, \\ y_2=-1. \end{cases} \square$$

例5-37 求 $\sqrt{97-56\sqrt{3}}$ 的算术平方根

解 $$\sqrt[4]{97-56\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt[4]{7^2-2\cdot7\cdot4\sqrt{3}+(4\sqrt{3})^2}$$

$$=\sqrt[4]{(7-4\sqrt{3})^2}$$

$$=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt{2^2-2\cdot2\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}$$

$$=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$$
$$=2-\sqrt{3}.\ \square$$

以上两例的配方主要是为了便于开方，下例的配方主要是改变结构，实现解题目标.

例5－38　若 $ad-bc=1$，证明$\frac{a^2+b^2}{ac+bd}$（a,b,c,d 均为整数）不可约.

证明　由基本配方3，有

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$
$$=(ac+bd)^2+1.$$

若 a^2+b^2 与 $ac+bd$ 有公约数 $m>1$，则由

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2=1$$

知，1 含有因数 $m(m>1)$，这是不可能的，故$\frac{a^2+b^2}{ac+bd}$不可约. $\square$

基本功能2　在实数域内产生非负数

于是，非负数的性质就可以作为配方的结果而整个地转移过来. 这是第一个功能的直接延伸，也是配方法最辉煌的应用. 介绍4个方面的作用.

(1) 把变元控制在非负的平方式内，从而得出整个式子的估值.

例5－39　已知 $x^2+xy+y^2=19$，求 x^2+y^2 的最大、最小值

解　对原式作配方，有

$$19=\frac{3(x^2+y^2)}{2}-\frac{(x-y)^2}{2}\leqslant\frac{3(x^2+y^2)}{2},$$
$$19=\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{(x+y)^2}{2}\geqslant\frac{x^2+y^2}{2}.$$

分别得

$$x=y=\sqrt{\frac{19}{3}}\text{或}-\sqrt{\frac{19}{3}}\text{时}，(x^2+y^2)_{\text{最小值}}=\frac{38}{3}.$$
$$x=-y=\sqrt{19}\text{或}-\sqrt{19}\text{时}，(x^2+y^2)_{\text{最大值}}=38.\ \square$$

(2) 由平方式的非负性导出重要结论.

1）基本不等式.

1°. 对 $a,b\in\mathbf{R}$，由 $(a-b)^2\geqslant 0$，得

$$a^2+b^2\geqslant 2ab.$$

2°. 对 $a,b,c\in\mathbf{R}$，且 $a+b+c>0$，由

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3-3abc\\ =&\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\\ \geqslant&0.\end{aligned}$$

得
$$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc.$$

3°. 对 $a,b,c,d\in R$，有

$$\begin{aligned}&a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd\\ =&(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2\\ \geqslant&0,\end{aligned}$$

得
$$a^4+b^4+c^4+d^4\geqslant 4abcd.$$

2）柯西不等式.

由基本配方 3 中的 $(5-8)_1$，$(5-8)_2$ 及 $(5-9)$，$(5-10)$，可得

1°. $(a^2-b^2)(c^2-d^2)\leqslant(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

2°. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqslant(ax+by+cz)^2$.

3°. $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2\right)\geqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2$.

3）判别式法（见§5-2-1 判别式法的认识）.

例 5-40 已知△ABC 三边分别为 a,b,c，求证

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0,$$

试确定等号什么时候成立.

[IMO_{24-6}]

证明 不妨设 $a\geqslant b,c$（或 $a\leqslant b,c$），有

$$\begin{aligned}\text{左边}&=a(b-c)^2(b+c-a)+b(a-b)(a-c)(a+b-c)\\ &\geqslant 0,\end{aligned}$$

等号成立当且仅当

$$\begin{cases}(b-c)^2=0,\\(a-b)(a-c)=0.\end{cases}$$

即 $a=b=c$. □

这里应用了平方式的非负性,同时也使用了极端原理,假定 a 边最长(或最短),这是一个有效增设.(参见§6-2-9)

例5-41 对 $a,b,c,d,m\in\mathbf{R},m\neq -1$ 且 $(a-c)^2+(b-d)^2\neq 0$,求证

$$\frac{|ad-bc|}{\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}}\leqslant\sqrt{\left(\frac{a+mc}{1+m}\right)^2+\left(\frac{b+md}{1+m}\right)^2}.$$

证明 由柯西不等式有

$$\begin{aligned}&|ad-bc|\\=&\left|(a-c)\frac{b+md}{1+m}+(d-b)\frac{a+mc}{1+m}\right|\\\leqslant&\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\sqrt{\left(\frac{b+md}{1+m}\right)^2+\left(\frac{a+mc}{1+m}\right)^2}.\end{aligned}$$

变形即得. □(几何解法见例6-45,P.388)

例5-42 若抛物线

$$y=x^2+px+q$$

上有一点 $M(x_0,y_0)$ 位于 x 轴的下方,求证:抛物线与 x 轴必有两个不同的交点 $A(x_1,0),B(x_2,0)$,且 x_0 在 x_1,x_2 之间.

讲解 这是一个十分直观,而背景非常深刻的问题,牵涉到连续函数的介值性质.我们用配方来解决它.

由 M 在抛物线上且位于 x 轴下方有

$$\begin{cases}y_0<0,\\y_0=x_0^2+px_0+q\\\quad=\left(x_0+\dfrac{p}{2}\right)^2-\dfrac{p^2-4q}{4}.\end{cases}$$

得
$$p^2-4q=4\left(x_0+\frac{p}{2}\right)^2-4y_0\geqslant -4y_0>0,$$

这表明,二次方程

$$x^2+px+q=0$$

的判别式大于0,从而有两个不相等的实根,记为 x_1,x_2,于是抛物线就与 x 轴有两个交点 $A(x_1,0),B(x_2,0)$.

又由韦达定理知

$$\begin{cases}x_1+x_2=-p,\\ x_1x_2=q.\end{cases}$$

代入　$x_0^2+px_0+q=y_0<0$,

得不等式　$x_0^2-(x_1+x_2)x_0+x_1x_2<0$.

即　$(x_0-x_1)(x_0-x_2)<0$,

这表明 x_0 在 x_1,x_2 之间. □

(3) 由平方式的非负性质解不定方程.

在例5-2中我们已经见过这种功能,下面再看一个例子.

例5-43　怎样的整数 a,b,c 满足不等式

$$a^2+b^2+c^2+3<ab+3b+2c.$$

[1956年匈牙利竞赛题]

解　因为左边的整数小于右边的整数,所以左边加上1也不大于右边,即

$$a^2+b^2+c^2+4\leqslant ab+3b+2c.$$

可配方为

$$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+3\left(\frac{b}{2}-1\right)^2+(c-1)^2\leqslant 0,$$

得
$$\begin{cases}a-\dfrac{b}{2}=0,\\ \dfrac{b}{2}-1=0,\\ c-1=0.\end{cases}$$

有 $a=1,b=2,c=1$. □

(4) 由平方式到几何上的距离.

两点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 间的距离公式

$$d^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$

中,有两个平方项,当我们把一个数学式配方成两项平方和时,就在几何上对应着距离,这时能用配方法求解的问题,便可数形沟通转而用几何方法来求解.我们说,配方法是数形结合的一个重要桥梁.例4-35(P.215)中我们正是使用了这个桥梁导出多种解法.

例5-44 解方程

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}=x. \quad ①$$

讲解 这个题目有很多解法.比较意外的是,我们经过变形发现其与例4-35有完全一样的结构[①].

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}}=1. \quad ②$$

因而例4-35的种种解法全都可以移植过来.如

解法1 对①作配方变形,有

$$\begin{aligned}0&=2x-2\sqrt{x-\frac{1}{x}}-2\sqrt{1-\frac{1}{x}}\\&=\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)-2\sqrt{x-\frac{1}{x}}+1\right]+\left[(x-1)-2\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\right]\\&=\left(\sqrt{x-\frac{1}{x}}-1\right)^2+\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2.\end{aligned}$$

得
$$\begin{cases}\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=1,\\ \sqrt{x-1}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}.\end{cases}$$

均有
$$x^2-x-1=0. \quad ③$$

解之取正值,得 $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. □

---

① 笔者于1985年找到这个结构,从而导出配方解法.见1986年12月9日北京科技报(初中版):方程新解三例.

解法2　原式平方后移项配方，有

$$0=x^2-\left(\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\sqrt{x-\frac{1}{x}}\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)^2.$$

得
$$\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}\sqrt{x-\frac{1}{x}}\sqrt{1-\frac{1}{x}}.$$

化整可得③式. □

解法3　原式平方后移项配方，有

$$0=x^2-\left(\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{x}+1-x\right)^2+\left(\sqrt{x}\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{x-\frac{1}{x}}\right)^2.$$

得
$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+1-x=0,\\ \sqrt{x}\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}.\end{cases}$$

可得③式. □

解法4　如图5-3作△ABC，使高 $AD=\frac{1}{\sqrt{x}}$，$BC=x$，而 $BD=\sqrt{x-\frac{1}{x}}$，$DC=\sqrt{1-\frac{1}{x}}$，则

$$AB=\sqrt{x},\ AC=1.$$

又由△ABC 的面积为

$$S=\frac{1}{2}BC\cdot AD$$

$$=\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x}$$

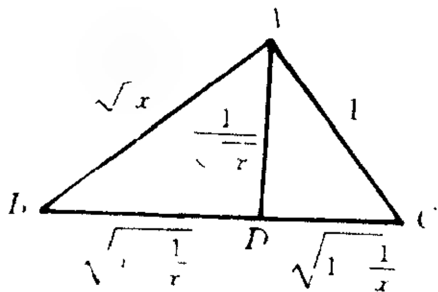


图5-3

$$=\frac{1}{2}AB\cdot AC.$$

这表明$\triangle ABC$为直角三角形，有

$$BC^2=AB^2+AC^2,$$

即 $$x^2=x+1.$$

解方程取正值，得 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. □

类似地，下列两题也可化成例 4－35 的结构

（1）解三角方程

$$5\cos x+12\sin x=13$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{5}{13}-\cos x\right)^2+\left(\frac{12}{13}-\sin x\right)^2=0.$$

（2）求方程的整数解

$$x\sqrt{2-y^2}+y\sqrt{2-x^2}=2$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\sqrt{1-\frac{y^2}{2}}\right)^2+\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2=0.$$

综上所述，可以得到这样一个结构框图：

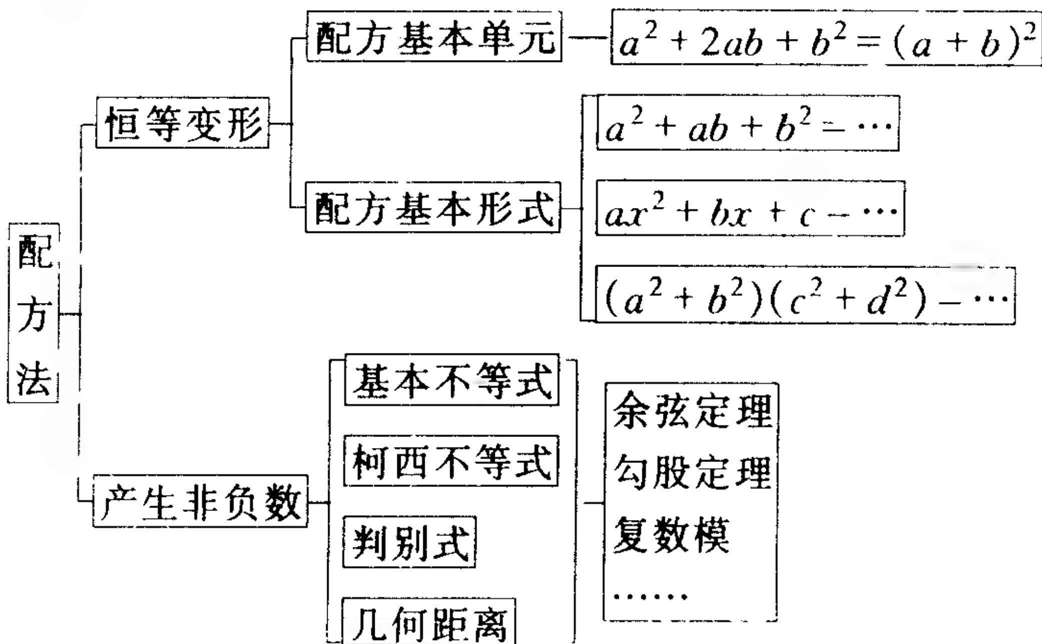


图 5－4

框图中已列出和尚未列出的各项数学内容,组成配方法知识链、当某一知识点受到问题信息的刺激时,整个知识链就都活跃起来,各种解题思路接踵而至,一题多解亦应运而生.

5-4 反 例

在数学中,要证明一个命题成立,须严格地论证在所给的条件下能逻辑地推导出结论.而要证明一个命题错误,十分简洁而又极具说服力的办法是举出反例.反例通常是指用来说明某个命题不成立的例子.有人也称为与命题相矛盾的特例.

反例的威力来源于形式逻辑[1],它与论证是相反相成的两种逻辑方法.论证是用已知为真的判断确定另一个判断的真实性,反例是用已知为真的事实去揭露另一判断的虚假性.它们都是为了揭示事物的本质和内在联系.美国数学家B·R·盖尔鲍姆说:"冒着过于简单化的风险,我们可以说(撇开定义、陈述以及艰苦的工作不谈)数学由两个大类——证明与反例组成,而数学发现也是朝着两个主要的目标——提出证明和构造反例."[2]

事实上,要确定一个判断(或一种理论)是真实的,常须直接或间接反驳另一个判断(或一种理论)为虚假的;同样,在揭示一个判断(或一种理论)的虚假性时,也离不了要表明正确的判断(或理论)是什么.这是肯定与否定的关系在方法论上的具体运用.

当代著名的哲学家和科学哲学家波普尔曾对西方学术界中长期占据主导地位的逻辑实证主义的科学观进行了深刻批判,并发展起了自己的批判哲学(或称"证伪主义科学观").这一理论认为,科学理

---

[1] 在社会生活中,正面和反面的例子可能同时存在,我们不能用一个反例去推翻整个问题,而是要分清主流与支流,本质与现象.

[2] [美]B·R·盖尔鲍姆 J·M·奥姆斯特德.分析中的反例.序言 P.2,上海科学技术出版社,1980年4月.

论的严格证实是不可能的，与此相反，重要的问题恰就在于证伪而不是证实：这不仅是指科学与伪科学的分界标准是可证伪性而并非可证实性，而且是指科学发展的根本动力即在于批判的精神，或者说，“理论的方法就是批判的方法”[①].

由于数学的特殊性，我们应当充分肯定证明在数学研究中的作用；但是，作为问题的另一方面，我们又应清楚地看到猜想与反驳在数学研究中的重要性．拉卡托斯[②]所提倡的数学发现的逻辑就是一种证明与反驳的方法，而这一方法则又可以看成波利亚对于数学启发法的复兴与波普尔的批判哲学的有机结合[③].

5-4-1 反例在数学教学中的作用

在数学史上，恰当的反例往往推动了数学的发展．常常有这样的情形，一个重要的猜想，数学家很长时间没能证明它，结果有人举出一个反例否定了这个猜想，使问题得到解决．

1640年，费马认为自己找到了能表示部分素数的公式 $2^{2^n}+1$ (称为费马数)．他验证了 $n=1,2,3,4$ 几个值都是正确的，于是有 $2^{2^n}+1$ 为素数的猜想．一个世纪之后，欧拉指出

$$2^{2^5}+1=4294967297=6700417\times 641.$$

这就推翻了费马的猜测．时至今日，人们还没有发现当 $n\geqslant 5$ 时费马数为素数的情况．

1644年，法国修道士马林·默森宣称 $M_p=2^p-1$ 型的数当 $p=2,3,5,7,13,17,31,67,127,257$ 时都是素数(称为默森素数)，其实他只验算了前面的7个．1903年美国数学家科尔作了一次无声的学

---

① 见参考文献[2]郑毓信．数学方法论，$P.55\sim P.56$.

② 拉卡托斯(1922～1974)世界著名数学哲学家，著有《证明与反驳》一书．康宏逵译，上海译文出版社，1987年10月第1版．

③ 见参考文献[2]郑毓信．数学方法论，$P.56$.

术报告，他在黑板上先算出 $2^{67}-1$，接着又把 193707721 × 761838257287 用竖式算了一次，两个结果完全相同，他没有说一句话，就回到了自己的坐位上，会场上却响起了暴风雨般的掌声．因为一个反例纠正了人们两百多年的误解．[1]

最轰动、最巨大的反例应该算罗巴切夫斯基的非欧几何了，它推翻了“第五公设可以证明”的猜想，从而使持续了一千多年的难题得以解决（§3－2－1）．

正因为反例在否定一个命题时具有特殊的威力，因此在教学中适当运用反例，可以收到事半功倍的效果．

1．纠正错误的有力工具

概念、定理的教学总是采取正面阐述的形式，而学生常常会对一些关键性的词语认识不足，对所要求的条件理解不全．这时反例能起到正面强调所起不到的强化作用，教育心理学家认为：“概念或规则的正例传递了最有利于概括的信息，反例则传递了最有利于辨别的信息．”

例 5－45　棱柱的定义．

讲解　中学课本中，棱柱是这样定义的：两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个的公共边都互相平行，由这些面所围成的几何体叫做棱柱．

有的同学认为这样的叙述啰嗦，建议改为：有两个面互相平行，其余各面都是平行四边形的几何体．

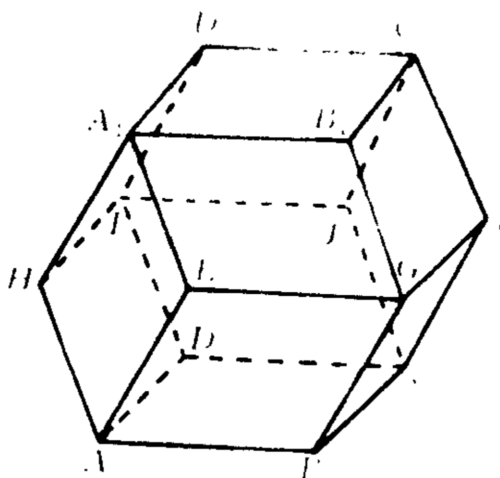


图 5－5

[1] 已经知道的默森素数所对应 p 值有：2，3，5，7，13，17，19，31，61，89，107，127，521，607，1279，2203，2281，3217，4253，4423，9689，9941，11213，19937，21701，23209，44497，86243，110503，132049，216091，756839，859433，1257787，3021377，6972593．

要纠正这种认识,给出反例如图5－5就够了.学生可以通过这个图形深化对棱柱本质特征的认识[1].

例5－46 截割线定理的逆命题.

讲解 学了平面几何截割线定理之后,很多同学都以为其逆命题也成立,有的地方甚至还将其作为考试题,其实逆命题不成立.反例如图5－6,作一任意四边形 $ABCD$, AB 与 CD 不平行, AD 与 BC 不平行,取 AD 的中点 E, BC 的中点 F,连 EF,则

$$\frac{DE}{EA}=\frac{CF}{FB}=1.$$

但 AB, CD, EF 互不平行.

作点变通,有真命题:

若 $CD\ /\!/\ AB$,且 $\frac{DE}{EA}=\frac{CF}{FB}$,则 $CD\ /\!/\ EF\ /\!/\ AB$.

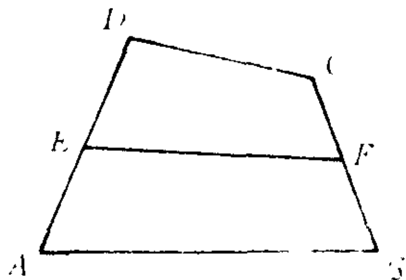


图5－6

2. 否定命题的重要方法

要否定一个命题,可用归谬法或证明法,但简明而有说服力的是列举事实——举出反例.偶函数 $f(x)=1, x\in\{0\}$ 有反函数可以消除中学界的一个流行误解.

例5－47 三边的长和面积的数值都是整数的三角形叫海伦三角形,命题"任何海伦三角形都有一条高的长为整数"是否成立?

解 命题不真.取$\triangle ABC$ 使 $a=5, b=29, c=30$,则半周长为

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)=32,$$

而面积为

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\\&=\sqrt{32\times27\times3\times2}\end{aligned}$$

---

[1] 注意:由两个同底四棱柱连接而成的凹多面体,不足以成为凸图形棱柱的反例.

$=72.$

全部满足条件,边长与面积均为整数,但它的3条高线长

$$h_a=\frac{144}{5},\ h_b=\frac{144}{29},\ h_c=\frac{24}{5}.$$

全都不是整数. □

例5-48　命题"无理数的无理数次幂仍为无理数"是否成立?

解　我们知道$\sqrt{2}$是无理数(例6-27,P·372),考虑$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$,若$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$为有理数,这就是一个反例;若$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$为无理数,则进而得$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^2=2$为有理数,也是反例.

这就说明,命题不成立. □

3. 培养能力的重要途径

反例的运用可以强化推理的严谨性,培养思维的批判性,发展逆向思维和发散思维,全面提高解题能力.经常的情况是,找一个反例比找一个证明更需要想象力和创造性.

例5-49　试证　无论θ取何值,曲线

$$x^2+y^2-2ax\sin\theta-2ay\cos\theta=0$$

都过定点,求出定点.

证明　取$\theta=0,\frac{\pi}{2}$,分别得

$$\begin{cases}x^2+y^2-2ay=0,\\x^2+y^2-2ax=0.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x_1=0,\\y_1=0;\end{cases}\qquad\begin{cases}x_2=a,\\y_2=a.\end{cases}$$

所以曲线过定点$(0,0)$,(a,a). □

评析　取$x_2=y_2=a=1$时,原式左边为

$$1^2+1^2-2\sin\theta-2\cos\theta=2\left[1-\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

仅当$\theta=k\pi+[(-1)^k-1]\frac{\pi}{4}$时为零,所以当$a\neq0$时,$(a,a)$未必为

定点.作为一个反例,它提醒我们,上述解法是运用必要性解题,还要验证充分性.

把(0,0)代入左右两边恒等,把(a,a)代入左边为$2a^2(1-\sin\theta-\cos\theta)$,对$a\neq0$不恒为0,故本题的曲线只经过一个定点(0,0).

经过反例的提醒,可以深入理解方法的本质和提高对充要条件的认识.

例5-50 "与同一直线成非零等角的两个平面必定平行"是否成立?

解 两个平行平面对同一直线是成等角的,但反过来不成立.为了找出反例我们首先取两个相交平面α,β,交线为a.为了得到一条直线同时与α,β成等角,我们作一个等腰$\triangle ABC$,点C在交线a上,AC在α上,BC在β上.为了使$\angle CAB,\angle CBA$恰好是直线AB与两平面的交角,只须$a\perp$平面ABC(如图5-7).□

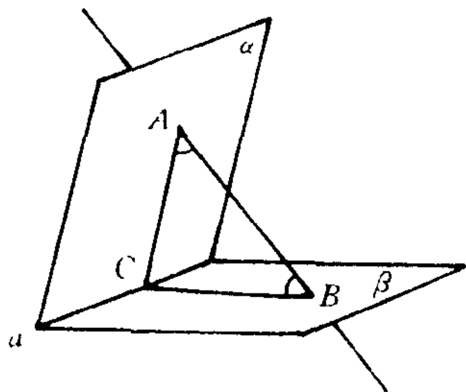


图5-7

由这个例子可以看到,反例的构造包含着不断的论证过程,它首先需要对命题所涉及的概念有深刻透彻的本质理解,同时能在理解的基础上表现出灵活性与批判性.

5-4-2 构造反例的方法

反例的构造非常灵活,它需要我们调动全部的数学功底,并充分展开想象.有时候,经过长时间的思考所得出的反例是如此意外地简单,使人们的兴奋与懊悔同时存在、一样强烈,并长久地陶醉在优美而奇异的原野风光之中.正如盖尔鲍姆所说:"一个数学问题用一个反例予以解决,给人的刺激犹如一出好的戏剧."

1. 列举挑疵法

因为反例实际上就是说明命题不成立的一个特例.通常情况下,这个命题不是"一切情况下均假",而是,有的情况下真,有的情况下假.经过全面考虑所有可能,一一严格验证,便可把成立的情况排除出去,不成立的情况挑选出来,从而得到反例.

在考虑所有可能时,采用二分法是有效的,很多情况下都是由于分类不全而"以假为真".

在一一严格验证时,尤其要注意特殊的位置和极端的情况,有的命题在一般情况下是成立的,仅在个别情况下才不成立,只是因为疏忽了特殊才"误假成真".

例5-51 求证 若两个三角形有两边及外接圆半径成比例,则这两个三角形相似.

讲解 这是早年一本几何书上的定理,证明如下:设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心,O' 为 $\triangle A'B'C'$ 的外心,有(图5-8)

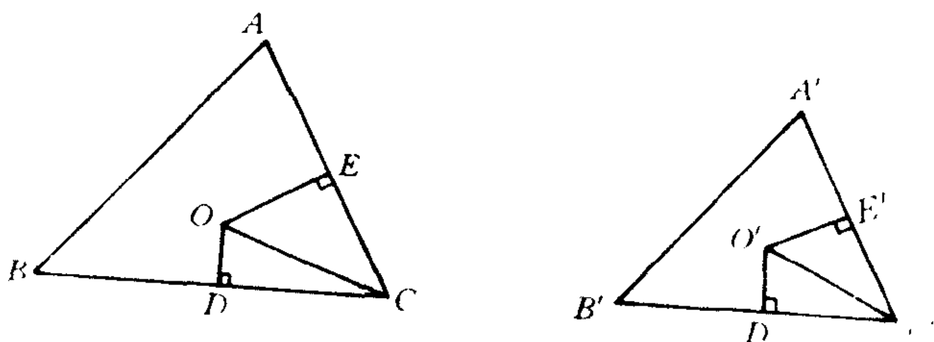


图5-8

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{OC}{O'C'}.$$

则
$$\frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}B'C'}=\frac{OC}{O'C'},$$

即
$$\frac{DC}{D'C'}=\frac{OC}{O'C'}.$$

得
$$\mathrm{Rt}\triangle COD\backsim\mathrm{Rt}\triangle C'O'D'.$$

有 $\angle OCD=\angle O'C'D'$.

同理 $\angle OCE=\angle O'C'E'$.

相加 $\angle C=\angle C'$.

从而 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$. □

仔细检查每一步都是正确的,但要注意到,外心与三角形的位置有3种可能,因而$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$外心的位置可能相同也可能不相同,上面证明的是外心位置相同的情况(是一种"潜在假设"§7-4)因而有

$$\angle C=\angle OCD+\angle OCE=\angle O'C'D'+\angle O'C'D'=\angle C'.$$

如果O'在$\triangle A'B'C'$的外部(图5-9),

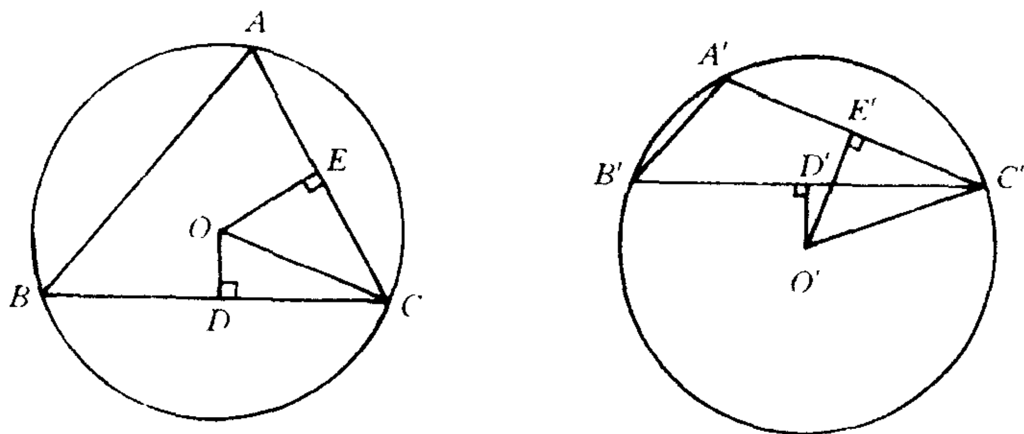


图 5-9

则有 $\angle C=\angle OCD+\angle OCE$,

$$\angle C'=|\angle O'C'E'-\angle O'C'D'|.$$

推不出$\angle C=\angle C'$.

据此,我们可以构造一个反例,如图5-9在锐角$\triangle ABC$与钝角$\triangle A'B'C'$中,有

$$AC=A'C',BC=B'C',\angle A=180^\circ-\angle A'<90^\circ,$$

显然满足 $\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{R}{R'}=1$.

但两个三角形不相似. □

这个反例是在全面考虑外心与三角形的各种位置关系之后，取一种比值等于1的极端情况构造出来的.

例5－52　下列命题是否正确？若正确，请给予证明. 否则，举出反例.

(1) 若 P，Q 是直线 l 同侧的两个不同点，则必存在两个不同的圆，通过 P，Q 且和直线 l 相切.

(2) 当 $a>0$，$b>0$ 且 $a\neq1$，$b\neq1$ 时，则

$$\log_a b+\log_b a\geqslant 2.$$

(3) 设 A，B 是坐标平面上的两个点集，

$$C_r=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant r^2\}.$$

若对任何 $r\geqslant0$ 都有 $C_r\cup A\subseteq C_r\cup B$，则必有

$$A\subseteq B.$$

[1984年高中联赛题]

讲解　这3个命题都是假命题，关键是如何找到反例.

(1) 连结 PQ，则直线 PQ 与 l 的位置关系有两种可能，一般情况下是相交，如图5－10，命题是成立的；特殊情况下是平行，过 PQ 且与 l 相切的圆只有一个. 如图5－11.

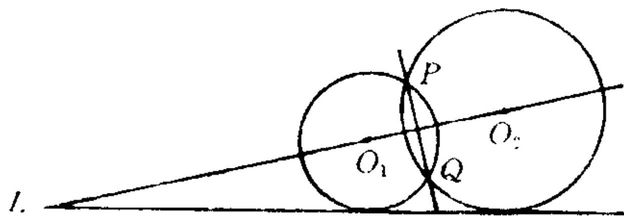


图5－10

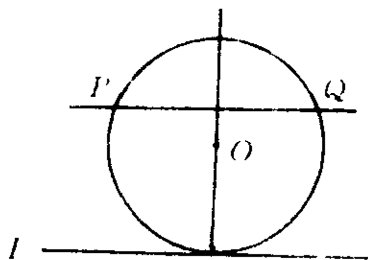


图5－11

取 $PQ/\!/l$，即构成反例. □

(2) $\log_a b\neq0$ 有两种可能，或者大于0，从而 $\log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}>0$，由基本不等式知命题成立；或者小于0，从而 $\log_b a<0$，两个负数之和必小于2. 因而全面考虑两种情况之后，可取满足 $(a-1)(b-1)<0$

的 a,b,特别地取 $ab=1$,则 $\log_a b=\log_b a=-1\left(如\ a=2,b=\frac{1}{2}\right)$,便构成反例. □

(3) 考虑 C_r 与 A,C_r 与 B 的交集,若 $C_r\cap A=\varnothing$ 且 $C_r\cap B=\varnothing$,则命题是成立的.反例应从 $C_r\cap A\neq\varnothing$ 或 $C_r\cap B\neq\varnothing$ 中去找.为了使 $A\subseteq B$ 不成立,至少应存在一点 $(x_0,y_0)\in A$,但 $(x_0,y_0)\notin B$.由于 $C_r\cup A\subseteq C_r\cup B$,所以 $(x_0,y_0)\in C_r\cup B$,从而 $(x_0,y_0)\in C_r$.这就告诉我们,应取这样的点:

$$(x_0,y_0)\in C_r,\quad (x_0,y_0)\in A,\quad (x_0,y_0)\notin B,$$

由于永远属于 C_r 的点只有(0,0),所以我们取

$$A=\{(x,y)\mid y=x\},$$

$$B=\left\{(x,y)\left|\frac{y}{x}=1\right.\right\}$$

则构成反例,在这里,我们实际上已经使用了反设逆寻法.

2. 反设逆寻法

为了找命题"$A\Rightarrow B$"的反例,我们先反设 B 不成立,然后根据 $\bar{B}$ 的需要找一个充分条件 A_1,使 $A\Rightarrow A_1$.这个 A_1 常常是满足 A 的特殊位置或极端情况.

例5-53 找一个反例使两个三角形有 5 个元素相等但不全等.

讲解 如果 5 个相等的元素包括 3 边,那么这两个三角形必定全等,不会出现反例.

如果 5 个相等元素中只有两组边相等,那就有两种可能.当两组等边恰好为对应边时,由 SAS 或 ASA 都可得出两个三角形必定全等,不会出现反例.反例只能出现在两组等边不为对应边的情况.

设△ABC 的三边为 a,b,c,△$A'B'C'$ 的三边为 b,c,d,且 $\angle A=\angle A'$,$\angle B=\angle B'$,$\angle C=\angle C'$.

下面,我们按照两个三角形相似而不全等的"反设",去找出 a,b,c,d(图 5-12).首先两三角形的边长成比例,且比值不等于 1,不妨设比值 $q\in(0,1)$,有

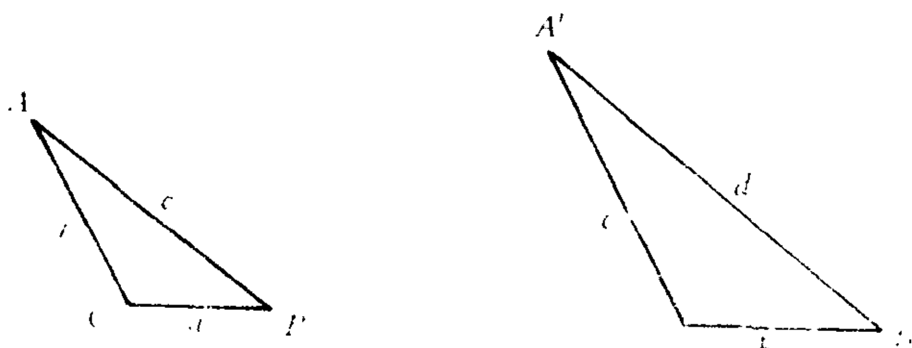


图 5–12

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=q<1.$$

则　　$c=dq,\ b=cq=dq^2.$

但　　$b+c>d,$

即　　$dq^2+dq>d.$

解得　　$q>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$

取 $q=\frac{2}{3}$，$a=8$，可得5个元素相等但不全等的两个三角形，其3边分别为(8,12,18)与(12,18,27).这就找到了反例并且要多少个有多少个. □

例5－54　判断命题"周长和面积分别相等的两个三角形全等"的真假.

讲解　设$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的3边长分别为a,b,c与a',b',c'.依题意有

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}(a'+b'+c')=p',$$

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{p'(p'-a')(p'-b')(p'-c')}.$$

视a,b,c为已知数，a',b',c'为未知数，则由于两条方程确定3个未知数，未必恒有惟一解

$$a'=a,\ b'=b,\ c'=c.$$

所以,我们猜想是假命题.

由于"周长和面积分别相等的两个正三角形必定全等",所以,我们按照"不全等"的反设来找三角形时,应该去找非等边三角形,为简单起见,设$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$均为等腰三角形.记$\triangle ABC$的三边为$2a,b,b$,其中$0<a<b,b\neq 2a$.则$\triangle A'B'C'$的三边为$2x,a+b-x,a+b-x$.其中$0<x<a+b$,两三角形底边上的高分别为

$$h=\sqrt{b^2-a^2},$$

$$h'=\sqrt{(a+b-x)^2-x^2}=\sqrt{(a+b)(a+b-2x)}.$$

由 $$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle A'B'C'},$$

有 $$a\sqrt{b^2-a^2}=x\sqrt{(a+b)(a+b-2x)}.$$

约去$\sqrt{b+a}$,并化整得

$$2x^3-(a+b)x^2+a^2(b-a)=0. \quad ①$$

问题转化为找方程中不等于a的正根.由于$x=a$时显然为根,方程①可化为

$$(x-a)[2x^2-(b-a)x-a(b-a)]=0.$$

令$x\neq a$,有

$$2x^2-(b-a)x-a(b-a)=0. \quad ②$$

由于 $$\begin{cases} x_1x_2=\dfrac{-a(b-a)}{2}<0, \\ \Delta=(b-a)(b+7a)>0. \end{cases}$$

所以,方程②一定有正根,解得

$$x=\frac{b-a+\sqrt{(b-a)(b+7a)}}{4}.$$

为使h为整数,取$b-a=9,b+a=49$,得$a=20,b=29$,从而$\triangle ABC$的周长为98,面积为420,而$\triangle A'B'C'$的三边为24,37,37,周长为98,面积为420,但两三角形不全等. □

3. 顺推寻阻法

当把一个命题作为真命题去分析时,如果进行到某一地方思维受阻,无法进展,甚至得出一些意外的、矛盾的结果,那么,这就是才

找反例的好地方.

例5－55　"过圆锥的两条母线所作的一切截面中,以轴截面的面积最大"是否成立?

讲解　我们先按真命题来分析.设圆锥的轴截面三角形顶角为 α,任意一截面三角形的顶角为 θ,母线长为 l,则轴截面面积为

$$S_0=\frac{1}{2}l^2\sin\alpha.$$

而截面三角形面积为

$$S=\frac{1}{2}l^2\sin\theta.$$

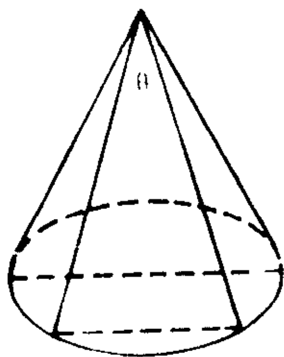


图5－13

要证明　$S\leqslant S_0$,

即　$\sin\theta\leqslant\sin\alpha$.　①

其中 $0<\theta\leqslant\alpha$.

当 $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,式①成立;但当 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ 时,对 $\frac{\pi}{2}<\theta<\alpha<\pi$,有　$\sin\theta>\sin\alpha$.

轴截面不是面积的最大值.这时取 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$ 便是一个反例.正确的结论应是

$$S_{\max}=\begin{cases}\frac{1}{2}l^2\sin\alpha & 0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \frac{1}{2}l^2 & \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi.\end{cases}$$

例5－56　下述命题是否正确,若正确,请予证明,否则举出反例:函数 $f(n)$ 的定义域是正整数集合 N_+,若 $f(n)$ 满足

(1) $f(n)$ 为正整数,

(2) $f(2)=2$,

(3) $f(mn)=f(m)f(n)$, $n\in N_+$.

则 $f(n)=n$.

讲解　显然,若 $f(n)=n$,则 $f(n)$ 满足题中的3个条件.并且

容易由数学归纳法证得

$$f(2^k)=2^k.\ (k\text{ 为非负整数}) \quad ①$$

由于任意的正整数 n 总可表示为

$$n=2^k(2t-1),\ (k\text{ 为非负整数},t\in N_+)$$

只须证 $$f(2^k(2t-1))=2^k(2t-1).$$

但 $$f(2^k(2t-1))=f(2^k)f(2t-1)=2^kf(2t-1).$$

故只须证 $$f(2t-1)=2t-1. \quad ②$$

对 $t=1$,有 $f(1)=f(2^0)=2^0=1$,命题能成立.但欲证

$$f(3)=3,$$

我们百思不得其解.因而怀疑命题不成立.

考虑到式①成立,而式②无法证实成立,所以我们构造反例时,充分利用①而避开②取

$$f(n)=2^k. \quad ③$$

其中 $n=2^k(2t-1)$.(k 为非负整数,$t\in N_+$).

则式③满足题中的 3 个条件,但并不是对一切 n 均有 $f(n)=n$,故所给的命题为假命题.

还有一些构造反例的方法需根据问题的条件,具体分析,灵活运用基础知识,有时还需要灵感.

习 题 五

1. 根据自己的解题实践,谈对解题方法的理解.

2. 人们常说,反证法实质上是证明原命题的逆否命题,从而达到解决原命题的目的,你认为对吗?

3. 什么情况下适宜使用待定系数法?

4. 考虑下面各例的证法,研究数学归纳法的局限性.

(1) $\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4}$;

(2) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2$;

(3) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<1$;

(4) $2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}}<4$.

5. 用数学归纳法或非数学归纳法证明

(1) 已知 $x_k\in\mathbf{R}(k=1,2,\cdots,n,n\geqslant 2)$ 满足

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k|=1,\ \sum_{k=1}^{n}x_k=0.$$

求证

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k}\right|\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}.$$

(2) 若 $\sum_{k=1}^{n}x_k=2a$, $\sum_{k=1}^{n}|x_k|=2b(b>a)$,则

$$\frac{n+1}{n}a-\frac{n-1}{n}b\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k}\leqslant\frac{n+1}{n}a+\frac{n-1}{n}b.$$

6. 找出下述证明中的错误.

题目　若 α 与 β 是二次方程 $x^2+5x+3=0$ 的两个根,则对一切正整数 n, $\alpha^n+\beta^n$ 都是奇数.

证明　由韦达定理知

$$\alpha+\beta=-5,\ \alpha\beta=3.$$

(1) 当 $n=1$ 时, $\alpha+\beta=-5$ 为奇数;

当 $n=2$ 时, $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=19$ 为奇数.

(2) 设 $n=1,2,\cdots,k-1$ 时, $\alpha^n+\beta^n$ 均为奇数,则

$$\begin{aligned}
&\alpha^k+\beta^k\\
&=(\alpha+\beta)(\alpha^{k-1}+\beta^{k-1})-\alpha\beta(\alpha^{k-2}+\beta^{k-2})\\
&=-5(\alpha^{k-1}+\beta^{k-1})-3(\alpha^{k-2}+\beta^{k-2})\\
&=-4(\alpha^{k-1}+\beta^{k-1})-(\alpha^{k-1}+\beta^{k-1})-3(\alpha^{k-2}+\beta^{k-2})\\
&=-4(\alpha^{k-1}+\beta^{k-1})+[5(\alpha^{k-2}+\beta^{k-2})+3(\alpha^{k-3}+\\
&\quad\beta^{k-3})]-3(\alpha^{k-2}+\beta^{k-2})\\
&=-4(\alpha^{k-1}+\beta^{k-1})+2(\alpha^{k-2}+\beta^{k-2})+3(\alpha^{k-3}+\beta^{k-3}).
\end{aligned}$$

前两式为偶数,第三式为奇数,故总和为奇数.

由第二数学归纳法知 $\alpha^n+\beta^n$ 是奇数. □

但 $\alpha^3+\beta^3=-80$ 为偶数.

7. 用配方法解下列各题:

(1) 已知 $a>c>0, b>0, d>0$, 求函数

$$y=a\sqrt{x^2-b}-cx+d$$

的最小值

(2) 若 $\alpha,\beta\in(0,\pi)$, 求满足[1]

$$\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}$$

的 α,β.

(3) 设 A,B,C 为 $\triangle ABC$ 的三个内角, x,y,z 为任意实数, 求证

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2xy\cos C+2yz\cos A+2zx\cos B.$$

(4) $\theta\in\mathrm{R}$, 求证

$$5+8\cos\theta+4\cos 2\theta+\cos 3\theta\geqslant 0.$$

(5) 对 $x,y\in\mathrm{R}$, 有

$$x^2+xy+y^2+2x-2y+4\geqslant 0.$$

(6) 求 $(4-3\sin\theta)(4+3\cos\theta)$ 的最小值.

(7) 解方程

$$5x^2-4xy+8y^2-6x-12y+9=0.$$

8. 分析下面的反证法:

(1) 证明三垂线定理的逆定理.

证明　如图 5-14, $BC\perp\alpha$, 垂足为 C, 直线 BA 是平面 α 的斜线, A 为斜足. 直线 $a\subset\alpha$ 且 $a\perp BA$, 要证 $a\perp CA$.

现假设 a 不垂直于 CA, 由 $BC\perp\alpha, a\subset\alpha$ 知, $BC\perp a$.

又由已知 $a\perp BA$, 而 $BC\cap BA=\{B\}$, 得 $a\perp$ 平面 ABC, 但 CA

---

[1] 问题可以理解为, 单位圆上的点 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 在直线 $x(1-\cos\beta)+y\sin\beta+\cos\beta-\frac{3}{2}=0$ 上, 因而, 圆心到直线的距离不大于 1, 由此可顺利配方.

⊥平面 ABC，所以

$$a\perp CA. \qquad ①$$

这与假设相矛盾，得证 $a\perp CA$. □

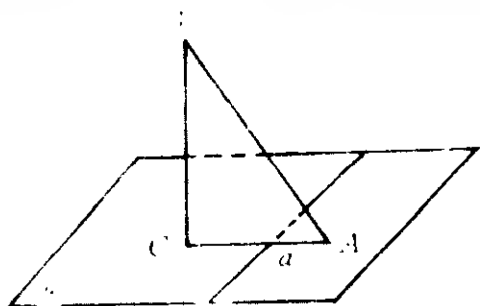


图 5-14

事实上，到式①已经证出了 $a\perp CA$，去掉反证法的假设与反证法的结论恰好得出一个直接证法.

（2）求证对任意正整数 n，分数 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 不可约.

证明　记 $(21n+4, 14n+3)=d$. 若结论不成立，则 $d>1$.

这时存在 $p, q\in \mathbf{N}_+$，使

$$\begin{cases}21n+4=pd, & ①\\ 14n+3=qd. & ②\end{cases}$$

由 $3\times②-2\times①$，得

$$1=(3p-2q)d. \qquad ③$$

得

$$d=1. \qquad ④$$

与 $d>1$ 矛盾. 故 $d=1$，即 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 不可约. □

这与上题一样，①、②、③、④已经得出题目的结论. 去掉反证法的假设与反证法的结论就是一个直接证法. 还请注意恒等式：

$$3\times(14n+3)-2\times(21n+4)=1.$$

（3）设 a, b 都是正数，求证

$$\frac{a-b}{a}\leqslant \ln\frac{a}{b}\leqslant \frac{a-b}{b}.$$

证明　反设 $\ln\frac{a}{b}\leqslant\frac{a-b}{b}$ 不成立，便有

$$\ln\frac{a}{b}>\frac{a-b}{b}.$$

由对称性

$$\ln\frac{b}{a}>\frac{b-a}{a}.$$

相加 $$\ln\frac{a}{b}+\ln\frac{b}{a}>\frac{a-b}{b}+\frac{b-a}{a}.$$

即 $$\ln 1>\frac{(a-b)^2}{ab},$$

或 $$0>\frac{(a-b)^2}{ab}\geqslant 0.$$

这一矛盾说明 $\ln\frac{a}{b}\leqslant\frac{a-b}{b}$ 正确.

从而 $$-\ln\frac{a}{b}\geqslant\frac{b-a}{b}.$$

即 $$\ln\frac{b}{a}\geqslant\frac{b-a}{b}.$$

交换 a,b 的位置

$$\ln\frac{a}{b}\geqslant\frac{a-b}{a}.$$

合并得

$$\frac{a-b}{a}\leqslant\ln\frac{a}{b}\leqslant\frac{b-a}{b}. \square$$

9. 分析下题的解法.

题目 设 a,b,c 是三角形的边长,证明

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0,$$

并说明等号何时成立.

[IMO_{24-6}]

证明 1 首先指出这样一个原理:欲证一个不等式 $A\geqslant B$,若能确认不等式 $A\geqslant B$ 与另一个不等式 $C\geqslant D$ 同为真假,那么只需证明不等式 $A+C\geqslant B+D$ 就够了.

现在,由于题中对 a,b,c 未作任何限制,它们在不等式中的"地位"是完全平等的,因此,不等式

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0,$$

与不等式

$$b^2a(b-a)+c^2b(c-b)+a^2c(a-c)\geqslant 0.$$

是同为真假的.但由于相加

$$[a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)]+$$
$$[b^2a(b-a)+c^2b(c-b)+a^2c(a-c)]$$
$$=ab(a-b)^2+bc(b-c)^2+ca(c-a)^2$$
$$\geqslant 0.$$

所以原不等式成立. 当 $a=b=c$ 时取等号. □

请参阅下列资料

[1] 中学数学(苏州),1984,3,封底;1984,5,P.26.

[2] 数学教学,1989,4,P.38;1991,3,P.40.

[3] 湖南数学通讯,1984,6,P.20;1994,5,P.19;1995,2,P.29.

证明 2　不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,有

$$\text{左边}=ac(a-b)^2+ac(b-c)^2$$
$$+(a-b)(b-c)[a^2+c(a-b)]\geqslant 0.$$

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号. □

由这个证法可见,a,b,c 为三角形三边的条件是多余的,a,b,c 为正数就够了.(对比例 5-40,P.315 解法上的不同)

10. 研究下列各题,若成立给出证明,否则给出反例.

(1) 非周期函数的和仍为非周期函数.

(2) 对一切 $x,y\in R$,均有

$$\sin(x+y)\neq\sin x+\sin y.$$

(3) 微分中值定理的逆命题.

(4) 若 $AB>A'B'$,$BC>B'C'$,$CA>C'A'$,则

$$\triangle ABC\text{ 的面积}>\triangle A'B'C'\text{的面积}.$$

(5) 如果一个三角形的两条外角平分线长度相等,那么这个三角形为等腰三角形.

(6) 一对对角及一对对边相等的四边形必为平行四边形.

(7) 具有有限面积的平面图形,其周长也是有限的.

(8) 具有有限体积的空间图形,其表面积也是有限的.

(9) 非负实数与正实数存在一一对应关系.

11. 分析下题解法的特色.

题目 △ABC中，若$\angle B$的平分线BD等于$\angle C$的平分线CE，求证$\angle B=\angle C$.

证明 设$\angle B \geqslant \angle C$. 在$CE$上取一点$M$，使

$$\angle DBM=\frac{1}{2}\angle C,$$

$$CM \leqslant CE.$$

可推得$\triangle BND \backsim \triangle CNM$，从而

$$\frac{BN}{CN}=\frac{BD}{CM} \geqslant \frac{BD}{CE}=1.$$

从而$BN \geqslant CN$，可推得

$$\angle C \geqslant \angle NBC=\frac{1}{2}\angle C+\frac{1}{2}\angle B.$$

从而$\angle C \geqslant \angle B$,

但$\angle B \geqslant \angle C$,

故得 $\angle B=\angle C$. □

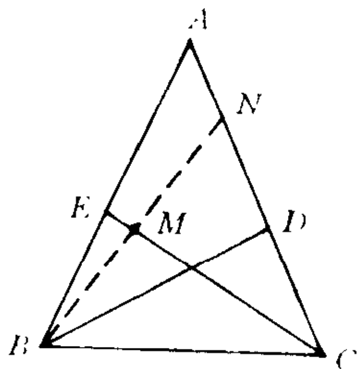


图 5-15

第六章　解题策略

经过解题观点的武装，解题方法的研究，并积累了大量解题过程分析的经验之后，我们来研究解题策略，这是一个既体现实践上升为理论，又体现理论指导实践的重大课题.

本章首先对解题策略作一般性的认识，指出它的 4 条特征，然后具体研究 10 条解题策略，并对选择题、填空题的求解策略进行系统的剖析.

6-1　解题策略的一般认识

策略是指导行动的方针，同时也是增强效果、提高效率的艺术. 数学解题的策略是为了实现解题目标而采取的方针. 它体现了选择的机智和组合的艺术. 我们说，解题策略有 4 条基本的特征.

1. 普遍的适应性

就是说，它的层次比较高，适用面比较广，并以其全局性的指导意义而区别于具体的解题技巧.

2. 直接的可用性

就是说，它是解题思想转化为解题操作的桥梁，完全可以使用来求解具体的问题，并以其直接的可用性而区别于抽象的解题思想.

3. 方法的二重性

解题策略介于具体的解题技巧与抽象的解题思想之间，作为方法，一方面它是被用来具体解题的方法，另一方面它又是运用解题方法的方法，寻找解题方法的方法，创造解题方法的方法.

4. 选择的最优化

如果把解题策略理解为选择与组合的一系列规则，那么这些规则应该具有迅速找到较优解题操作的基本功能，能够减少尝试与失败的次数(或任意性)，能够节省探索的时间和缩短解题的长度，体现出选择的机智和组合的艺术.

解题策略的选择是一种有目的的思维活动，然而并不遵循严格的逻辑规则，往往有许多中间性的跳跃，它通常是依据知识经验和审美判断，对解决数学习题的途径和方法作出总体性的决策，带有一定程度的猜测性和预见性.

6－2 解题策略的基本考虑

介绍10个解题策略：模式识别、映射化归、差异分析、分合并用、进退互化、正反相辅、动静转换、数形结合、有效增设、以美启真. 这不是逻辑上的划分，有时是对同一思想实质的不同角度的描述.

6－2－1 模式识别

学习数学的过程中，所积累的知识经验经过加工，会得出有长久保存价值或基本重要性的典型结构与重要类型——模式，将其有意识地记忆下来，并作有目的的简单编码. 当遇到一个新问题时，我们辨认它属于哪一类基本模式，联想起一个已经解决的问题，以此为索引，在记忆贮存中提取出相应的方法来加以解决，这就是模式识别的解题策略. 在§2－3(P.80)及§4－2－2(P.189)等处曾经提到过.

从思维的角度看，模式识别的解题策略体现了思维定势正迁移的积极作用. “遇新思陈、推陈出新”无非是为了在当前问题与头脑中已有的知识、经验之间建立联系，以诱发积极有用的思维定势. 无论在什么情况下都应该清醒看到，所积累的知识和经验都是解决问题的依据与凭借. 据透露，美国航天局所采用的技术基本上都是旧技术的借用、改造与重新组合.

这一策略体现了化归的思想，有时是化生为熟的“熟悉化”原则，

有时是分解为若干个基本问题的“简单化原则”．同时，它还是类比、联想等思维活动得以展开的基础，并与直觉相联系．它与解题坐标系上的“迹线平移原则”也是相通的（§4－2－2）．

典型模式就像建筑上的预制构件，也是思维的基本组块，本质上是一种标准化设计，即将陌生的问题转化为标准的问题，然后用标准的程序去解决它．

在中学数学教学中，“基本问题”的思想是这一策略的重要表现，积累基本问题也就成为提高这一策略效率的捷径．比如在几何上有解题的“基本图形法”，即将一些典型的图形彻底解剖，遇到一个新的图形时，或者将其补充为一个基本图形、或者将其分拆为几个基本图形，然后在基本图形的框架内加以解决．

正方体是立体几何中的一个基本图形，应首先对正方体的基本情况了如指掌，然后遇到新的问题时，或者拼补为一个正方体（如例4－16）、或者分割成几个正方体，这就是基本图形的思想，也是模式识别的策略．“能割善补”是学习立体几何的一个诀窍，正方体的基本情况包括：

（1）正方体有6个面、8个顶点、12条棱，且满足

$$面数+顶点数-棱数=2.$$

（2）正方体的12条棱可以组成24对异面直线．

（3）正方体有9条对称轴、9个对称面．

（4）由正方体的顶点组成的三角形中，有锐角三角形8个，直角三角形48个．

（5）正方体绕其体对角线旋转120°后，与原正方体位置重合．

（6）正方体的内切球半径为$\frac{a}{2}$，外接球半径为$\frac{\sqrt{3}}{2}a$．

（7）一个平面截正方体可以是：三角形（锐角三角形，面积在$0\sim\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$之间），正方形（面积$a^2$）、菱形（面积在$a^2\sim\frac{\sqrt{6}}{2}a^2$之间）、长方形（面积在$0\sim\sqrt{2}a^2$之间）、梯形、平行四边形、五边形、六边形．

(8) 棱、面对角线、体对角线(简称正方体的三类线)分别组成什么角度?(包括异面直线所成的角)

(9) 三类线与二类面(侧面、对角面)间,线面所成的角分别为多少度?

(10) 侧面与对角面间分别组成什么角度?

(11) 正方体的三类线间,异面直线的距离各是多少?其中最典型的是两相邻侧面对角线间的距离$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,其求法(有 10 多种)又可以成为求异面直线的基本图形与基本方法.

在例 4-16 中(P.174),将一个部分图形,拼补为正方体,正是基本图形的思想.下面看两道高考题.

例6-1 如图 6-1,已知 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形,E,F 分别是 AB,AD 的中点,GC 垂直于 $ABCD$ 所在的平面,且 $GC=2$,求点 B 到平面 EFG 的距离.

[1991 年数学高考理科题]

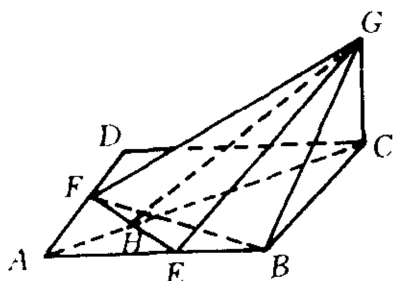


图 6-1

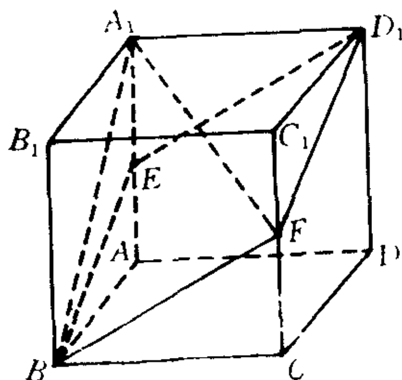


图 6-2

例6-2 如图 6-2,已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 a 的正方体,E,F 分别为棱 AA_1 与 CC_1 的中点.求四棱锥 A_1-EBFD_1 的体积.

[1992 年数学高考文科第(26)题]

讲解　将图 6－1 拼补为正方体得图 6－3，则两道高考题的实质步骤都是求正方体一个顶点到某一截面的距离，例 6－1 是求 B 到截面 $GPEFQ$ 的距离（图 6－3），例 6－2 是求 A_1 到截面 $EBFD_1$ 的距离（图 6－2）．对例 6－1 略解如下：

如图 6－1，连结 BF, BG, AC，记 AC 与 EF 交于点 H，则 $GH=\sqrt{GC^2+HC^2}=\sqrt{22}$，由

$$V_{G-BEF}=V_{B-GEF},$$

有

$$\frac{1}{3}S_{\triangle BEF}\cdot GC=\frac{1}{3}S_{\triangle GEF}\cdot h,$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}BE\cdot AF\right)\cdot GC=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}EF\cdot GH\right)\cdot h,$$

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\right)\cdot 2=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{22}\right)\cdot h,$$

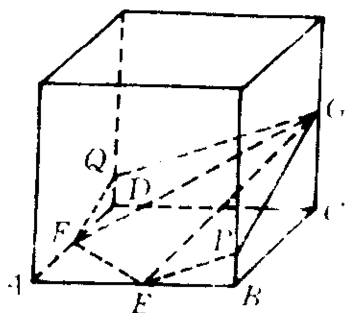


图 6－3

得

$$h=\frac{2\sqrt{11}}{11}.\ \square$$

下面是一个小学水平的例子．

例 6－3　妈妈去商店买布，所带的钱刚好可买甲布 2 米，或买乙布 3 米，或买丙布 6 米，她决定 3 种布买一样多米，问最多能各买几米？

讲解　这到底是什么类型的问题，在学生中有多种说法：

(1) 按比例分配；

(2) 不定方程；

(3) 函数求极值．

有的同学还在两者或三者之间犹豫不决，这说明他们在进行“模式识别”的搜寻活动．但强者很快就能从记忆中把原有的知识、经验检索出来，判断为如下工程问题．

例 6－3′　一项工程，甲干 2 天完成，乙干 3 天完成，丙干 6 天完成，甲、乙、丙一齐干几天完成？

并且，立即就使用相应的办法，求出答案

$$1 \div \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=1,$$

即甲、乙、丙三种布买一样多,最多能各买一米. □

专家与普通人在解决问题时之所以会有区别,其中一个原因就在于专家能迅速找出贮存在头脑中的模式,作为检索问题解法的索引、大大减少搜寻的时间.

为了掌握好"模式识别"的解题策略,我们建议:

(1) 积极积累模式

首先要将所学的内容整理归纳出类型和方法,其次要把类型、方法和范例作为一个整体来积累.类型是模式的骨架,范例是模式的血肉,方法是模式的灵魂,三者缺一不可.

这里,最容易被忽视的是范例,当代数学大师陈省身教授曾经说过:"一个好的数学家与一个蹩脚的数学家,差别在于前者有很多具体的例子,后者则只有抽象的理论".科学哲学家库恩认为:学生正是通过学习范例,通过做习题等活动来掌握一门科学知识及其方法的,没有范例,科学知识不能清楚地表达出来,也无法为人们所掌握;没有范例,人们也就无从按照该门科学的要求去解决任何问题,数学当然也不例外.

(2) 自觉使用模式

由于数学是一门演绎推理的学科,所以任何一个已被证实的结论都可以成为推断其他结论的依据,而不必事事都回到原始概念或始端公理上去.因此,化归为基本模式实在是数学解题的一个可靠而有效的策略,解题就是归结为已经解过的题.

我们对数学高考解题研究得到的一个重要结论就是:化归为课本的基本问题、化归为历年的高考题.

(3) 努力突破模式

波利亚本人十分重视模式,在《数学的发现》一书中,花了很大的篇幅去详细介绍"双轨迹模式"、"笛卡尔模式"、"递归模式"、"叠加模式",但他并没有将模式变为束缚思维的框框,而只是思维腾飞的跑

道.他为我们制订了“探索法的小词典”、“而留给学生去做的还很多”.

事实上,模式只是提供了一种相对稳定的样本,既非万能又非一成不变.遇到一个新的、更深刻的、或非常规的问题时,我们还需要转化或分解问题,还需要对模式加以重组,创新出更多或更高层次的模式,逐渐进入得心应手的境界——“没有模式就是最好的模式”.这种“从无到有”又“从有到无”的关系,我们在§3-1(P.99)解题程序中有过类似的认识.

由上面的叙述可以看到,模式识别的应用有三个层次:直接识别,直接使用;转化识别,化归使用;分解、组合,创造条件使用.

6-2-2　映射化归

如果说“模式识别”是把一个新问题化归为一个熟悉的或易解的问题的话,那么映射则是把一个新问题转化为一个等价的会解的问题.前者是直接的化归,后者是间接的对应.在例3-12的解法2(P.137)中有这种对应的成功应用,在例4-12(P.168),例4-25(P.187),例4-28(P.191),例4-33(P.206),例4-37(P.224),例6-12及§6-2-8数形结合等处,有这种对应的更多应用.一般地,可把这一策略表示为关系(Relationship)、映射(Mapping)、反演(Inversion)原则,简称RMI原则:

给定一个含有目标原象 x 的关系结构[①] S,如果能找到一个可定映映射 φ,将 S 映入或映满 S^*,则可从 S^* 通过一定的数学方法把目标映象 $x^*=\varphi(x)$ 确定出来,进而通过反演 φ^{-1} 又可以把 $x=\varphi^{-1}(x^*)$ 确定出来.

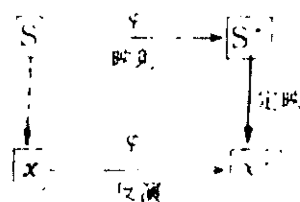


图6-4

① 通常把彼此之间具有确定的数学关系(运算关系、序关系)的数学对象的集合称为关系结构.

这样原来的问题就得到了解决.

整个 RMI 原则由 5 个要素组成：关系、映射、定映、反演、得解.

取对数计算、换元、引进坐标系、设计数学模型、构造发生函数等均体现了 RMI 原则[①].

例6-4　设 H 是锐角$\triangle ABC$ 的垂心，由 A 向以 BC 为直径的圆作切线 AP，AQ，切点分别为 P，Q.求证 P，H，Q 三点共线.[1996 年第 11 届全国中学生数学冬令营第 1 题]

解　这是笔者所提供的一道试题.直接的几何证法需一再用到 4 点共圆，推理较复杂.而用坐标法，程序明显、计算简单[②].

以直线 BC 为 x 轴，线段 BC 的垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系，$\triangle ABC$ 的 3 个顶点在这个坐标系上的坐标为 $A(a,b)$，$B(-R,0)$，$C(R,0)(R>0)$，

则以 BC 为直径的圆的方程为

$$x^2+y^2=R^2. \qquad ①$$

而过 P，Q 的切线方程分别为

$$xx_P+yy_P=R^2,$$

$$xx_Q+yy_Q=R^2;$$

因为两切线均过 A 点，故有

$$ax_P+by_P=R^2,$$

$$ax_Q+by_Q=R^2;$$

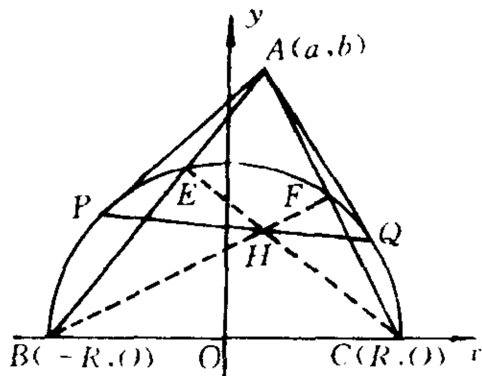


图6-5

这表明，P，Q 在直线

$$ax+by=R^2 \qquad ②$$

上，但过 P，Q 的直线是惟一的，故②就是直线 P，Q 的方程.

又由锐角三角形知，AB，AC 与圆相交，记 AB 与圆交于 E，AC

① 详见徐利治、郑毓信.关系映射反演方法，江苏教育出版社，1989 年 5 月第 1 版.

② 笔者是先由解析几何找到并解出这道题目、再让一个学生找出纯几何证法的.易知，作伸缩变换后，BF，CE，PQ 仍三线共点.

与圆交于F,则$BF\perp AC$,$CE\perp AB$.且BF与CE交于$\triangle ABC$的垂心H.

由直线AC的斜率为$\frac{b}{a-R}$知,直线BF的斜率为$\frac{R-a}{b}$,得直线BF的方程为

$$(a-R)x+by=R^2-aR; \quad ③$$

同理,CE的方程为

$$(a+R)x+by=R^2+aR. \quad ④$$

由③+④,得 $$ax+by=R^2.$$

这正是切点弦PQ的方程,得证BF与CE的交点在PQ上,即PQ通过$\triangle ABC$的垂心.□

这个问题的化归过程如图6-6.

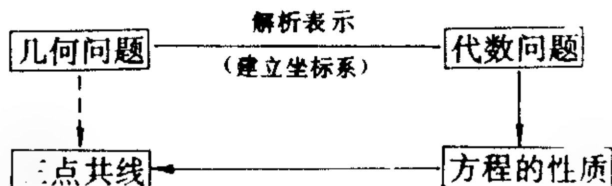


图6-6

例6-5 计算

$$S=\frac{729^2\times\sqrt[3]{3.24}}{12.01^5}.$$

解 第一步取对数

$$\lg S=2\lg729+\frac{1}{3}\lg3.24-5\lg12.01.$$

第二步查表

$$\lg S=2\times2.8627+\frac{1}{3}\times0.5105-5\times1.0795=0.4981.$$

第三步求反对数①

$$S=3.149.$$ □

这两个例子处理问题的思想是完全相同的,如果原问题系统不便于直接处理,那么着眼于变化,可以将其映射到一个新的问题系统,使得在新系统下问题能较简单、较容易得到一个解答,然后将这

---

① 拉普拉斯曾形象地描述道:"对数计算通过缩短计算时间,而延长了天文学家的生命."但计算机的出现又使对数相形见拙.

个解答再还原为原问题的解答.下面是两个直接应用映射来解题的例子.

例6-6 设 n 是正整数,我们说集合$\{1,2,\cdots,2n\}$的一个排列$(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})$具有性质 P,是指在$\{1,2,\cdots,2n-1\}$当中至少有一个 i,使$|x_i-x_{i+1}|=n$.求证 对于任何 n,具有性质 P 的排列比不具有性质 P 的排列的个数多.
[IMO30 6]

解 这个问题可以直接计算满足条件 P 的排列数超过总排列数的一半.但不如"对应"的方法简单.

设不具有性质 P 的排列的集合为A,恰有一个 i 使$|x_i-x_{i+1}|=n$ 的排列的集合为B.

当 $n=1$ 时,显然成立.当 $n\geqslant 2$ 时,首先有

$$|B|<\text{具有性质 } P \text{ 的排列数}.$$

又对 A 中的每一个元素

$$(x_1,x_2,\cdots,x_{2n}),$$

必存在 $k>2$,使

$$|x_k-x_1|=n.$$

作对应 f 为:$(x_1,x_2,\cdots,x_{k-1},x_k,\cdots,x_{2n})$

$$\to(x_{k-1},x_{k-2},\cdots,x_2,x_1,x_k,x_{k+1},\cdots,x_{2n})\in B.$$

显然,A 中的每个元素经过对应 f 后在B 中都有像,且 A 中不同的元素对应着B 中不同的像.因而有

$$|A|\leqslant|B|<\text{具有性质 } P \text{ 的排列数}.\ \square$$

例6-7 把$\triangle ABC$的各边n 等分,过各分点分别作各边的平行线,得到一些由三角形的边和这些平行线

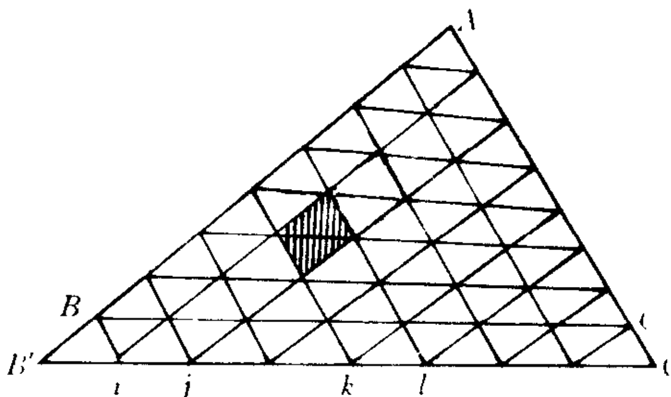


图6-7

所组成的平行四边形,试计算这些平行四边形的个数.

解　由对称性,先考虑边不平行于 BC 的小平行四边形.如图6-7,把 AB 边和 AC 边各延长一等分,得 B',C',连 $B'C'$.将 AB' 的 n 条平行线分别延长与 $B'C'$ 相交,则在 $B'C'$ 共有 $n+2$ 个点,从 B' 至 C' 依次记为 $1,2,\cdots,n+2$,图中阴影所示的小平行四边形4边所在的4条直线分别交 $B'C'$ 于 i,j,k,l,记

$$A=\{\text{边不平行于 } BC \text{ 的小平行四边形}\},$$

$$B=\{(i,j,k,l)\mid 1\leqslant i<j<k<l\leqslant n+2\}.$$

现将小平行四边形的4条边延长且交 $B'C'$ 边于4点的过程定义为一个映射 $f: A\to B$.

易知 f 是一一映射,由 $|B|=C_{n+2}^4$ 知

$$|A|=C_{n+2}^4.$$

故得所有平行四边形的总数为 $3C_{n+2}^4$. □

6-2-3　差异分析

通过分析条件与结论之间的异同、并不断减少目标差来完成解题的策略,称为差异分析.在§4-1-4(P.155)及§4-2-2(P.189)中,我们曾从不同的角度解释过这种策略.例2-16(P.90),例3-9(P.128),例4-7(P.156),例4-10(P.162),例4-31(P.204),例4-32(P.205)是它的应用.使用这种策略通常要求:

(1) 通过分析题目的条件与结论中所出现的数量特征(如元素个数、字母的系数或指数等)、关系特征(如大于或等于、平行或垂直等)、位置特征等去寻找目标差.

(2) 题目一旦出现目标差就主动作出减少目标差的反应.

(3) 减少目标差的调节要一次又一次地发挥作用,使得目标差的减少能积累起来.

差异分析法是"综合—分析法"的一种特殊形式.运用"差异分析"解题可以同时回答"从何处下手"与"向何方前进"这两个基本问题,我们说,就从分析目标差入手,就向着减少目标差的方向前进.对

于一类恒等式或不等式证明题,这一策略常能奏效.

例6-8 证明 $\dfrac{\cos^2\theta}{\cot\dfrac{\theta}{2}-\tan\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{1}{4}\sin2\theta.$

讲解 首先分析求证式左、右两边间的差异,然后通过消除差异来完成证明.

项目	左边	右边	解决方案
角	$\dfrac{\theta}{2},\theta$	2θ	倍(或半)角公式
函数	正切、余切、余弦	正弦	化为弦函数
运算	商、差	积	分母化积后再化简

事先,也许我们并没有现成的解法,但我们已经有了方向,总可以作出一些减少目标差的反应.比如,先把左边的分母变为弦函数,并把角 $\dfrac{\theta}{2}$ 升为 θ,对这两个要求作出反应,自然想到公式

$$\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\tan\frac{\theta}{2},$$

因而

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta},$$

$$\cot\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta},$$

相减得

$$\text{左边}=\frac{\cos^2\theta}{\dfrac{2\cos\theta}{\sin\theta}}=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}\sin2\theta=\text{右边}.\ \square$$

可见,解决此题的关键是消除左边分母上所体现的目标差,剩下来的工作几乎是自动化的.

例6-9 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,若对于所有的正整数 n,都有

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}. \qquad ①$$

证明 $\{a_n\}$ 是等差数列.

[1994 年数学高考文科第(25)题]

讲解　为了证明$\{a_n\}$为等差数列,只须证$(1,a_1)$,$(n-1,a_{n-1})$,(n,a_n)3 点共线,写成表达式就是

$$\frac{a_n-a_1}{n-1}=\frac{a_{n-1}-a_1}{(n-1)-1}. \qquad ②$$

对比式②与式①的差异最显著的莫过于式①含部分和S_n,而式②只有通项,这导致我们去找S_n与a_n之间的联系

$$a_n=S_n-S_{n-1}.\ (n>1)$$

当$n>2$时,把已知条件代入,可得

$$a_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}-\frac{(n-1)(a_1+a_{n-1})}{2}$$
$$=\frac{a_1+na_n-(n-1)a_{n-1}}{2}.$$

变形　$$(n-2)(a_n-a_1)=(n-1)(a_{n-1}-a_1). \qquad ③$$

化成比例并递推,得

$$\frac{a_n-a_1}{n-1}=\frac{a_{n-1}-a_1}{n-2}$$
$$=\cdots\cdots$$
$$=\frac{a_3-a_1}{2}$$
$$=\frac{a_2-a_1}{1}.$$

得　$$a_n=a_1+(n-1)(a_2-a_1).\ \square$$

于是,通过差异分析,我们找到了一个新颖的解法.

例 6－10　正数a,b,c,A,B,C满足条件

$$a+A=b+B=c+C=k.$$

求证　$aB+bC+cA<k^2.$　①

讲解　这个不等式左、右两边的差异主要有两个:

(1) 左边是 3 项之和,右边只有 1 项,从运算上作出反应应该让其出现公因式或同类项以便合并.

(2) 左边的字母右边不出现，右边的字母左边不出现．这个差异比上一个差异更显著，更需首先解决．但是，把 k 换成

$$k=a+A,$$
$$k=b+B,$$
$$k=c+C$$

中的一个或两个都不能保持左右两边字母的完全一致．对此，有两种处理方式．

1) 对不等式①两边乘以 k，则 k^3 可出现全部 a,A,b,B,c,C．

$$\begin{aligned}k^3&=(a+A)(b+B)(c+C)\\&=aB(c+C)+bC(a+A)+cA(b+B)+abc+ABC\\&=(aB+bC+cA)k+abc+ABC\\&>(aB+bC+cA)k,\end{aligned}$$

得 $$aB+bC+cA<k^2. \square$$

2) 保持部分一致，寻找解决途径．要证

$$aB+bC+cA<k(a+A),$$

由于 $$aB<ak,$$

故只须 $$bC+cA\leqslant kA=(c+C)A,$$

只须证 $$b\leqslant A.$$

但是，已知条件不能推出 $b\leqslant A$．怎么办？

不要忘了，把 k 表示为 $a+A$ 其实是有任意性的，可以换成 $b+B$ 或 $c+C$，因而，把 a,A,b,B,c,C 中的最大者记为 A，则 $b\leqslant A$ 是可以成立的，因而，有下面的证法：

记 a,A,b,B,c,C 中最大者为 A，则

$$aB<ak,$$
$$bC+cA\leqslant AC+cA=Ak,$$

相加 $$aB+bC+cA<(a+A)k=k^2. \square$$

这里的差异分析与例 4－38(P.226)的改进解法殊途同归．

例 6－11 设 $(3x-1)^6=a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，求 $a_6+a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0$．

[1985年数学高考第二(4)题]

讲解 将已知与所求并列

$$a_6x^6+a_5x^5+\cdots+a_1x+a_0=(3x-1)^6,$$
$$a_6+\quad a_5+\cdots+\quad a_1+\quad a_0=?$$

可见,已知条件出现 x,而所求结论没有 x,消除差异的办法是取

$$x^6=1,x^5=1,\cdots,x=1.$$

即令 $x=1$,从而

$$a_6+a_5+\cdots+a_1+a_0=(3-1)^6=2^6. \square$$

从差异分析的观点来看这道题,取 $x=1$ 就不是个别孤立的一招一式,而是顺理成章的逻辑必然和通理通法的具体行动.

6-2-4 分合并用

分与合是一种辩证关系,在解题中以分求合,以合制分,分合并用体现了转化统一、相反相成的辩证思想.中学立体几何中求三棱锥体积公式是这一策略的具体应用.求曲边梯形面积的定积分方法更是一与多、分与合、直与曲、有限与无限、离散与连续等辩证关系的综合应用.在例2-2(P.47)、例4-16(P.174)已见过分合并用.

1. 区分种种情况

有的题目,其种种可能是可以穷举的,将其一一解决然后归纳出总体完成,这就是归纳法或穷举法.

考虑到完成解题目标 P_1 的各种可能,然后试验它们,排除那些不合适的选择(试错),将问题变更为另一个解题目标 P_2;重复这一过程直到最后解决.比如平面几何证题的分析法,就属于这种区分.

分类,当数学黑箱过于复杂时,可以采用分割为若干小黑箱逐步破译的办法,即把具有共同性质的部分合为一类,形成数学上很有特色的方法——划分或分类,不会正确地分类就谈不到掌握数学.

还可以列举区分情况的更多方面,我们将其总结为3个基本形式.

(1) 辐射式的区分

这是一种逻辑上的划分，要求不重不漏.通常划分出来的几种情况，需用不同的方法加以解决(否则合并成一类).

例6－12　凸六边形的各对角线相交，无3线共点，则边与对角线可组成多少个三角形?

解　先作几何结构的分析，然后按几何结构上的不同分成4类分别计算.

三角形由不共线3点完全确定，而这3个点或为凸六边形的顶点或为对角线的交点，直接从图6－8中数数(shūshù)很容易重复或遗漏.我们按三角形包含凸六边形顶点的个数来分类.设对角线的交点为$B_t(1\leqslant i\leqslant 15)$.

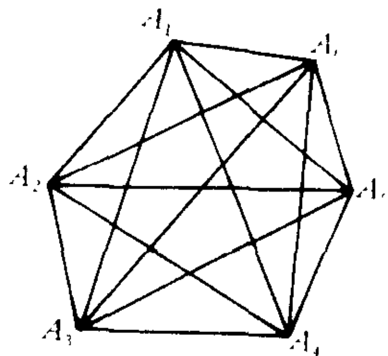


图6－8

1) 3个顶点组成的三角形(如图6－9)，有

$$\triangle_3=C_6^3(个).$$

2) 2个顶点、1个交点组成的三角形(如图6－10).

因为每取4点A_i,A_j,A_k,A_l，确定一个交点B_t，反过来，每一个交点B_t对应着4个顶点，从而四边形$A_iA_jA_kA_l$产生4个这类三角形.共有

$$\triangle_2=4C_6^4(个).$$

3) 1个顶点、2个交点组成的三角形(如图6－11).

因为每取5点A_i,A_j,A_k,A_l,A_s可确定其对角线的两个交点B_m,B_n；反之，同一对角线上的两点对应着5个顶点，从而五边形$A_iA_jA_kA_lA_s$产生5个这类三角形，共有

$$\triangle_1=5C_6^5(个).$$

4) 3个交点组成的三角形(如图6－12).

这样的三角形与6个顶点构成一一对应，共有

$$\triangle_0=C_6^6(个).$$

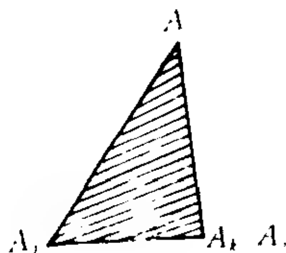


图6 9

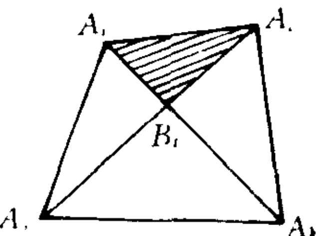


图6－10

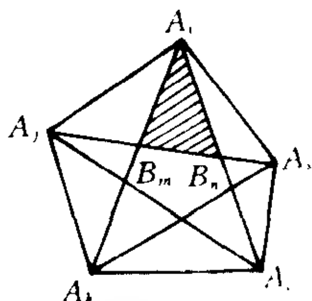


图6 11

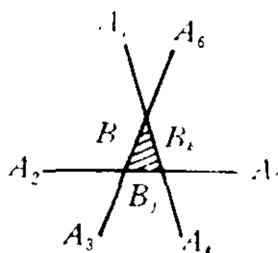


图6－12

将上述4类数字求和可得

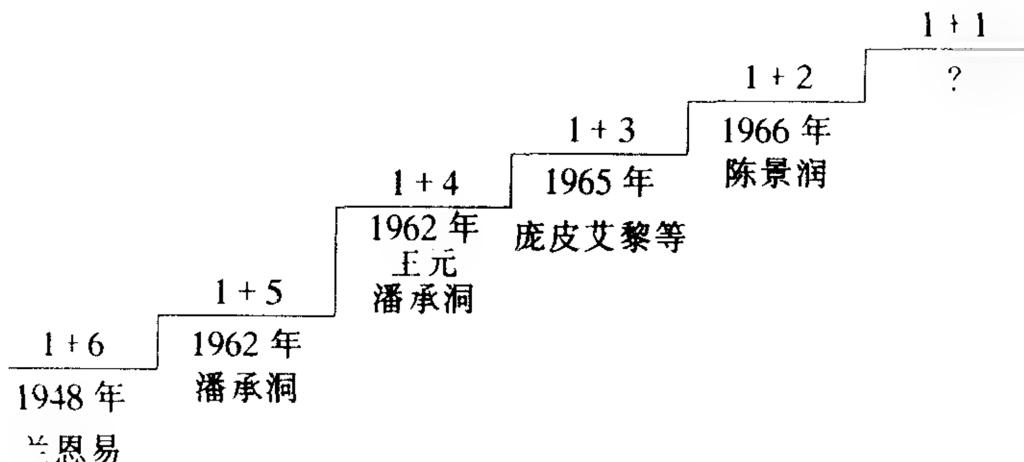
$$
\begin{aligned}
N &= \triangle_3 + \triangle_2 + \triangle_1 + \triangle_0 \\
&= C_6^3 + 4C_6^4 + 5C_6^5 + C_6^6 \\
&= 20 + 60 + 30 + 1 \\
&= 111(\text{个}). \ \square
\end{aligned}
$$

一般地，凸 n 边形时结论为

$$N = C_n^3 + 4C_n^4 + 5C_n^5 + C_n^6(\text{个}).$$

(2) 爬坡式的程序

把一个问题的解决分阶段安排成一些小目标系列，使得一旦证明了前面的问题，便可用来解决后面的情况，称为爬坡式的程序，或膨胀式的区分．哥德巴赫猜想的发展历程就是这样的区分：



首先，把一个足够大的偶数表示为“1个素数＋1个合数”，然后一步一步缩小合数的素因子个数，如今离“1＋1”仅一步之遥，难度也

特别大.

证明“面积相等则剖分相等”定理、证明“在周长一定的简单闭曲线的集合中,圆的面积最大”定理也都用了这种爬坡式的程序[①].

例 6-13 设 $f(x)$是定义在 R 上的单调函数,满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y). \quad ①$$

求证

$$f(x)=f(1)x,\ x\in \mathbf{R}. \quad ②$$

证明 由已知有

$$\begin{aligned} f(nx) &= f(x)+f[(n-1)x] \\ &= f(x)+f(x)+\cdots+f(x). \end{aligned} \quad ③$$

1) 当 x 为正整数时.

在式③中令 $x=1$,得

$$f(n)=f(1)\cdot n.$$

这表明

$$f(x)=f(1)x, x\in \mathbf{N}_+.$$

2) 当 x 为整数时.

只须证 x 为非正整数时命题成立,首先由式①有

$$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0),$$

得

$$f(0)=0=f(1)\cdot 0.$$

其次,对 $x<0$,有 $-x>0$,由已知得

$$0=f(x-x)=f(x)+f(-x),$$

得

$$\begin{aligned} f(x) &= -f(-x) \\ &= -f(1)(-x) \\ &= f(1)x. \end{aligned} \quad ④$$

综上所述,$f(x)=f(1)x, x\in \mathbf{Z}$.

3) x 为有理数时.

对 $x=\dfrac{n}{m}, m\in \mathbf{N}_+, n\in \mathbf{Z}$,由③有

$$mf\left(\frac{n}{m}\right)=f\left(\frac{n}{m}\right)+f\left(\frac{n}{m}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{m}\right)$$

---

① 分别见钱端壮. 几何基础,P.145;蔡宗熹. 等周问题,P.30.

$$= f\left(m \cdot \frac{n}{m}\right)$$
$$= f(n)$$
$$= f(1)n.$$

得 $$f\left(\frac{n}{m}\right) = f(1) \cdot \frac{n}{m}.$$

这表明，$f(x) = f(1)x, x \in Q$.

4) x 为实数时.

只须考虑 x 为无理数的情况，记 $\alpha_n, \beta_n \in Q$ 分别为 x 的不足近似值与过剩近似值. 有

$$\alpha_n < x < \beta_n,$$

且 $$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \lim_{n \to \infty} \beta_n = x.$$

由单调性知

$$f(\alpha_n) < f(x) < f(\beta_n) (\text{或 } f(\alpha_n) > f(x) > f(\beta_n)),$$

有 $f(1)\alpha_n < f(x) < f(1)\beta_n$（或 $f(1)\alpha_n > f(x) > f(1)\beta_n$），

取极限，有

$$f(1)x \leqslant f(x) \leqslant f(1)x (\text{或 } f(1)x \geqslant f(x) \geqslant f(1)x),$$

得 $$f(x) = f(1)x.$$

所以，对一切 $x \in R$ 均有

$$f(x) = f(1)x. \square$$

这是由正整数到整数、有理数、实数"一路爬坡".

(3) 回归式的区分

把一个问题分成几个子问题 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之后，A_1 的解决为后面问题的解决提供了基础，使 $A_k(1 < k \leqslant n)$ 的解决可转化为 A_1 的情况. 这里的 A_1 具有引理的作用. 在证明圆周角定理时，我们将问题的外延分为 3 种情况：

A_1：圆心在圆周角的某一边上；

A_2：圆心在圆周角的内部；

A_3：圆心在圆周角的外部.

其中 A_1 的证明较简单，而 A_2，A_3 则转化为 A_1 的和或差. 也就是将 A_2，A_3 回归为 A_1 的解决.

例 6－14 在单位正方形的周界上任意两点之间连一曲线，如果它把正方形分成两个面积相等的部分，试证这个曲线段的长度不小于 1.

[1979 年全国高中数学联赛题]①

证明 设 M，N 是正方形周界上的两点，则这两点的位置有多种可能，应用二分法可得出 3 种情况.

1) M，N 位于正方形的一组对边上(如图 6－13).

由于两点间的线段最短，而垂线长不大于斜线长，故有

$$\overset{\frown}{MN} \geqslant MN \geqslant M'N = 1.$$

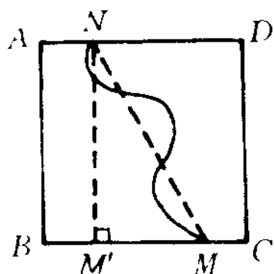


图 6－13

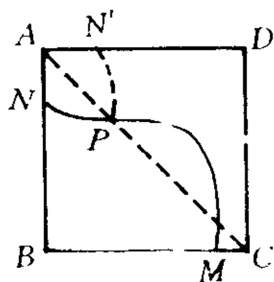
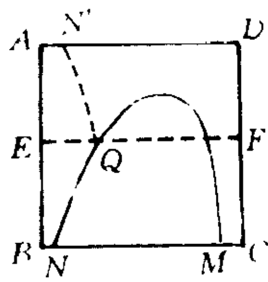


图 6－14



6－15

这一情况非常简单，甚至还没有用“平分面积”的条件.

2) M，N 位于正方形的一组邻边上(如图 6－14).

连对角线 AC，由于曲线 $\overset{\frown}{MN}$ 把正方形的面积二等分，所以 $\overset{\frown}{MN}$ 与 AC 必有公共点，特别地 $\overset{\frown}{MN}$ 来说还可以与 AC 重合，这时命题显然成立. 现设 N 与 A 不重合，在 AC 上取离 A 最近的那个公共点 P，作曲线 $\overset{\frown}{NP}$ 关于 AC 的对称曲线 $\overset{\frown}{N'P}$，则 N' 在 AD 上，对曲线 $\overset{\frown}{MN'}$ 已

---

① 此竞赛题源于波利亚问题：两端点在定圆周上，并且将此圆分成面积相等的两部分的曲线中，以该圆的直径为最短.

是第 1 种情况了. 有

$$\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{MN'}\geqslant 1.$$

3) M,N 位于正方形的同一边上(如图 6 - 15).

连 AB,CD 的中点 E,F,由于曲线$\overset{\frown}{MN}$把正方形的面积二等分,所以$\overset{\frown}{MN}$与 EF 必有公共点. 在 EF 上取离 E 最近的那个公共点 Q,作曲线$\overset{\frown}{NQ}$关于 EF 的对称曲线$\overset{\frown}{N'Q}$,则 N' 在 AD 上,对曲线 MN' 已是第 1)种情况了. 有

$$\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{MN'}\geqslant 1.$$

这里既有分类思想、引理思想、化归思想,又有对称变换的技术. 区分情况具"有效增设"的功能,参见§6－2－9.

2. 整体考虑

这是一种以合制分、着眼于全局的思考,它与分解问题的条件或结论,从而各个击破相反,尽量将各个条件集中、各个结论集中,使得能够全面地、四通八达地建立条件与结论的有机联系,摆脱局部细节上一时难以弄清的关系的纠缠. 解题中的整体把握,可以少走弯路或跳过常规的步骤,使解法简洁明快,从系统方法论的观点看来,这是整体原理对解题的指导(§4 - 1 - 6,P. 171). 例 4 - 14,例 4 - 15,例 4 - 16 及习题四第 25 题的解法 1(P. 254)中,如果有什么能给人留下深刻印象的话,那就是整体考虑.

例 6 - 15　有两个同心圆盘,各分成 n 个相等的小格,外盘固定,内盘可以转动,内外两盘小格上分别填有实数

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,$$
$$b_1,b_2,\cdots,b_n.$$

且满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_n<0,$$
$$b_1+b_2+\cdots+b_n<0.$$

证明　可将内盘转动到一个适当位置,使两个盘的小格对齐,这时,两个盘 n 个对应小格内数字乘积的和为一正数.

讲解　这样的"乘积的和"有 n 个:

$$A_1=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{n-1}b_{n-1}+a_nb_n,$$
$$A_2=a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_{n-1}b_n+a_nb_1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$A_n=a_1b_n+a_2b_1+\cdots+a_{n-1}b_{n-2}+a_nb_{n-1}.$$

从局部上看,哪一个 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 我们都无法确定其为正数.若求和作整体处理,则有

$$A_1+A_2+\cdots+A_n$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)>0.$$

因而一定存在一个 $i(1\leqslant i\leqslant n)$,使 $A_i>0$.证得命题成立.□

这是着眼于整体性质,从而得出局部性质.若用反证法,假设一切 $A_i\leqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$,相加,得

$$0\geqslant A_1+A_2+\cdots+A_n$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)>0.$$

矛盾.这是从整体考虑上去构成矛盾,叫做整体归谬(本例见于习题四第5题,P.245).

例6-16 设集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$,对于 S 的每个非空子集 S_i,定义它的"权"为 S_i 的所有元素之和,那么 S 的全体非空子集的"权"的算术平均数是多少?

解 显然 S 的非空子集有 2^n-1 个,为了求出"权"的算术平均数,关键是求出所有子集的所有元素之和.作整体考虑.S 中每个元素在全体非空子集中出现的次数都相等,这个次数就是"$n-1$ 个元素"的全体子集的个数 2^{n-1}.因此,所求的算术平均数为

$$\frac{(1+2+\cdots+n)2^{n-1}}{2^n-1}=\frac{n(n+1)2^{n-2}}{2^n-1}.\ \square$$

例6-17 凸 k 边形内部(不包括边界)任意放置 n 个点,在这些点之间以及这些点与凸 k 边形的顶点之间用线段连接起来,要使这些线段互不相交而又把原凸 k 边形分割为不重叠的小三角形块.求一共分成多少个小三角形?

解 设分成了 x 个三角形,一方面其内角和为 $180^\circ x$;另一方

面，区域内的每一个点对应着一个周角 360°，共有 $n\cdot 360^\circ$，而 k 边形本身内角和为 $(k-2)180^\circ$，故有

$$180^\circ x = 360^\circ n + (k-2)180^\circ,$$

得

$$x = 2n + (k-2). \square$$

这正是习题四第 25 题(P.254)的一个推广.

6-2-5　进退互化

向前推进是人们认识事物的自然趋向，数学知识的发展和命题序列的形成无一不是一个前进的过程.但是，这种趋势和进程又是不平坦的，有时候要以退求进，有时候要先进后退，恰当运用进退的互化正是辩证思维的一条重要策略.具体到一个数学问题，如果直接下手有困难，就应转而去考虑一个更特殊的问题，或一个更普遍的问题.

1. 推进到一般

从考虑一个对象过渡到考虑包含该对象的一个集合，或者从考虑一个较小的集合过渡到考虑一个包含该较小集合的更大集合[1]，叫做推进到一般.比如说，把维数较低或抽象水平较低的有关问题转化为维数较多、抽象水平较高、整体性较强的问题，通过对整体性质或本质关系的考察，而使原问题获得解决.

离散问题可以一般化用连续手段处理(例 4-19，P.178)，有限问题可以一般化用数学归纳法处理，由于特殊情况往往涉及一些无关宏旨的枝节而掩盖了问题的关键，一般情况却更明确地表达了问题的本质.波利亚说："雄心大的计划，成功的希望也较大.这看起来矛盾.但当从一个问题过渡到另一个，我们常常看到，新的雄心大的问题比原问题更容易掌握.较多的问题可能比只有一个问题更容易回答，较复杂的定理可能更容易证明，较普遍的问题可能更容易解

[1] 见参见文献[27]波利亚.怎样解题，P.107 普遍化.

决."[1](例2-3中,从空间看平面,看得更清楚)

希尔伯特也说过,在解决一个数学问题时,如果我们没有获得成功,原因常常在于我们没有认识到更一般的观点,即眼下要解决的问题不过是一连串有关问题的一个环节.

在例2-3(P.55)中,通过立体来看平面图形体现了推进到一般的思想(习题四第25题解法3也同样体现),例5-3(P.275)上动加强命题也体现了推进到一般的思想.在解题中,构造函数,数字字母化(如例4-19),递推等都是这一策略的表现.

例6-18 1984个点分布在一个圆的圆周上,每个点标上+1或-1,一个点称为"好点",如果从这点开始,依任一方向绕圆周前进到任何一点时,所经过的各数的和都是正数.

证明 如果标有-1的点不多于661个,则圆周上至少有一个好点.

讲解 这个题目的意思是说,标有-1的点足够少时,"好点"一定存在.其中的数量刻划(即1984与661的关系)是不清楚的,将661一般化为n,则1984可一般化为$3n+1$.这就得出一个数量的刻划:标有-1的点不超过总数的$\frac{1}{3}$时,"好点"一定存在.

我们来证明更一般性的结论,在$3n+1$个点中有n个-1点时,好点一定存在.

$n=1$时显然成立.现假设$n=k$时命题成立,对$n=k+1$,我们任取一个-1点A,在它的两边各有一个距它最近的+1点B,C,将这3个点一齐去掉,在剩下的$3k+1$个点中有k个-1,由归纳假设知必有一个好点P存在.现将A,B,C 3点放回原处,因为P是+1,而且在前进中一定是先遇到添回的+1点(B或C),然后才遇到添回的-1点A,故P仍是好点.

由数学归纳法知,更一般性的结论成立,取$n=661$,当然也成

---

[1] 见参考文献[27]波利亚.怎样解题,P.121,发明家的矛盾.

立. □

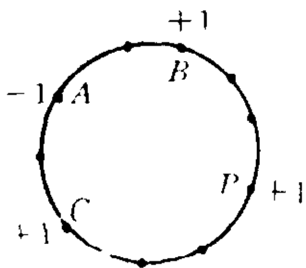


图6 16

这里是先进后退,进使得能够使用数学归纳法这个有力的工具,而归纳假设提供了一个好点(P)使问题的证明变得容易.

例6-19　求和 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^k}$.

解　将离散问题一般化为连续问题,考虑

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}k^2x^k.$$

这使得我们可以使用微积分的方法. 对

$$\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\quad(x\neq1)$$

两边求导

$$\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

两边乘以 x 后再求导,得

$$\sum_{k=1}^{n}k^2x^{k-1}=\frac{(1+x)-x^n(nx-n-1)^2-x^{n+1}}{(1-x)^3},$$

从而
$$f(x)=\frac{x(1+x)-x^{n+1}(nx-n-1)^2-x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

令 $x=\frac{1}{2}$,得

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^k}=6-\frac{n^2+4n+6}{2^n}.$$ □

例6-20　如图6-17,平面上有3个圆,其中每一对圆的两条外公切线都有一个交点,试证明这样得到的3个点位于同一直线上.

证明　代替平面上画的3个圆,我们设想为3个球,代替公切线,我们设想为用圆锥去把每一对球裹住. 于是,这3个圆锥的顶点都位于同一平面 α 上. 今在3个球的上面再放一个平面 β,则 β 与3个球相切,从而 β 与3个圆锥都相切,进而也一定包含3个圆锥的顶点. 于是这3个圆锥的顶点便同时位于两个平面 α,β 上,即在两平

面的交线上.

观察我们所构想的立体图形在平面 α 上的正投影,便得到了原问题的解. □

连结3个圆心组成一个三角形,再应用梅涅劳斯定理,可得平面几何证法.

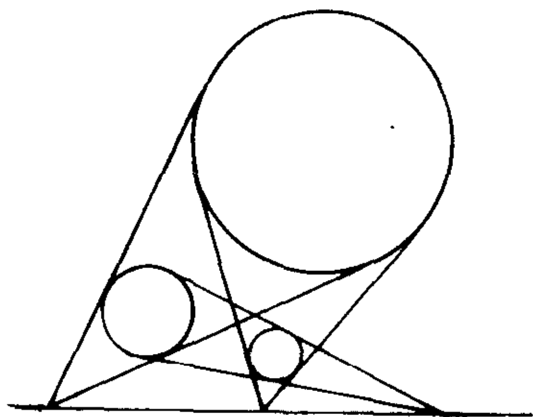


图 6-17

例6-21 比较 $\sqrt[3]{60}$ 与 $2+\sqrt[3]{7}$ 的大小.

解 数字一般化为字母,考虑函数

$$f(x)=\sqrt[3]{x}\quad(x\geqslant 0),$$

易知为凸函数,有

$$f(x)+f(y)\leqslant 2f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

取 $x=8,y=7$,得

$$2+\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{7}\leqslant 2\sqrt[3]{\frac{8+7}{2}}=\sqrt[3]{60}.\ \square$$

2. 以退求进

虽然进退不能割裂、进而有退,退不忘进,但对解题思路的发现而言,退比进更为重要.华罗庚教授说过,解题时先足够地退,退到我们最易看清楚问题的地方,认透了,钻深了,然而再上去.他认为,善于“退”,足够地“退”,退到原始而不失去重要性的地方,这是学好数学的一个诀窍.

退,可以从一般退到特殊、从复杂退到简单、从抽象退到具体、从整体退到部分、从较强的结论退到较弱的结论,从高维退到低维,退到保持特征的最简单情况、退到最小独立完全系,先解决简单的情况、先处理特殊的对象,再归纳、联想、发现一般性.取值、极端、特殊化、由试验而归纳等都是以退求进的表现.

明智的退有3个基本功能:

(1) 提示解题方向

有的题目其结论是不明确的(如定值问题),经过"退"(取特殊数值、特殊位置、特殊结构)可以找到结论应是什么(定值的具体数字或表达式),下来的证明就有目标了.抓住了解题的前进方向,是解题的重大进展(例4-30,P.202;例6-22).

(2) 寻找解题途径

问题经过"退"之后,简单了,特殊了,完成起来就容易了.然后,简单情况的处理可能呈现着复杂问题的解决方案,特殊情况的完成可能提供了一般情况的类比基础.一个关于自然数的命题,对 $n=1,2,3$ 解决了,对任意的 n 有时也可以同样解决(例6-23、例6-24).

(3) 直接解答问题

很多数学习题,其实是某个(些)结论的特例.并且,我们可以不失一般性地认为,所有习题的"结论"都必定是"已知"的必要条件.而得出这些"特例"或"必要条件",常常就是一个"退"的过程,一个简单化、特殊化、限定或取值的过程(例1-16,P.32;例6-11,例6-25).在求解选择题、填空题时,取特殊值是一个重要的方法(参见§6-3-2,§6-3-3).

例6-22 如图6-18,弦 AB,CD 相交于 M,且 $AB\perp CD$,求证 $AM^2+BM^2+CM^2+DM^2$ 等于定值.

讲解 由于定值还不知道是什么,解题的方向并不明确.所以,我们先取一个特殊位置.令 M 为圆心,则 $AM=BM=CM=DM=R$.从而定值为 $4R^2$.令 $AC\to 0$ 也有同样效果.下面证题就有方向了.

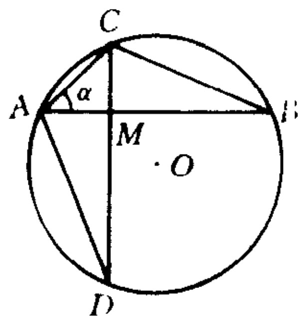


图6-18

设 $\angle CAB=\alpha$,则在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ACD$ 中,由正弦定理有

$$BC^2=4R^2\sin^2\alpha,$$

$$AD^2=4R^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=4R^2\cos^2\alpha.$$

得

$$\begin{aligned}&AM^2+BM^2+CM^2+DM^2\\&=(AM^2+DM^2)+(BM^2+CM^2)\\&=AD^2+BC^2\quad(\text{勾股定理})\\&=4R^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\\&=4R^2.\ \square\end{aligned}$$

这里退的主要作用是提示解题方向.

例 6-23 证明,当 $n>2$ 时,任意直角三角形的斜边长的 n 次幂大于直角边的 n 次幂之和.

[1908 年匈牙利竞赛题]

讲解 $n=3$ 时,$c^3=c^2\cdot c=(a^2+b^2)c=a^2c+b^2c>a^3+b^3$.

这里用到了勾股定理及 c 为最长边.

当 $n=4$ 时,$c^4=c^2\cdot c^2=(a^2+b^2)c^2=a^2c^2+b^2c^2>a^4+b^4$.

这种格式对 n 取具体数值的依赖是非实质的,它呈现了一般情况的解决方案:

$$\begin{aligned}c^n&=c^2c^{n-2}\\&=(a^2+b^2)c^{n-2}\\&=a^2c^{n-2}+b^2c^{n-2}\\&>a^n+b^n.\ \square\end{aligned}$$

例 6-24 有一个繁华的商场,一天之中接待的顾客数以千计,川流不息.如果商场有一个重要广告,想使所有的顾客都能听到,又已知当天任意的 3 个顾客中,至少有两个在商场里相遇.问商场至少广播几次,就能使这一天到过商场的所有顾客都能听到.

讲解 顾客人数为 $n=1,2$ 时,不能提供一般情况的启示,因为最本质的条件"任意 3 个顾客中,至少有两个在商场里相遇"没有用上.考虑 $n=3$.

当第一个顾客到来时,为了使广播的次数少一些,可以先不忙开广播,一直等到有人要离开商场时,则必须.可见第一次广播应开播

在第一个顾客将离而未离商场之时开始.

第一次开播时,第二、三位顾客可能到了也可能未到,考虑最坏的情况,他们还未进来或还未全进来.那么第二次开播应该在第三个顾客进来之后.

现在的问题是,第二个顾客会不会在第一个顾客离去之后才进来,而又在第三个顾客进来之前就离开,若这样,他就没有听到任何一次广播了.但这是不会发生的,根据"当天任意三个顾客中,至少有两个在商场里相遇",他一定会在第一个顾客离开之前进来,或在第三个顾客进来之后才离开,因此,他一定听到广播.

所以,广播两次就够了:第一次开播在第一个离去的顾客即将离开之时,第二次开播在最后一个顾客进来之时.

这个思路对任意的 $n\geqslant 3$ 都成立.设第一个离去的顾客为 A,最后一个进来的顾客为 B,若按上述方法广播两次之后,仍有顾客 C 没有听见,则 C 必在 A 离去之后才进来,且在 B 进来之前就离去,于是 C 与 A,B 均未相遇,当然更有 A,B 未相遇.矛盾于已知条件.所以,两次广播之后,全体顾客都听到了.

例 6-25　解函数方程

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y.$$

解　分别取 3 组特殊值

$$\begin{cases}x_1=0,\\ y_1=t;\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=\dfrac{\pi}{2}+t,\\ y_2=\dfrac{\pi}{2};\end{cases}\quad \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2},\\ y=\dfrac{\pi}{2}+t.\end{cases}$$

代入得

$$\begin{cases}f(t)+f(-t)=2f(0)\cos t, & ①\\ f(\pi+t)+f(t)=0, & ②\\ f(\pi+t)+f(-t)=2f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right). & ③\end{cases}$$

由①+②-③,得

$$f(t)=f(0)\cos t+f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t.$$

检验知所求的函数为①

$$f(x)=f(0)\cos x+f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x.\ \square$$

例6-26 两个边长为1的正方形，其中一个正方形的某顶点位于另一个正方形的中心 O，求两个正方形重叠部分的面积（图6-19）.

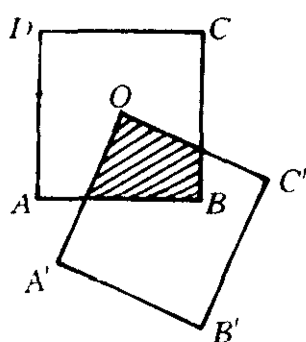
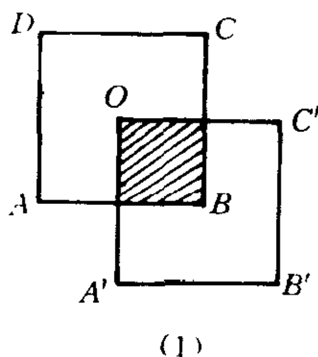


图 6-19



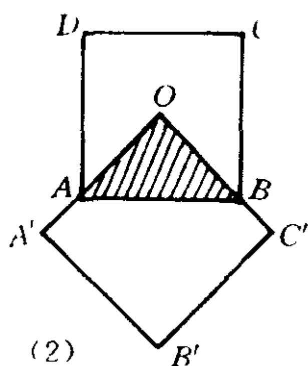


图 6-20

讲解 这个问题的常规处理是“退”，先考虑图6-20的特殊位置，可见，重叠部分的面积为 $\frac{1}{4}$. 然后“进”，运用三角形全等来解决.

虽然，“退”能够解决问题，但对本例而言，“进”比“退”更好，更能体现问题的实质，从而解决得更加漂亮.

更一般地，考虑过正方形中心 O 的两条互相垂直的直线 l_1, l_2，正方形被分成4部分 S_1, S_2, S_3, S_4（如图6-21）. 由于整个图形

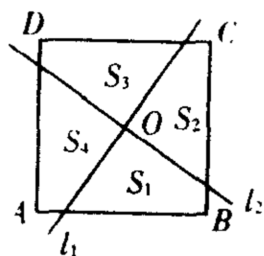


图 6-21

① 注意，解函数方程时，检验是必要步骤. 参见§7-2(P.484).

绕 O 点旋转 90° 时，所得到的图形与原图形重合，所以 $S_1=S_2$，$S_2=S_3$，$S_3=S_4$，$S_4=S_1$，即正方形被 l_1，l_2 分成全等的 4 部分，回到原题可知两个正方形重叠部分的面积为 $\frac{1}{4}$.

这个例子进退自如，反映了进与退的统一.

这一策略体现了特殊与一般的辩证统一，偶然与必然的辩证统一，个性与共性的辩证统一，具体与抽象的辩证统一，现象与本质的辩证统一.

6－2－6　正反相辅

解决数学问题时，大多是从条件出发，借助于一些具体的模式和方法，进行正面的、顺向的思考.这种思考在思维方向上具有定向性、层次性和聚合性，在思维内容上具有求同性和专注性，本书中的大量例子都是循着正向思维来解决的.强化这种思维定势，在数学解题中有着决定性的作用，这是必须首先认识到的.

然而，事物往往是互为因果的，具有双向性和可逆性的特征.如果正向思维受阻，那么，“顺难则逆、直难则曲、正难则反”，顺向推导有困难时就逆向推导，直接证明有困难时就间接证明，正面求解有困难时就反向逆找，探求问题的可能性有困难时就探求不可能性，等式证明从左到右不顺利时就从右到左.在具体应用中，分析法、逆推法、反证法、同一法、举反例、常量与变量的换位、公式定理的逆用、补集思想解题的技巧等都体现了逆向思考.这些思维方式具有的发散性、变通性是突破传统框架产生新思路的重要源泉.

“草船借箭”与“司马光砸缸”那传诵千古的魅力概源于逆向思维.三天造十万支箭是办不到的，但孔明压根就没去造，而是“借”；并且不是从朋友，而是从敌人那里借.这两点都是周瑜所“望尘莫及”的开放性思考.同样，司马光要从水缸中把人救出来（人离开水）是不可能的，但他的机智就在于逆向思维，让水离开人.

从“第五公设”的试证到“罗巴切夫斯基几何”的诞生，是“正反相

辅"策略用于解决数学问题的最辉煌也最悲壮的成功(§3-2-1).

例6-27 求证$\sqrt{2}$是无理数.

讲解 已知条件实在太空、太少,以至于正面推导一小步都"步履维艰".按照"正难则反"的策略,可设$\sqrt{2}$为有理数,则存在$a,b\in N_+$,$(a,b)=1$,使

$$\frac{a}{b}=\sqrt{2}. \tag{①}$$

这样,$\sqrt{2}$就具体了,可供使用的条件也增多了.

由①有 $\begin{cases}b<a<2b,\\a^2=2b^2;\end{cases}$

得 $$\sqrt{2}=\frac{a}{b}=\frac{2b}{a}=\frac{2b-a}{a-b}.$$

记 $\begin{cases}a_1=2b-a,\\b_1=a-b;\end{cases}$

则 $a_1,b_1\in N$,

$$a>a_1,\ b>b_1,$$

且 $$\sqrt{2}=\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}.$$

同理,可得无限个$a_i,b_i\in N_+(i=1,2,\cdots)$满足

$$a>a_1>a_2>\cdots,$$
$$b>b_1>b_2>\cdots,$$

且 $$\sqrt{2}=\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots.$$

但小于a(或b)的自然数只有有限个.矛盾,故$\sqrt{2}$为无理数. □

这里使用了无穷递降法,见§5-2-4;另一证法见§6-2-9.

例6-28 设$m\neq n$,$mn\neq 0$,$a>1$,

$$x=(a+\sqrt{a^2-1})^{\frac{2mn}{m-n}}.$$

求$(x^{\frac{1}{m}}+x^{\frac{1}{n}})^2-4a^2x^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$的值.

讲解 由已知有

$$x^{\frac{1}{m}}=(a+\sqrt{a^2-1})^{\frac{2n}{m-n}},$$

$$x^{\frac{1}{n}}=(a+\sqrt{a^2-1})^{\frac{2m}{m-n}},$$

相乘
$$x^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=(a+\sqrt{a^2-1})^{\frac{2(m+n)}{m-n}}.$$

代入求值式,数字繁多,运算复杂.若反过来,用 x 表示 a,则由已知

有
$$a+\sqrt{a^2-1}=x^{\frac{m-n}{2mn}},$$

$$a-\sqrt{a^2-1}=x^{\frac{n-m}{2mn}},$$

相加
$$2a=x^{\frac{m-n}{2mn}}+x^{\frac{n-m}{2mn}}.$$

得
$$4a^2x^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=(x^{\frac{m-n}{2mn}}+x^{\frac{n-m}{2mn}})^2x^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$$

$$=[(x^{\frac{m-n}{2mn}}+x^{\frac{n-m}{2mn}})x^{\frac{m+n}{2mn}}]^2$$

$$=(x^{\frac{1}{n}}+x^{\frac{1}{m}})^2.$$

故有
$$(x^{\frac{1}{m}}+x^{\frac{1}{n}})^2-4a^2x^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=0.\ \square$$

例 6－29　对满足不等式 $|\log_2 p|<2$ 的一切实数 p,求使不等式 $x^2+px+1>3x+p$ 都成立的 x 的取值范围.

讲解　由 $|\log_2 p|<2$,有

$$-2<\log_2 p<2,$$

得
$$\frac{1}{4}<p<4. \qquad ①$$

问题转化为在条件①中,求二次函数

$$f(x)=x^2+(p-3)x+(1-p)$$

为正值时,自变量的取值.这处理起来比较麻烦.

反过来,以 p 为主元,有

$$g(p)=(x-1)p+(x^2-3x+1),\ p\in\left(\frac{1}{4},4\right).$$

问题转化为关于 p 的一次函数为正数时系数的讨论.显然 $x\neq1$,因而,$g(p)$ 是 p 的单调函数,使

$$g(p)>0, p\in\left(\frac{1}{4},4\right)$$

成立的充要条件是

$$\begin{cases} g\left(\frac{1}{4}\right)\geqslant 0, \\ g(4)\geqslant 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \frac{x-1}{4}+(x^2-3x+1)\geqslant 0, \\ 4(x-1)+(x^2-3x+1)\geqslant 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 4x^2-11x+3\geqslant 0, \\ x^2+x-3\geqslant 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x\geqslant\frac{11+\sqrt{73}}{8} \text{ 或 } x\leqslant\frac{11-\sqrt{73}}{8}, \\ x\geqslant\frac{-1+\sqrt{13}}{2} \text{ 或 } x\leqslant\frac{-1-\sqrt{13}}{2}. \end{cases}$$

得

$$x\geqslant\frac{11+\sqrt{73}}{8} \text{ 或 } x\leqslant\frac{-1-\sqrt{13}}{2}. \square$$

例 6-30 解不等式

$$\sqrt{15+2x-x^2}\geqslant x-1.$$

讲解 正面求解需解两个不等式组

$$\begin{cases} 15+2x-x^2\geqslant 0, \\ x-1\geqslant 0, \\ 15+2x-x^2\geqslant(x-1)^2; \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} 15+2x-x^2\geqslant 0, \\ x-1<0. \end{cases}$$

反面的思考是,先解不等式$\sqrt{15+2x-x^2}<x-1$,即

$$\begin{cases} 15+2x-x^2\geqslant 0, \\ x-1>0, \\ 15+2x-x^2<(x-1)^2. \end{cases}$$

即
$$\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 5,\\ x>1,\\ x<1-2\sqrt{2}\text{或 }x>1+2\sqrt{2}.\end{cases}$$

得
$$1+2\sqrt{2}<x\leqslant 5.$$

再求不等式在存在域$[-3,5]$上的补集$[-3,1+2\sqrt{2}]$,此即为原不等式的解集. □

容易由圆与直线的位置看清这个不等式的几何实质.

例6-31　已知方程$ax^2-2(a-3)x+(a-2)=0$中的a为负整数,试求出那些使此方程的解x至少有一个为整数时a的值.

讲解　由a讨论x,就要研究方程的根
$$x=\frac{a-3\pm\sqrt{9-4a}}{a}.$$
这比较麻烦.若反过来,整理成a的一次方程
$$(x^2-2x+1)a+(6x-2)=0. \qquad ①$$
则由$x\neq 1,a\leqslant -1$,得
$$-(x^2-2x+1)+(6x-2)\geqslant(x^2-2x+1)a+(6x-2)=0,$$
即
$$x^2-8x+3\leqslant 0.$$
得
$$4-\sqrt{13}\leqslant x\leqslant 4+\sqrt{13}\text{且 }x\neq 1.$$

把x为2,3,4,5,6,7.分别代入①得,$x=2$时$a=-10$,$x=3$时,$a=-4$,$x=4,5,6,7$时a不为整数.所以,使方程的解x至少有一个为整数时a的值取-10或-4. □

由上面的例子可以看到,从问题的相反方向或否定形式出发,思考常能产生新的观念,它在正向思考受阻时,作用特别重大(当然,正向思考畅通时仍有重要作用).但是,不要忘了,无论是分析法、反证法、举反例,还是逆转结构、逆转运算、逆转主元、逆转角度等都是建立在正向思维方法的基础上的.它一方面是对正向思维的背逆,另一方面又离不开对正向思维的使用.所以,应该是“正反相辅”.注重整体性与联通性,把正向思考与逆向思考结合起来,把综合法与分析法结合起来,把论证与反例结合起来,把倒推和顺证结合起来.

这一策略反映了原因与结果的辩证统一,肯定与否定的辩证统一,有限与无限的辩证统一,证实与证伪的辩证统一.

6-2-7　动静转换

动和静是事物状态表现的两个侧面,它们相比较而存在,依情况而转化,动中有静,静中寓动.在数学解题中,可用动的观点来处理静的数量和形态,将常数看成是变数的取值,将静止状态看成运动过程的瞬间,表现为以动求静.也可以反过来,用一个字母代替无限的、变动的取值,用一条方程表示动点的轨迹,用一个函数表达或反映客观事物的相依关系,用一些不等式描述变量无穷变化的趋势(极限)等等,都是用静的方法来处理动的事物,表现为以静制动.变换法、局部调整法、递推法、初等变换、轨迹相交、定值探求以及不变量等,都体现了动静转换的策略.

1. 化静为动、以动求静

对静态的事物我们可以追寻形成静止状态以前的运动过程,或理解为运动过程的特殊位置与瞬息形态,使静态具有运动的活力.

例6-32　求与已知圆 $x^2+y^2-4x-8y+15=0$ 相切于点 $A(3,6)$ 且经过点 $B(5,6)$ 的圆的方程.

讲解　化静为动,视点 $A(3,6)$ 为圆

$$(x-3)^2+(y-6)^2-R^2 \quad ①$$

当 $R\to 0$ 时的极限状态.则过圆①与已知圆交点的圆系方程为

$$(x-3)^2+(y-6)^2-R^2+\lambda(x^2+y^2-4x-8y+15)=0. \quad ②$$

把 $B(5,6)$ 代入且令 $R=0$,得 $\lambda=-\frac{1}{2}$,代入②得所求的圆为

$$(x-3)^2+(y-6)^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2-4x-8y+15)=0.$$

整理得　$x^2+y^2-8x-16y+75=0$. □

例6-33　解不等式(见习题四第7题 P.245)

(1) $x^2+2x-8\leqslant 0$;

(2) $x^2+8x+15\geqslant 0$;

(3) $\sqrt{x^2-4x+8}+\sqrt{x^2+4x+8}\leqslant 6$.

解　(1)化静为动,设

$$x^2+2x-8=-y^2\leqslant 0.$$

得到一个平面上的轨迹方程——圆

$$(x+1)^2+y^2=3^2.$$

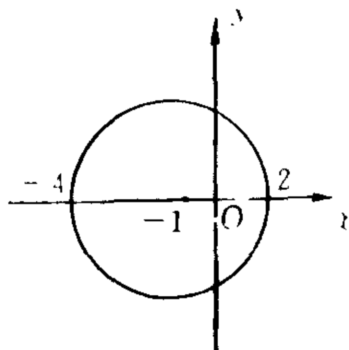


图6-22

如图6-22,对每一个 y 值,所对应的 x 均为原不等式的解.反之,原不等式的每一个解也都有 y 值与之对应.原不等式的解就是轨迹圆中 x 坐标的取值范围

$$[-4,2].\ \square$$

(2) 化静为动,设

$$x^2+8x+15=y^2\geqslant 0.$$

得一平面上的轨迹方程——双曲线

$$(x+4)^2-y^2=1.$$

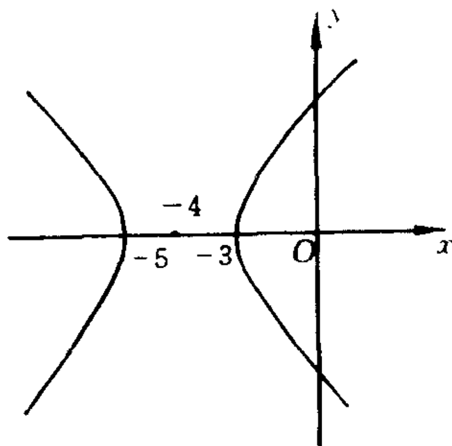


图6-23

如图6-23,双曲线上 x 坐标的取值范围即为原不等式的解集

$$x\leqslant -5 \text{ 或 } x\geqslant -3.\ \square$$

(3) 原式即

$$\sqrt{(x-2)^2+2^2}+\sqrt{(x+2)^2+2^2}\leqslant 6.$$

化静为动,得到一个平面区域

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}\leqslant 6,$$

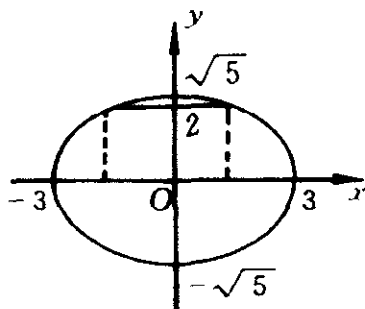


图6-24

如图6-24,这是一个 $a=3,c=2$ 的椭圆内部区域

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}\leqslant 1.$$

令 $y=2$,可得原不等式的解

$$-\frac{3\sqrt{5}}{5}\leqslant x\leqslant\frac{3\sqrt{5}}{5}.\ \square$$

例6－34 已知等边△ABC，在∠BAC内作线段AP，连BP，CP，求证

$$AP\leqslant BP+CP.$$

等号当且仅当A,B,C,P四点共圆时成立.(如图6－25)

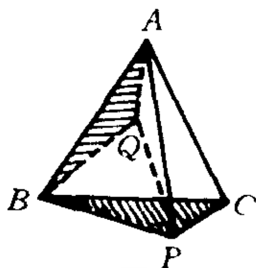


图6－25

讲解 用静止的观点看所求3条共点线间的大小，其关系比较隐蔽.但若将△BCP向内旋转60°，则C运动到A，相应的P运动到Q，$AQ=PC$，$BQ=BP=PQ$，则3条共点线段变为首尾相连的3条线段有

$$AP\leqslant PQ+AQ=BP+CP.$$

等号成立当且仅当A,Q,P三点共线⇔∠BAQ=∠BAP⇔∠BCP=∠BAP⇔A,B,C,P四点共圆. □

例6－35 设$ABCDEF$是凸六边形，满足

$$AB=BC=CD,DE=EF=FA,$$

$$\angle BCD=\angle EFA=60°.$$

设G和H是这六边形内部的两点，使得

$$\angle AGB=\angle DHE=120°.$$

试证

$$AG+GB+GH+DH+HE\geqslant CF.$$

[IMO_{36-5}]

讲解 首先要正确作图，一个比较方便的作法是先作筝形$ABDE$，然后向外作等边△AEF，等边△BCD(如图6－26).

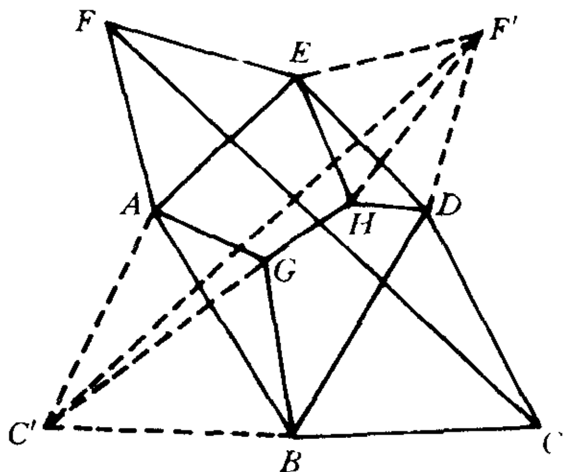


图6－26

静止看求证的不等式中的各条线段的大小是很隐蔽的.但由筝形

的对称性，将六边形以 BE 为轴作一对称图形时，得六边形 $AC'BDF'E$，有

$$C'F'=CF.$$

由于$\angle AGB=\angle DHE=120°$，所以 A,C',B,G 及 E,H,D,F' 均4点共圆．连 $C'G,F'H$，由上例知

$$C'G=AG+GB,$$

$$HF'=DH+HE;$$

从而

$$\begin{aligned}&AG+GB+GH+DH+HE\\=&C'G+GH+HF'\\\geqslant&C'F'=CF.\end{aligned}$$ □

2．以静制动、动静互换

运动和静止是相对的，运动的 A 相对于静止的 B，也可看成 B 动 A 静．此外，正如台风的中心是平静的一样，事物的运动中也会有一些稳定的状态，抓住这些不变的性质或不变量作为解题的突破口，常能收到出奇制胜之效．

例6－36　一个人在河里逆流游泳，在 A 处遗失了所携带的空水壶，他继续逆流游了20分钟才发觉水壶失落了，当即游回追寻，结果在距 A 下游2千米的 B 处找到，求河水流速．

分析　一种常规的思考是，设水流的速度为 x 千米/时、又人的游泳速度为 y 千米/时．人向上游20分钟，走了

$$\frac{20}{60}(y-x)(\text{千米}),$$

游回追上水壶所走的路程是

$$\frac{20}{60}(y-x)+2(\text{千米}),$$

游回追上水壶所用的时间是

$$\frac{\frac{20}{60}(y-x)+2}{x+y}(\text{小时}).$$

以水壶漂流2千米所用时间为等量关系，可得方程

$$\frac{20}{60}+\frac{\frac{20}{60}(y-x)+2}{x+y}=\frac{2}{x}.$$

即　　$xy=3y$,

但 $y\neq0$,得 $x=3$ 千米/时. □

这种处理比较繁冗,关键是没有处理好动静之间的转化.下面提供一个以静制动的解法.

解　先静止,假定人在静水里游泳,20 分钟后发现水壶失落,转身游回来取水壶,水壶应在原处,而人回来也还需 20 分钟,来回共需 40 分钟 $=\frac{2}{3}$ 小时.

再运动,由于水壶是动的,它随水而下,漂流了 2 千米,这 2 千米是在 40 分钟内完成的,故水流的速度为

$$V=2\div\frac{2}{3}=3(\text{千米/时}).\ \square$$

为了便于理解,可将河流设想为火车车厢,人在车厢这一头丢了水壶,走到另一头然后回来取.

例 6-37　静水中,船 A, B 的速度及其在某一时刻的位置如图 6-27,两船各以匀速 V_A 千米/时,V_B 千米/时沿直线航道(图中 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BQ}$ 方向)前进,找出当两船相距最近时,彼此之间的距离.

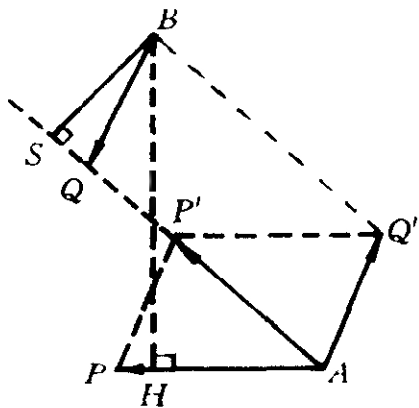


图 6-27

解　此即习题二第 3 题.先静止,假定船 B 不动,则 B 到 $\overrightarrow{AP}$ 的最短距离为 B 到 $\overrightarrow{AP}$ 的垂线 BH.

再考虑相对运动,对 B 船的运动,可以认为水以速度 $-\overrightarrow{BQ}$ 运动,于是船 A 所作的运动就成为 $\overrightarrow{AP'}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ'}$.由于 B 相对于

$\overrightarrow{AP'}$是静止的,因此答案就是过B所作的垂直于$\overrightarrow{AP'}$的垂线BS.□

例6-38 如图6-28(1),已知正$\triangle ABC$的边长为2,A点在x轴的正方向上移动,B点在$45°$角的终边上移动,求顶点C到原点的最大距离.

解 由相对运动的观点,把$\triangle ABC$看成是静止的,则坐标系是运动的,于是原点O为动点,其轨迹是以AB为弦、与点C在AB异侧的含$45°$圆周角的弓形弧(如图6-28(2)).

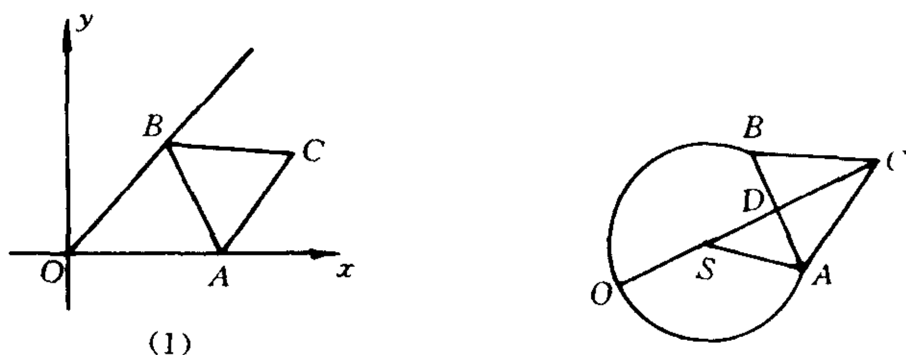


图6-28

记S为弓形弧的圆心,则CS垂直平分AB,且$\angle CSA=45°$.又

$$CD=\sqrt{3}, AD=DS=1, OS=SA=\sqrt{2}.$$

当O,S,C三点共线时,OC最大,为

$$OC=CD+DS+SO=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}.\ \square$$

例6-39 长轴长为$2a$,短轴长为$2b$的椭圆在第一象限内滚动,并始终与x,y轴分别相切,求该椭圆中心O'点的轨迹(如图6-29).

解 由运动的相对性,我们固定椭圆,则与之相切的两坐标轴是转动的.

建立坐标系$x'O'y'$,使椭圆方程为

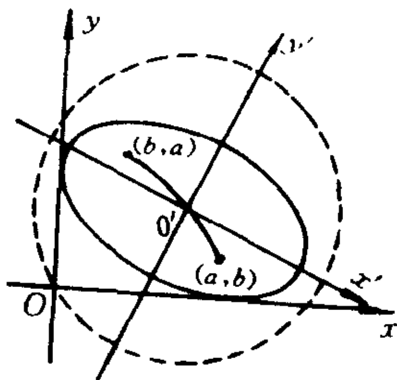


图6-29

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1. \qquad ①$$

又设点 O 在 $x'O'y'$ 坐标系上的坐标为 (x',y')，则 O 是椭圆①两垂直切线的交点，其轨迹为

$$x'^2+y'^2=a^2+b^2,$$

即
$$|OO'|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

这表明 O' 到 O 的距离为常数 $\sqrt{a^2+b^2}$，因而，在坐标系 xOy 上 O' 的轨迹为圆弧

$$x^2+y^2=a^2+b^2.$$

其中 $b\leqslant x\leqslant a$，$b\leqslant y\leqslant a$. □

例6－40 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是两个不全等的等腰直角三角形，$AB=BC$，$AD=DE$，现固定 $\triangle ABC$ 而将 $\triangle ADE$ 绕 A 点在平面上旋转. 试证，不论旋转到什么位置，线段 EC 上必存在点 M，使 $\triangle BMD$ 为等腰直角三角形（如图 6－30）.

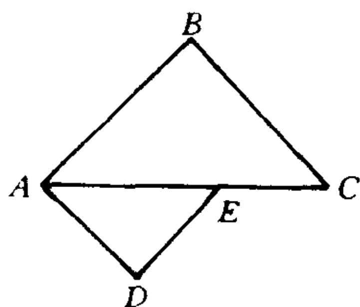


图 6－30

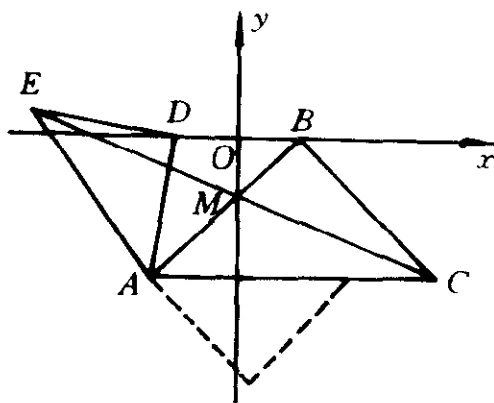


图 6－31

证明 由于 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 不全等，所以不管 $\triangle ADE$ 转到什么位置上，B 与 D 都不重合. 我们以静制动，设 B，D 所对应的复数为实轴上的一对相反数，

$$B=a,D=-a\ (a\neq 0,a\in \mathrm{R}).$$

在复平面上，其余的点，就用该点的字母表示该点的复数，如图 6－

31,有

$$E-D=(A-D)(-i),$$

$$C-B=(A-B)i,$$

即
$$E+a=(A+a)(-i),$$

$$C-a=(A-a)i,$$

相加得
$$E+C=-2ai.$$

故存在 EC 的中点

$$M=\frac{E+C}{2}=-ai$$

与 $B=a, D=-a$ 组成等腰直角三角形. □

例6-41 如图6-32,已知两个半圆,大圆的弦 AB 与小圆相切,且 $AB/\!/CD, AB=24$,求圆中阴影部分的面积.

讲解 已知的两个半圆都未给出半径,求阴影部分面积似乎条件不足.

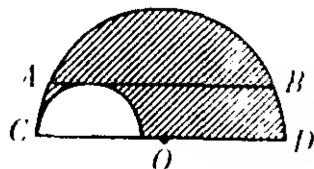


图6-32

设大圆半径为 R,小圆半径为 r,则 $S_{阴}=\frac{\pi}{2}(R^2-r^2)$.关键是要找出 R, r 与 AB 的关系,为此,我们移动小半圆,使与大半圆成同心圆.

这时图形更有规则了,但 R, r 与 AB 的关系仍是隐蔽的,为了揭示这个关系,我们将 r 收缩为0,则 AB 变为 CD,阴影的面积便为

$$S_{阴}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{AB}{2}\right)^2, \tag{①}$$

与
$$S_{阴}=\frac{\pi}{2}(R^2-r^2),$$

比较应有
$$R^2-r^2=\left(\frac{AB}{2}\right)^2. \tag{②}$$

这启示我们在图6-33中,过 O 作 $OE\perp AB$,并连结 OA,在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中,有②式成立,从而可得出①式的结果.

这样,我们化静为动找到了一条思路,再仔细一想,作 $OE\perp AB$,并连结 OA,其实与小半圆的位置无关,回到图6-32,我们依然

可以作 $OE\perp AB$(依然可以将 r 收缩为0),同样完成求解,这就又以静制动,体现了动与静的辩证统一.

解 作 $OE\perp AB$,垂足为 E,连 OA,则 $AE=\dfrac{AB}{2}$,有

$$
\begin{aligned}
S_{阴}&=\frac{1}{2}\cdot\pi(OA)^2-\frac{1}{2}\pi\cdot(OE)^2\\
&=\frac{\pi}{2}[(OA)^2-(OE)^2]\\
&=\frac{\pi}{2}\cdot AE^2\\
&=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{AB}{2}\right)^2\\
&=72\pi(面积单位).\ \square
\end{aligned}
$$

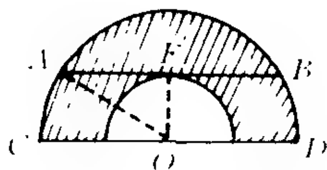


图6-33

6-2-8 数形结合

数和形是初等数学中被研究得最多的对象,数形结合是一种极富数学特点的信息转换,数学上总是用数的抽象性质来说明形象的事实,同时又用图形的性质来说明数的事实.数形结合是一个重要的数学思想和一柄双刃的解题利剑.

正确使用数形结合要注意等价性、双向性与简单性.

等价性原则:是指代数性质与几何性质的转换应该是等价的,否则解题会出现漏洞.有时,由于图形的局限性,不能完整地表现数的一般性,这时的图形性质只是一种直观而显浅的说明,但它同时也是抽象而严格证明的诱导.

会不会进行数式信息与形象信息的转换,反映了数学能力;能不能保持信息转换的等价,反映了数学素质.

双向性原则:就是既进行几何直观的分析,又进行代数抽象的探索,两方面相辅相成,仅对代数问题进行几何分析是一种天真的误解.

应当指出,代数表达及其运算比起几何图形及其结构有着无与伦比的优越性,能克服几何直观方法的许多局限性.正因为如此,笛

卡儿创立了解析几何,用代数方法统一处理几何问题,成为现代数学的先驱,几何问题的代数化,这乃是数学的一大进步.我们说"数形结合"是发挥数与形的双重优越性,而不是用几何取代代数.

简单性原则:找到解题思路之后,至于用几何方法还是用代数方法、或者兼用两种方法来叙述,取决于哪种方法更加优美、更加简单、或更便于达到教学目的.而不是像一种流行的模式那样:代数问题用几何方法,几何问题用代数方法.

华罗庚教授说过:

数与形,本是相倚依,焉能分作两边飞;

数无形时少直觉,形少数时难入微;

数形结合百般好,隔离分家万事休;

切莫忘,几何代数统一体,永远联系切莫分离.

美国数学家斯蒂恩说:如果一个特定的问题可以被转化为一个图形,那么思想就整体地把握了问题,并且能创造性地思索问题的解法.

那么,怎样进行数形结合呢?有3个主要的途径.

第一、通过坐标系.

包括直角坐标系、极坐标系和复平面.

第二、转化

通过分析数式的结构,将 $a>0$ 与距离互化,将 $a^2(ab)$ 与面积互化,将 $a^3(abc)$ 与体积互化,将$\sqrt{a^2+b^2}$与勾股定理沟通,将 $a^2+b^2+ab=a^2+b^2-2|a||b|\cos\theta(\theta=60^\circ$ 或 $120^\circ)$与余弦定理沟通,将 $|a-b|<c$ 与三角形三边沟通.……

第三、构造.

可以构造几何模型,构造函数或构造一个图等.

在例1-5,例1-8,例4-12,例4-27,例4-28,例4-29,例4-33,例4-34,例4-35,例4-36,例4-38,例4-43,例5-30,例5-42,例5-44,例6-9,例6-21,例6-29,例6-33,例6-40,例6-74等处,已经多次见到数形结合.类比法、映射化归、坐标法、换

元法(特别是复数换元、三角换元等)、构造法等都能体现数形结合.

1. 由数到形、形数结合.

例6-42 已知正数 x,y,z 满足方程组

$$\begin{cases} x+y=13, & ① \\ y^2+z^2-yz=25, & ② \\ z^2+x^2+xz=144. & ③ \end{cases}$$

求 z.

分析 对式②、③的结构作分析,可转化为余弦定理(§5-3-2)

$$25=y^2+z^2-2yz\cos60°,$$

$$144=z^2+x^2-2xz\cos120°.$$

据此,我们可以构造几何图形来求解.

解 作 Rt△ABC,使 $AB=13$,$BC=12$,$AC=5$,在 AB 上取 D,使$\angle ADC=60°$.则 $BD=x$,$AD=y$,$CD=z$(如图 6-34).由面积关系

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD},$$

有

$$\frac{1}{2}BC\cdot AC$$

$$=\frac{1}{2}BD\cdot DC\sin120°+$$

$$\frac{1}{2}AD\cdot DC\sin60°$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}AB\cdot DC,$$

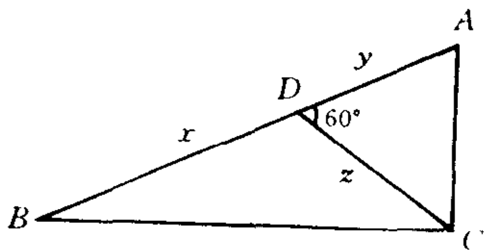


图 6-34

得

$$z=CD=\frac{2BC\cdot AC}{\sqrt{3}AB}=\frac{40\sqrt{3}}{13}.\ \square$$

例6-43 已知方程 $|x|=ax+1$ 有一个负根而且没有正根,那么 a 的取值范围是

A. $a>-1$ B. $a=1$ C. $a\geqslant1$ D. 非上述答案

[1987 年全国初中数学联赛题]

分析 直接的代数求解较复杂,第一步要找出有负根的范围,由

$$-x=ax+1,$$

有　　　$x=-\dfrac{1}{1+a}<0,$

得　　　$a>-1.$ ①

第二步是先找有正根时 a 的范围,然后求补集得出没有正根时 a 的范围.由 $x>0$ 时有

$$x=ax+1,$$

得　　　$x=\dfrac{1}{1-a}>0,$

有　　　$a<1.$

从而没有正根时 a 的范围为

$$a\geqslant 1. \quad ②$$

第三步,求①、②的交集,得 $a\geqslant 1$,选 C. □

这个过程是比较曲折的.而数形结合的思考则浅显而明了.

解　将问题转化为函数

$$y=|x|, \quad ③$$

$$y=ax+1, \quad ④$$

的交点在且只在第二象限.④是过点 $A(0,1)$ 的直线系,由图 6-35 知,当直线从 $y=x+1$ 开始,绕 A 点向 y 轴旋转时,与 $y=|x|$ 都只有交点在射线 OB 上,其余情况均有交点在第一象限.所以 a 的取值为$[1,+\infty)$.选 C. □

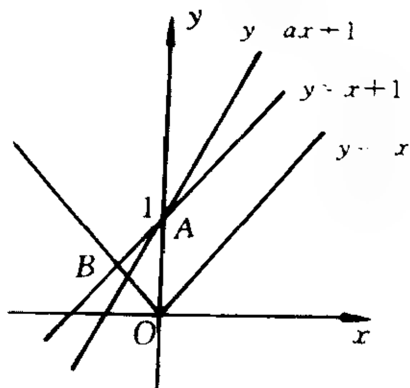


图 6-35

例 6-44　求和$\sum\limits_{k=1}^{n}k^2$.

解　作一个等边三角形,将各边 $n-1$ 等分,过分点作另两点的平行线,可以得到三角形上的交点

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}(\text{个}).$$

现把求和数摆到三角形各交点上,k^2 排在第 k 行的 k 个位置上,表示为 k 个 k 之和

$$k^2=k+k+\cdots+k.$$

旋转得出3个这样的三角形数阵(如图6-36),每一线段上的数字顺序成等差数列.再重叠起来,则每一个点上的数字和均为$(2n+1)$.总和便为

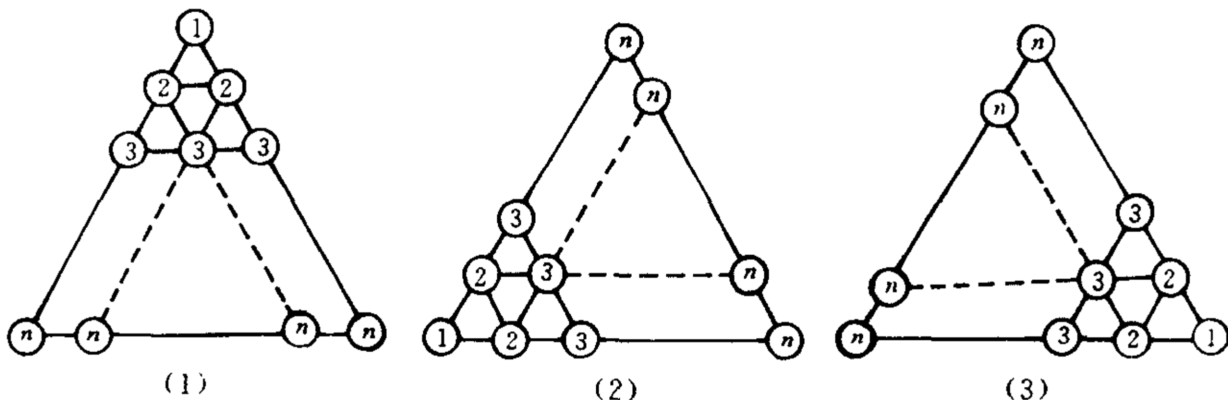


图6-36

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}k^2\\&=\frac{1}{3}\cdot(2n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\ \square\end{aligned}$$

例6-45 对$a,b,c,d,m\in\mathrm{R},m\neq-1$,且$(a-c)^2+(b-d)^2\neq0$,求证

$$\frac{|ad-bc|}{\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}}\leqslant\sqrt{\left(\frac{a+mc}{1+m}\right)^2+\left(\frac{b+md}{1+m}\right)^2}.$$

分析 在例5-41中我们曾用柯西不等式来证明,而柯西不等式的一个几何意义正是点到直线的垂线段最短,因此,有下面的几何解法.

证明 在坐标平面上取点$A(a,b),B(c,d)$,直线AB上的其他点为

$$M\left(\frac{a+mc}{1+m},\frac{b+md}{1+m}\right).$$

又与 AB 平行且过原点的直线为

$$l:(b-d)x-(a-c)y=0.$$

则 M 到 l 的距离不大于 OM，得

$$\frac{\left|(b-d)\left(\frac{a+mc}{1+m}\right)-(a-c)\left(\frac{b+md}{1+m}\right)\right|}{\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}}$$

$$\leqslant\sqrt{\left(\frac{a+mc}{1+m}\right)^2+\left(\frac{b+md}{1+m}\right)^2},$$

即
$$\frac{|ad-bc|}{\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}}$$

$$\leqslant\sqrt{\left(\frac{a+mc}{1+m}\right)^2+\left(\frac{b+md}{1+m}\right)^2}.\ \square$$

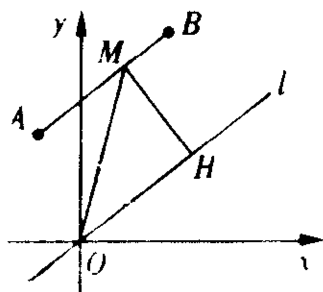


图 6 37

评析：也可以写出直线 AB 的方程，则原点到 AB 的距离不大于 OM.

例 6-46 已知 $x,y\in\mathrm{R}$，且 $x^2+y^2+2y\leqslant0$.

求证 $x^2+y^2+6x+8>0$.

(见习题四第 3 题 P.244)

解 在直角坐标系中，已知式可变为

$$x^2+(y+1)^2\leqslant1, \quad ①$$

表示圆心在(0,-1)、半径为 1 的圆面区域(包括边界)，而求证式为

$$(x+3)^2+y^2>1, \quad ②$$

表示以(-3,0)为圆心，半径为 1 的圆外部.

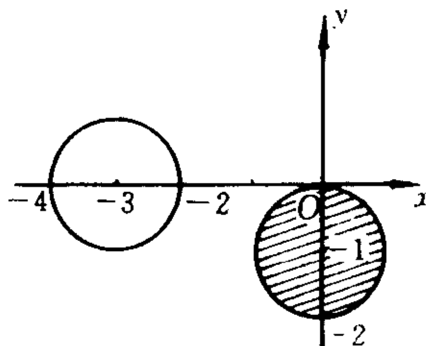


图 6-38

由图 6-38 知，圆①、②相离，圆面①上的点在圆②的外部，结论是显然的.事实上，由①有 $x\geqslant-1$，从而

$$x^2+y^2+6x+8$$
$$\geqslant x^2+y^2-6+8$$
$$\geqslant 2$$

$$>0.\square$$

例 6-47 求证 $\triangle ABC$ 为等腰三角形的充要条件是

$$\begin{vmatrix} \cos^2 A & \sin A & 1 \\ \cos^2 B & \sin B & 1 \\ \cos^2 C & \sin C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(见习题四第 4 题 P.244)

证明 当$\triangle ABC$ 为等腰三角形时,所求行列式有两行相等,其值必为 0.

反之,行列式的值为零,表明 3 点

$$M(\sin A,\ \cos^2 A),$$
$$N(\sin B,\ \cos^2 B),$$
$$P(\sin C,\ \cos^2 C)$$

共线,但由 $\cos^2 A = 1-\sin^2 A$ 知,M,N,P 在抛物线

$$y=1-x^2$$

上.由直线与抛物线最多有两个公共点知,M,N,P 必有两点重合,从而相应坐标中的两个角相等,$\triangle ABC$ 为等腰三角形(在 P.168 例 4-12 中见过同样的思想).$\square$

例 6-48 求证 $\cot 10^\circ - 4\cos 10^\circ = \sqrt{3}$.

解 为了出现 10°角和$\sqrt{3}$,我们作 Rt$\triangle ABC$,使 $AC=\sqrt{3}$,$BC=1$,$AB=2$,再作$\angle ABD=20^\circ$交 CA 延长线于 D,则$\angle CDB=10^\circ$,且 $\cot 10^\circ = CD$.(如图 6-39)

又在$\triangle ABD$ 中,由正弦定理

有 $AD=\dfrac{AB\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}=4\cos 10^\circ$,

得
$$\begin{aligned}&\cot 10^\circ - 4\cos 10^\circ \\ &= CD - AD \\ &= AC \\ &= \sqrt{3}.\ \square\end{aligned}$$

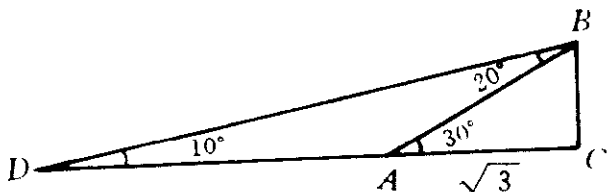


图 6-39

评析:由 $\sin(30^\circ-10^\circ)=\sin 2\times 10^\circ$两边展开,变形可得所求.

例 6-49 已知正数 x,y,z 满足

$$\begin{cases}x^2+y^2+xy=1, & ①\\ y^2+z^2+yz=3, & ②\\ z^2+x^2+zx=4. & ③\end{cases}$$

求 $x+y+z$.

解法 1 作 Rt△ABC,使

$$AB=1,\ BC=\sqrt{3},\ CA=2.$$

在 Rt△ABC 内取一点 P,如图 6-40,使

$$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^\circ,$$

由余弦定理有

$$PA^2+PB^2+PA\cdot PB=AB^2=1,$$
$$PB^2+PC^2+PB\cdot PC=BC^2=3,$$
$$PC^2+PA^2+PC\cdot PA=AC^2=4.$$

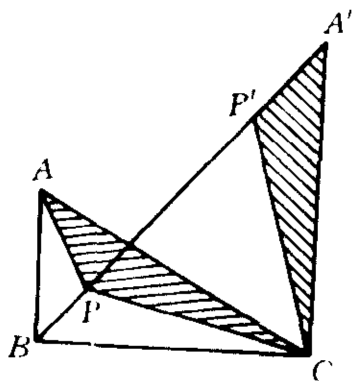


图 6-40

这表明 $x=PA,y=PB,z=PC$ 是原方程组的解.现将△APC 绕点 C 向外旋转 60°,得△$A'P'C$,则 A',P',P,B 四点共线,$P'A'=PA,PP'=PC=P'C$.有

$$x+y+z=A'P'+P'P+PB=A'B.$$

在 Rt△$A'BC$ 中,

$$A'B=\sqrt{A'C^2+BC^2}=\sqrt{4+3}=\sqrt{7}.\ \square$$

这个解法的前提是,原方程组的解是惟一的,否则不能保证不减根.理解上述解法的实质是,将 $\overrightarrow{PA}$ 绕 P 点旋转 $\frac{2\pi}{3}$, $\overrightarrow{PC}$ 绕 P 点旋转 $-\frac{2\pi}{3}$,将共点 3 线段的长度转化为共线 3 线段的长度(解法 2).

解法 2 在复平面上取 $A=i,B=0,C=\sqrt{3}$,且取点 P,使

$$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^\circ.$$

记 $w=\cos120^\circ+i\sin120^\circ=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

有 $\qquad x+y+z$

$$
\begin{aligned}
&= |A-P|+|B-P|+|C-P| \\
&= |(A-P)w|+|(B-P)|+|(C-P)w^2| \\
&= |(A-P)w+(B-P)+(C-P)w^2| \text{(同向共线)} \\
&= |(Aw+B+Cw^2)-P(1+w+w^2)| \\
&= |Aw+B+Cw^2| \\
&= \left|\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\right| \\
&= |-\sqrt{3}-2i| \\
&= \sqrt{7}. \square
\end{aligned}
$$

这个例子是由图像的启发,得出有代数味的解法.

例 6-50 某轮船公司每天中午都有一艘轮船从哈佛开往纽约,并且每天的同一时刻也有一艘轮船从纽约开往哈佛.轮船在途中所花的时间来去都是 7 昼夜,而且都是匀速航行在同一航线上.问今天中午从哈佛开出的轮船,在开往纽约的航行过程中,将遇到几艘同一公司的轮船从对面开来?

解 习题四第 21 题(P.250)给出了“无字的证明”.由图形可数出 15 个交点,即与 15 艘轮船相遇,又由图形的结构可以看到,每次相遇两船航行的时间之差必为整数个昼夜.因此,若设开往纽约的轮船经过 x 昼夜便与对面开来行了 y 昼夜的轮船相遇,则有

$$
\begin{cases}
x+y=7, & ① \\
|x-y|=n; & ②
\end{cases}
$$

其中 $0\leqslant x, y, n\leqslant 7$,联立①、②可得

$$2x=7\pm n$$

为整数,$2x$ 有 $0,1,2,\cdots,13,14$ 共 15 个取值,从而 x 也有 15 个取值.即与同一公司从对面开来的 15 艘船在航行中相遇. □

评析:取 7 等分线 $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$,则等分点(8 个)以及它们的中点(7 个)共 15 个为相遇点.

例 6-51 若 $2x+y\geqslant 1$,试求函数

$$w=y^2-2y+x^2+4x$$

的最小值.

分析　习题四第22题(P.250)已经给出了几何解法.理解该解法的实质可以看到,既然函数 w 在 l 与 C 的切点处 $A\left(-\frac{2}{5},\frac{9}{5}\right)$ 取最小值,那么我们可以让 A 是 l 与其垂线

$$l_1\quad x-2y+4=0$$

的交点,为此,只需对 w 按 l 与 l_1 的形式配方,从而有以下解法.

解法1　由

$$5w=(2x+y-1)^2+(x-2y+4)^2+8(2x+y-1)-9\geqslant-9.$$

知当
$$\begin{cases}2x+y-1=0,\\x-2y+4=0\end{cases}$$
时,w 有最小值.解方程组得

$$x=-\frac{2}{5},\ y=\frac{9}{5}$$

时,有 $w_{\min}=-\frac{9}{5}$. □

解法2　由

$$25w=(5x+2)^2+(5y-9)^2+40(2x+y-1)-45\geqslant-45,$$

知
$$\begin{cases}5x+2=0,\\5y-9=0,\\2x+y-1=0\end{cases}$$
时,w 有最小值.解方程组得

$$x=-\frac{2}{5},\ y=\frac{9}{5}$$

时,有 $w_{\min}=-\frac{9}{5}$. □

容易看出,这两个代数解法都比几何解法更直截了当,但是没有原文的几何分析,这里的配方是很难拼凑出来的.下面的配方是纯代数的.

设 $2x+y=k\geqslant1$,则 $y=k-2x$,代入得

$$w=(k-2x)^2-2(k-2x)+x^2+4x$$

$$=5x^2-4(k-2)x+(k^2-2k)$$

$$=5\left[x-\frac{2(k-2)}{5}\right]^2+\frac{(k+3)^2}{5}-5$$

$$\geqslant\frac{(k+3)^2}{5}-5\geqslant\frac{(1+3)^2}{5}-5=-\frac{9}{5}.$$

2. 由形到数、数形沟通

在例 6－49、例 6－50、例 6－51 中，已经体现了由形到数的替换与沟通.

例 6－52　在正△ABC 的外接圆$\overset{\frown}{BC}$内任取一点 P，连 PA，PB，PC，求证

(1) $PB+PC=PA$；

(2) $PB\cdot PC=PA^2-AB^2$；

(3) $PA\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}AB$；

(4) $PA^2+PB^2+PC^2=2AB^2$.

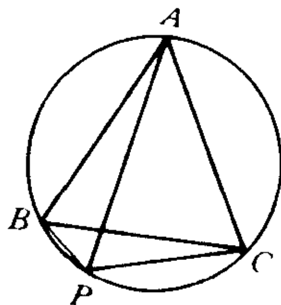


图 6－41

讲解　可以像例 6－34 那样，用纯几何的方法来分别证明这几个结论. 但由代数方法可以统一完成. 首先由(1)、(2)知，PB，PC 应是二次方程

$$x^2-PA\cdot x+(PA^2-a^2)=0$$

的两个根，其中 a 为正△ABC 的边长. 因而有

$$PB^2-PA\cdot PB+PA^2-a^2=0,$$

$$PC^2-PA\cdot PC+PA^2-a^2=0.$$

这启示我们用余弦定理.

证明　记正△ABC 的边长为 a，首先 $PB=PC$ 时可直接验证，当 $PB\neq PC$ 时，分别在△PAB，△PAC 中用余弦定理，有

$$AB^2=PA^2+PB^2-2PA\cdot PB\cdot\cos\angle APB$$

$$=PA^2+PB^2-PA\cdot PB,$$

及

$$AC^2=PA^2+PC^2-PA\cdot PC,$$

即
$$PB^2-PA\cdot PB+(PA^2-a^2)=0,$$
$$PC^2-PA\cdot PC+(PA^2-a^2)=0,$$
这表明 PB,PC 是二次方程
$$x^2-PAx+(PA^2-a^2)=0$$
的两个实数根.由韦达定理有
$$PB+PC=PA, \quad ①$$
$$PB\cdot PC=PA^2-a^2. \quad ②$$

又由方程有实数根,知判别式非负
$$\Delta=PA^2-4(PA^2-a^2)\geqslant 0,$$
即
$$PA\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}AB.$$

又由①^{2}再将②代入,得
$$PA^2=PB^2+PC^2+2PB\cdot PC$$
$$=PB^2+PC^2+2(PA^2-a^2),$$
即
$$PA^2+PB^2+PC^2=2AB^2.\square$$

例 6－53　若在三角形的两条边上各至少存在一个具有下述性质的点:到对角顶点的距离是到该边两端距离的比例中项.求证在此三角形的第三边上必不存在具有这一性质的点.

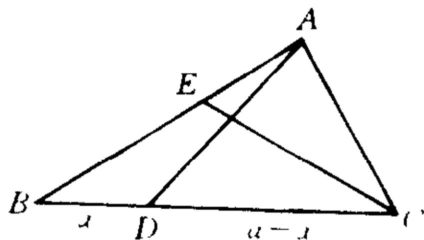


图 6－42

解　设$\triangle ABC$中,BC,AB边上有这样的点D,E.记$BD=x,CD=a-x$,由斯特沃尔特定理得
$$2ax^2-(2a^2+c^2-b^2)x+ac^2=0.$$

由 D 点的存在性知二次方程有实根,其判别式非负,
$$0\leqslant\Delta$$
$$=(2a^2+c^2-b^2)^2-8a^2c^2$$
$$=(\sqrt{2}a-b-c)(\sqrt{2}a+b-c)(\sqrt{2}a-b+c)(\sqrt{2}a+b+c).$$

但三角形两边之和大于第三边,故由上式可推得
$$\sqrt{2}a-b-c\geqslant 0. \quad ①$$

同理由 AB 边上有这样的点 E,得

$$\sqrt{2}c-a-b\geqslant 0. \quad ②$$

若第三边上还有这样的点,则可得

$$\sqrt{2}b-c-a\geqslant 0. \quad ③$$

①+②+③,得

$$(\sqrt{2}-2)(a+b+c)\geqslant 0.$$

与$\sqrt{2}<2$ 矛盾,故第三边上不存在这一性质的点. □

3. 数形等价、防误求优

在具体施行"数形结合"时,我们常常是由"形"观察出"数",由"数"构造出"形",这中间的"观察"与"构造"并未进行严格的逻辑推理.特别是当构图不准确、不完整、或不具一般性时,数形之间并不等价,造成错觉性的解题失误或片面性的疏漏.另外,有的数形转换虽然等价,但既不简捷也不优美,亦应该改进.

(1) 数转形时图失真

例 6-54 方程 $x^{\frac{1}{3}}=2\sin x$ 的实根个数为( )

A. 3 B. 5 C. 7 D. 9

解 此题多用图像法,作函数

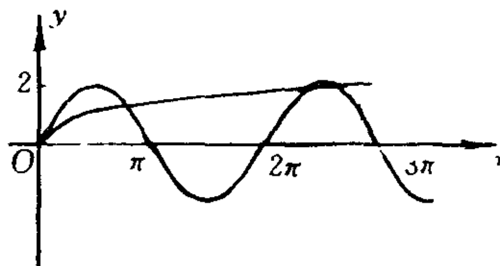


图 6-43

$$y=x^{\frac{1}{3}},$$
$$y=2\sin x$$

的草图,由于两函数均为奇函数,故只需作$x\geqslant 0$ 的部分,又由$x>8$时,

$$x^{\frac{1}{3}}>2\geqslant 2\sin x,$$

故图形只须取$[0,3\pi]$上的一段就够了.如图 6-43,除原点外,还有 3 个交点,再由奇偶性可知应选 C. □

评析 此题由于草图粗糙失真而产生误判.其实,当 $x=\dfrac{1}{8}$时,

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}>2\cdot\frac{1}{8}>2\sin\frac{1}{8}.$$

可见,在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内还有一个交点,正确答案应为D.

例6-55　在实数范围内解方程

$$\frac{11x^2-6}{7-12x^2}=\sqrt{\frac{7x+6}{12x+11}}.\qquad ①$$

解　这是例1-2引用过的例子,曾见到的解答如下:

令
$$f(x)=\frac{11x^2-6}{7-12x^2}\ \left(x\neq\pm\sqrt{\frac{7}{12}}\right),\qquad ②$$

$$g(x)=\sqrt{\frac{7x+6}{12x+11}}\left(x\neq-\frac{11}{12}\right).\qquad ③$$

显然$f(x)$与$g(x)$互为反函数,所以两函数的图像关于直线$y=x$对称,因之两图像的交点必在直线$y=x$上.令

$$x=\frac{11x^2-6}{7-12x^2},$$

即
$$12x^3+11x^2-7x-6=0,$$

亦即
$$(x+1)(3x+2)(4x-3)-0.$$

由③知,$x\geqslant0$,故得

$$x=\frac{3}{4}.$$

检验知,这是原方程惟一的实数解. □

评析　这个解法把方程的求解转化为函数图像求交点,确实有先进性与合理成分,可惜数转形时信息失真,我们有下面的分析.

1) 函数$f(x)$与$g(x)$不成反函数

其实$f(x)$是一个偶函数,在其定义域区间上根本就没有反函数;$g(x)$在定义域I:$\left(-\infty,-\frac{11}{12}\right)\cup\left(-\frac{6}{7},+\infty\right)$内虽有反函数,但不是$f(x)$,而应是

$$f_1(x)=\frac{11x^2-6}{7-12x^2}\ (x\geqslant0).\qquad ④$$

若在方程的存在域上考虑,$f(x)$与$g(x)$也不成反函数.

而用$x\geqslant0$来代替方程的存在域时,则缩小了未知数的范围,有可能产生减根,而且果然产生减根

$$x=\frac{-5-11\sqrt{21}}{74}.$$

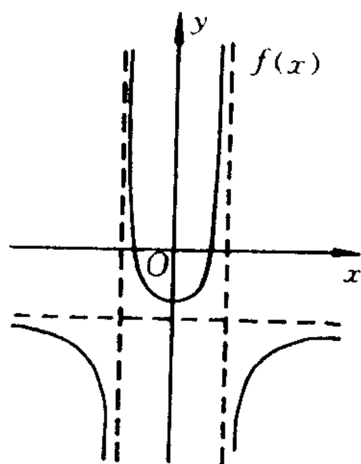


图6-44

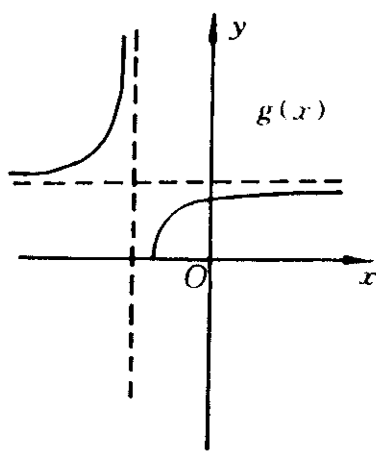


图6-45

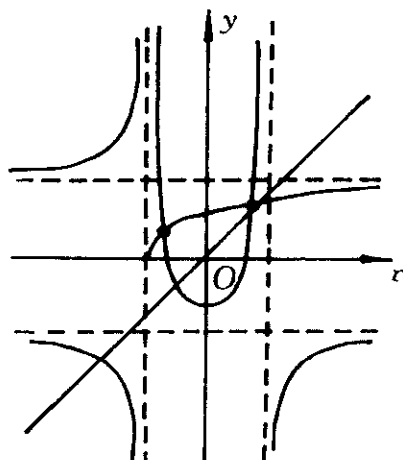


图6-46

2) 如图6-44,图6-45,函数$f(x)$与$g(x)$的图像并不关于$y=x$对称.函数$f_1(x)$与$g(x)$的图像才关于$y=x$对称,但它们是分别在不同的定义域内作图的,对于原方程①,我们需要在相同的存在域上考虑交点,这时$f_1(x)$与$g(x)$还是不能关于$y=x$对称.把图6-44与图6-45重叠起来得出图6-46,可以看到,上半平面确实有两个交点,一个在$y=x$上,$x_1=\frac{3}{4}$;一个不在$y=x$上,$x_2=\frac{-5-11\sqrt{21}}{74}$.

3) 退一步说,即使两曲线关于$y=x$对称,也还不能保证它们的交点必在$y=x$上,由二元方程$F(x,y)=0$所确定的曲线自不待言,就是单值函数,甚至单调函数也不能提供可靠的保证.比如,$y=-x$与其反函数的图像交点不限于在$y=x$上;而$y=-\frac{1}{x}$与其反

函数的图像交点恰好全不在$y=x$上.

以上分析表明,作为方程①求解的两点依据都靠不住:$f(x)$与$g(x)$不成反函数,其图像交点更不能保证全落在直线$y=x$上.

但是,尚未成功并不等于彻底失败,对于方程

$$\begin{cases}F(x,y)=0,\\F(y,x)=0.\end{cases}$$

从中分解出直线$y=x$(或说分解出因式$y-x$),不失为一个好主意.请看下面的解法.

别解1 设

$$y=\frac{11x^2-6}{7-12x^2}=\sqrt{\frac{7x+6}{12x+11}}\geqslant 0, \quad ⑤$$

有
$$\begin{cases}12x^2y+11x^2-7y-6=0, & ⑥\\12xy^2+11y^2-7x-6=0. & ⑦\end{cases}$$

相减,得
$$(y-x)(12xy+11x+11y+7)=0,$$

有
$$\begin{cases}12x^2y+11x^2-7y-6=0,\\y=x;\end{cases} \quad ⑧$$

或
$$\begin{cases}12x^2y+11x^2-7y-6=0,\\12xy+11x+11y+7=0.\end{cases} \quad ⑨$$

消去y,分别得

$$\begin{cases}12x^3+11x^2-7x-6=0,\\x\geqslant 0;\end{cases} \quad ⑩$$

或
$$\begin{cases}37x^2+5x-17=0,\\x=-\dfrac{11y+7}{12y+11}<0(y\geqslant 0).\end{cases} \quad ⑪$$

解⑩取正值得$x_1=\dfrac{3}{4}$;

解⑪取负值得$x_2=\dfrac{-5-11\sqrt{21}}{74}$. □

这个例子的数形结合虽然经历过挫折,但它恰好是成功的先导,

正是数形结合的分析才直观地揭示了错误的原因，并诱发出合理解法①. 其实，三次方程 $12x^3+11x^2-7x-6=0$ 的出现，也为我们直接处理原方程提供了降次的依据.

另解2 对原方程平方

$$\frac{121x^4-132x^2+36}{144x^4-168x^2+49}=\frac{7x+6}{12x+11},$$

即 $$444x^5+467x^4-408x^3-444x^2+89x+102=0,$$

有 $$(12x^3+11x^2-7x-6)(37x^2+5x-17)=0,$$

$$(x+1)(3x+2)(4x-3)(37x^2+5x-17)=0.$$

得 $x_1=-1, x_2=-\dfrac{2}{3}, x_3=\dfrac{3}{4}, x_{4,5}=\dfrac{-5\pm 11\sqrt{21}}{74}$.

检验得，只有 $x=\dfrac{3}{4}, \dfrac{-5-11\sqrt{21}}{74}$ 为原方程的解. □

(2) 形换数时不等价

例6-56 当正数 a 为何值时，抛物线 $y=-\dfrac{x^2}{4}+4$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ 有4个不同的交点.

解 作出抛物线与椭圆的图形如图6-47，抛物线与 x 轴的交点为 $M(4,0)$，$M_1(-4,0)$；椭圆与 x 轴的交点为 $A(a,0)$，$A_1(-a,0)$. 要它们有4个交点，须 A, A_1 位于 M, M_1 之外，故得

$$a>4.\ \square$$

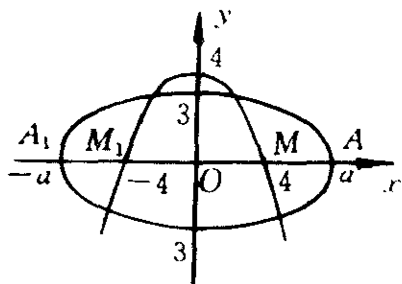


图6-47

评析 由于图形未反映出精确的

① 罗增儒等. 试论如何求方程组 $\begin{cases}F(x,y)=0\\F(y,x)=0\end{cases}$ 的实数解. 中学数学教学(皖)，1985，5，P.11. 本文的有关看法，笔者自1980年以来曾投文到多家刊物.

数量关系，直观造成了错觉，以为“A,A_1 位于 M,M_1 之外”是两曲线有 4 个交点的充要条件．其实，这只是充分而不必要条件．事实上，联立两方程消去 x 得，关于 y 的二次方程

$$a^2y^2-36y+(144-9a^2)=0,$$

其两根在$(-3,3)$内．现记

$$f(y)=a^2y^2-36y+(144-9a^2),$$

这是一个开口向上的抛物线．方程 $f(y)=0$ 的两根在$(-3,3)$内的充要条件为

$$\begin{cases} f(3)>0, \\ f(-3)>0, \\ -3<\dfrac{18}{a^2}<3, \\ f\left(\dfrac{18}{a^2}\right)<0. \end{cases}$$

解得　　$a>\sqrt{7}+1$．□

这个解法，既有几何结构的分析，又有代数关系的精确计算，体现了真正的数形结合①．

例 6－57　已给椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，自中心作两条互相垂直的弦 AC,BD．顺序连结 A,B,C,D 得一四边形，记其面积为 S，在所有这样的四边形中，求 S 的最大值．

解　由对称性可知，只须求出$\triangle AOB$ 的面积．设 A 的坐标为

$$A\begin{cases} x_1=a\cos\theta, \\ y_1=b\sin\theta, \end{cases}\qquad \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

由 $OA\perp OB$ 得 B 的坐标为

---

① 也可以由不等式组$\begin{cases} -3<\dfrac{18-3\sqrt{a^4-16a^2+36}}{a^2} \\ \dfrac{18+\sqrt{a^4-16a^2+36}}{a^2}<3 \end{cases}$解出．

$$B\begin{cases} x_2 = a\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = -a\sin\theta, \\ y_2 = b\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = b\cos\theta. \end{cases}$$

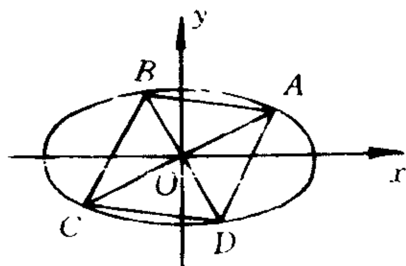


图 6-48

有

$$\begin{aligned} S &= 4\cdot S_{\triangle AOB} \\ &= 2\cdot OA\cdot OB \\ &\leqslant OA^2 + OB^2 \\ &= (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta) + (a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta) \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

当 $OA = OB$ 时，S 有最大值 $a^2 + b^2$. □

评析 这个解法混淆了参数方程中点 A 离心角与 OA 倾斜角的概念，得出 B 的坐标是错误的，结论也是错误的. 事实上，由 $OA \perp OB$ 有

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0. \tag{1}$$

从而

$$\begin{aligned} S &= 4S_{\triangle AOB} \\ &= 2\cdot OA\cdot OB \\ &= 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \\ &= 2\sqrt{(x_1x_2 + y_1y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2} \\ &= 2\sqrt{(x_1y_2 - x_2y_1)^2} \\ &= 2ab\sqrt{\left(\frac{x_1}{a}\cdot\frac{y_2}{b} - \frac{x_2}{a}\cdot\frac{y_1}{b}\right)^2} \\ &= 2ab\sqrt{\left[\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2\right]\left[\left(\frac{x_2}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{b}\right)^2\right] - \left(\frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2}\right)^2} \\ &= 2ab\sqrt{1 - \left(\frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2}\right)^2} \\ &\leqslant 2ab. \end{aligned}$$

等号成立当且仅当

$$\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}=0.\qquad ②$$

联立①、②，得

$$x_1x_2=0,\ y_2y_2=0.$$

当 A 为$(a,0)$，B 为$(0,b)$时，面积取最大值 $2ab$. □

(3) 数形互换不简捷

例6-58 求函数 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-4x+13}$的最小值.

解[1] 由于

$$f(x)=\sqrt{(x-1)^2+(0-2)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(0-3)^2},$$

由此联想两点间的距离公式，通过“等价变形”而构造图 6-49，得 $f(x)$的最小值为点 $P(x,0)$与 $A(1,2)$，$B(2,3)$的距离之和的最小值.

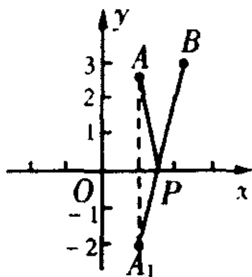


图 6-49

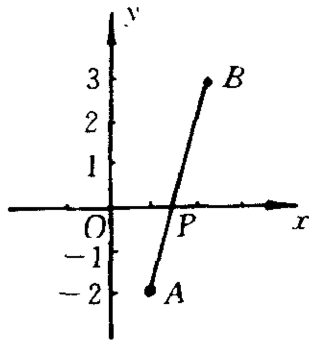


图 6-50

取 A 的对称点 $A_1(1,\ \ 2)$，根据几何定理，$|PA|+|PB|$的最小值为$|A_1B|$的长，$f(x)_{\min}=|A_1B|=\sqrt{26}$. □

评析 这个解法须对 $A(1,2)$求对称点 $A_1(1,-2)$，这是一个多余的步骤.其实

$$f(x)=\sqrt{(x-1)^2+[0-(-2)]^2}+\sqrt{(x-2)^2+(0-3)^2},$$

1 陈进兴.波利亚解题思想与构造法.数学教学，1991，4，P.18，例 2.

如图 6 - 50,取 $A(1,-2)$,$B(2,3)$,$P(x,0)$,则 P 到 A,B 的距离之和取最小值当且仅当 A,P,B 三点共线,$f(x)$的最小值便为

$$|AB|=\sqrt{(1-2)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{26}. \square$$

这里,图 6 - 50 比图 6 - 49 更直观,且删去了思维回路,解题过程更加简捷.

例 6 - 59 求函数 $y=\frac{ax-1}{a^2x^2+2}(a\neq 0)$的最大值与最小值.

解 题目的结构像斜率公式,故取 $A(a^2x^2,ax)$,$B(-2,1)$,则 A 在抛物线

$$y^2=x \quad ①$$

上,问题转化为求抛物线上动点 A 与定点 B 的连线的斜率的最大值与最小值.(如图 6 - 51)

设过 $B(-2,1)$的直线方程为

$$y=k(x+2)+1, \quad ②$$

代入抛物线方程①,得 $y^2-\frac{1}{k}y+\left(\frac{1}{k}+2\right)=0$, ③

其判别式非负

$$\Delta=\frac{1}{k^2}-4\left(\frac{1}{k}+2\right)\geqslant 0,$$

解得 $\frac{-1-\sqrt{3}}{4}\leqslant k\leqslant\frac{-1+\sqrt{3}}{4}$.

最大值为 $\frac{-1+\sqrt{3}}{4}$,最小值为 $\frac{-1-\sqrt{3}}{4}$. □

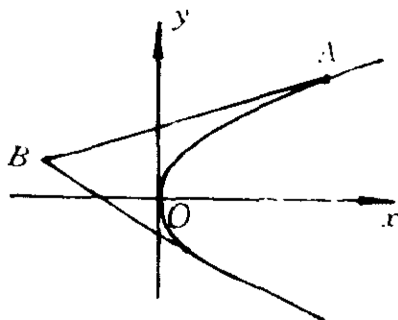


图 6 - 51

评析 本题对数与形之间关系的分析是准确的.但理解其实质步骤后可以看到,关键是对二次方程③讨论判别式,而这可由原式直接得到,设

$$t=ax,$$

则原式可化为 $t^2-\frac{1}{y}t+\left(\frac{1}{y}+2\right)=0.$

这正是③式.

甚至我们还可以不引进 t，直接由原式得关于 x 的二次方程

$$(a^2y)x^2-ax+(2y-1)=0, \tag{4}$$

有

$$\Delta=a^2-4a^2y(2y-1)\geqslant 0.$$

但 $a^2>0$，故得　$8y^2+4y-1\leqslant 0$，

$$\frac{-1-\sqrt{3}}{4}\leqslant y\leqslant\frac{-1+\sqrt{3}}{4}.$$

当 $y_1=\frac{-1-\sqrt{3}}{4}$ 时，方程④有等根，相应的

$$x_1=\frac{a}{2a^2y_1}=\frac{1-\sqrt{3}}{a}.$$

当 $y_2=\frac{-1+\sqrt{3}}{4}$ 时，方程④有等根，相应的

$$x_2=\frac{a}{2a^2y_2}=\frac{1+\sqrt{3}}{a}.$$

即当 $x=\frac{1-\sqrt{3}}{a}$ 时，y 有最小值 $\frac{-1-\sqrt{3}}{4}$，当 $x=\frac{1+\sqrt{3}}{a}$ 时，y 有最大值 $\frac{-1+\sqrt{3}}{4}$. □

4）数形互换逻辑循环

例6－60　已知函数 $f(x)=\tan x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. 若 $x_1, x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $x_1\neq x_2$，证明

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

[1994 年数学高考理科第(22)题]

解　作出函数 $f(x)=\tan x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的图像如图 6－52. 取点 $A(x_1, f(x_1))$,

$B(x_2, f(x_2))$, $C\left(\frac{x_1+x_2}{2}, f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$，显然弦 AB 在弧 AB 的上方，故弦 AB 中点的高度大于 C 点的纵坐标，得证

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right). \square$$

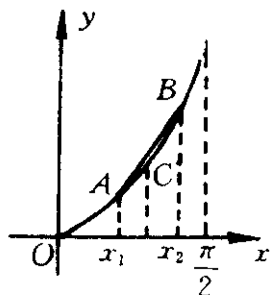


图 6-52

评析 这里,所要证明的不等式,正是凹函数的定义,用凹函数的直观图形来证明不等式成立是一个逻辑循环.事实上,高中阶段的三角函数图像缺乏精确的数学描述,什么叫"光滑曲线"? 为什么是"连续"的? 光滑曲线的弯曲部分为什么这样弯而不那样弯? 等等,都只有在学习微积分之后才能弄清楚.因此,正切函数"图像"只能提供一个思维模式,不能作为论证的依据.

当然,本题不是不能作形数结合处理,借助于单位圆,可以给出一个简捷的证明(请对照例 4-31,P.204).

另证 不妨设 $x_1<x_2$,在单位圆上分别作出 $\tan x_1$,$\tan x_2$ 的函数线 TB,TA,由 $TB<TA$,知 $OB<OA$.如图 6-53.

再作$\triangle AOB$ 的角平分线 OC,由

$$\frac{BC}{CA}=\frac{OB}{OA}<1,$$

知 $$BC<CA,$$

并且 $$\angle TOC=\frac{1}{2}(\angle TOB+\angle TOA)=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

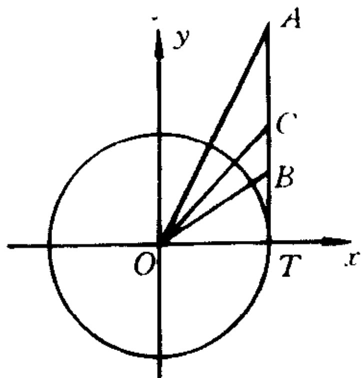


图 6-53

有 $\tan\frac{x_1+x_2}{2}$的函数线为 TC.但

$$\begin{aligned}TC&=TB+BC\\&<TB+CA\\&<\frac{1}{2}[(TB+BC)+(TB+CA)]\\&=\frac{1}{2}[TB+(TB+BC+CA)]\\&=\frac{1}{2}(TB+TA),\end{aligned}$$

得证
$$\tan\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{1}{2}(\tan x_1+\tan x_2).$$
即
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).\ \square$$

6－2－9　有效增设

对所面临的问题,在不改变题意的前提下,增加一点条件使得问题更容易求解,叫做有效增设.

如同我们所看到的,一道难题,难就难在好像还缺点什么,一旦给题目添上点“已知假设”,题型会变得正规、求解会变得顺利.但是,这个添上的“假设”,一方面不能改变原题意(否则就是做另外一道题了),另方面又不能与解题目标毫不相关(否则就徒然增加一些分散注意力的干扰),也就是说,它必须是有效的(即与原题等效又具便于解题的效能),那么,怎样使用这种艺术才能产生“有效增设”呢? 我们的考察表明,这是众多方法、技巧的共同功能,因而已上升到策略的层次.下面来分析 9 个产生有效增设的途径.

1. 反证法

为证“$A\Rightarrow B$”,我们用反证法改证“A 且 $\bar{B}\Rightarrow C$ 且 $\bar{C}$”,就为论证增加了一个条件 $\bar{B}$.这是反证法威力的一个源泉,当 B 不易直接肯定时(惟一性、无限或否定性叙述等),当 $\bar{B}$ 比 B 更具体、更简单时,当 A 的信息太空、太少时,用反证法特别方便.(参见§5－2－2,§5－2－3)

在例 6－27(P.372)中,要证明$\sqrt{2}$是无理数,已知条件实在太空、太少,以至于正面推导一小步都“步履维艰”.另一方面,无理数是无限不循环小数,很抽象、不具体.这两方面都构成了证题的困难,当反设$\sqrt{2}$为有理数时,我们就增加了一个具体而有效的“已知条件”,使得能方便地表示为

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b},\ a,b\in\mathbf{N}_+,\ (a,b)=1.\qquad ①$$

多了这个具体的"条件",就可以进行各个方向、各种形式的推理了[1].

这里的式①是我们解题中"增添"的,它对于问题的解决又是非常有用的,因而,这是一个有效增设.

例 6-61　证明素数有无穷多个[2].

讲解　已知条件很少、结论又很抽象,实在无法下手,根据正难则反的原则,我们用反证法,设素数共有 k 个($k\in N_+$),记为

$$p_1,p_2,\cdots,p_k. \quad ①$$

作

$$p=p_1p_2\cdots p_k+1. \quad ②$$

我们来证明 p 不是合数.若不然,必存在素数 $p_i(1\leqslant i\leqslant k)$使

$$p_i\mid p=p_1p_2\cdots p_k+1,$$

但

$$p_i\mid p_1p_2\cdots p_k,$$

故得

$$p_i\mid 1.$$

与 p_i 为素数矛盾.故 p 为素数.

这说明 p 是大于 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 的素数,这又与素数只有 k 个矛盾.

这个证明的基本思想是,若有 k 个素数则必有 $k+1$ 个素数(被称为数学归纳法的最早证例),而"假设素数共有 k 个"是"有效增设",正是有了这个"假设"我们得以方便而具体地列举出式①,并进而构造出第 $k+1$ 个素数.下来的推理已经没有实质性的困难.

反证法产生"有效增设"功能的揭示,深化了对反证法的认识,同

---

① 比如,由 $a^2=2b^2$ 知 a 为偶数,设 $a=2a_1$,则 $4a_1^2=2b^2$,又得 b 为偶数,得 a,b 有公约数 2,与$(a,b)=1$ 矛盾.

又如由算术基本定理知,a^2 含有偶数个素因数,而 2 为素数,$2b^2$ 便含有奇数个素因数,与 $a^2=2b^2$ 矛盾.

再如由 $a^2=2b^2$ 知,$b\mid a^2$,但$(a,b)=1$,故 $b=1,a^2=2$,但 1 与 4 之间没有平方数,矛盾.

② 这个命题早见于公元前 300 年的《几何原本》,兰纪正、朱恩宽译.陕西科学技术出版社 1990 年 1 月第 1 版.

时也提高了使用反证法的自觉性.

2. 区分

当数学问题比较复杂时,我们常常将其分成几类分别求解,或将其分成几个步骤逐一求解. §6-2-4 的区分种种情况曾对此进行过讨论.那么,为什么小问题会比原命题易于求解呢?我们从"有效增设"的角度指出:分类标准本身提供了一个可以使用的条件.正是因为子命题既比原命题简单又比原命题多一个"已知条件",所以求解起来就容易了.

排列组合问题中加法原理、乘法原理的应用,绝对值问题的零点分域法,平面几何中分锐角三角形、直角三角形、钝角三角形,整数问题按完全剩余类分类(特别地有奇偶两类、产生奇偶分析法),实数问题分为自然数、整数、有理数、无理数等都体现了有效增设.

例 6-62　若平行直线 EF, MN 与相交直线 AB, CD 相交成如图 6-54 所示的图形,则共得同旁内角①

A. 4 对　　B. 8 对

C. 12 对　　D. 16 对

[1994 年全国初中数学联赛题]

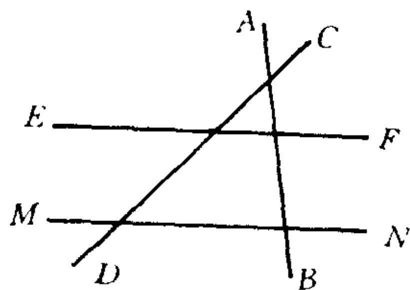


图 6-54

讲解　每一个"三线八角"基本图形都恰有两对同旁内角,而从所给的图形中可分解出 8 个基本图形,故应共有 16 对同旁内角.更具体一点,可分为四类来计算(但当直线增多时,这种方法就麻烦了).

(1) 取出 AB,得基本图形(图 6-55),有 2 对同旁内角;

(2) 取出 CD,得基本图形(图 6-56),有 2 对同旁内角;

---

① 这是笔者提供的试题,当年陕西省抽样得分率为 0.34.更本质的看法是:截线上每两点都对应一个"三线八角"基本图形,因而,当直线增加时,可以离开图形而直接计算.

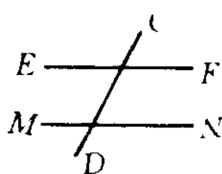


图 6－55

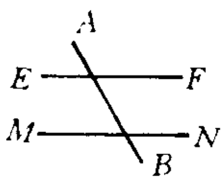


图 6－56

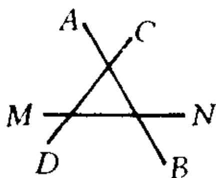


图 6－57

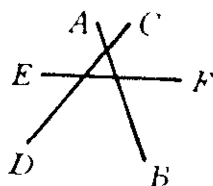


图 6－58

(3) 取出 EF，得图 6－57，包含着 3 个基本图形，有 6 对同旁内角；

(4) 取出 MN，得图 6－58，包含着 3 个基本图形，有 6 对同旁内角.

共计 $2+2+6+6=16$ 对同旁内角. 选 D. □

这个求解的实质是将图形分成两大类，一大类是 3 线中有两线平行，多了这个条件其同旁内角只有两对；另一大类是三线互不平行，多了这个条件便可归结为 3 个“基本图形”. 这样，每一类都很容易计算.(但当直线增多时，这种方法就麻烦了)

3. 数学归纳法加强命题

这主要有两种情况，其一是有限项的命题加强为全体自然数成立的命题(例 6－18)；其二是证明一个更强的命题(§5－2－2).

通常，用数学归纳法证题的主要困难在于第二步，由于更强的命题提供了更强的归纳假设，因而更强的命题便产生“有效增设”.

例 6－63 已知 $x_i\in\mathrm{R}(i=1,2,\cdots;n\geqslant 2)$，满足

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|=1,\ \sum_{i=1}^{n}x_i=0.$$

求证
$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right|\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}.$$

讲解 这是 1989 年高中数学联赛的一道试题(见习题五第 5 题 P.335)，当年不少选手使用了数学归纳法但几乎没有成功的. 那么这道题能不能用数学归纳法来证明呢？回答是肯定的，但比较难，问题在于 k 号命题与 $k+1$ 号命题之间的递推关系不明显. 若将命题加强，数学归纳法可以顺利进行.

加强命题 已知 $x_i\in\mathrm{R}(i=1,2,\cdots,n;n\geqslant 2)$满足

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|\leqslant 1,\ \sum_{i=1}^{n}x_i=0.$$

求证
$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right|\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}.$$

证明　(1) 当 $n=2$ 时,由

$$\begin{cases}|x_1|+|x_2|\leqslant 1,\\ x_1+x_2=0,\end{cases}$$

得
$$|x_1|=|x_2|\leqslant\frac{1}{2};$$

则
$$\left|\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}\right|=\frac{1}{2}|x_1|\leqslant\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\times 2}.$$

命题对 $n=2$ 时成立.

(2) 假设 $n=k$ 时命题成立,当 $n=k+1$ 时,有

$$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|+|x_{k+1}|\leqslant 1,$$
$$x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=0;$$

从而
$$x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}+(x_k+x_{k+1})=0,$$
$$\begin{aligned}&|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_{k-1}|+|x_k+x_{k+1}|\\ \leqslant&|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_{k-1}|+|x_k|+|x_{k+1}|\\ \leqslant&1;\end{aligned}$$

且由
$$\sum_{x_i\geqslant 0}x_i+\sum_{x_j<0}x_j=0,$$
$$\sum_{x_i\geqslant 0}x_i-\sum_{x_j<0}x_j\leqslant 1,$$

得
$$\sum_{x_i\geqslant 0}x_i=-\sum_{x_j<0}x_j\leqslant\frac{1}{2},$$

从而
$$|x_{k+1}|\leqslant\frac{1}{2}.$$

这时
$$\begin{aligned}&\left|\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\cdots+\frac{x_k}{k}+\frac{x_{k+1}}{k+1}\right|\\ =&\left|\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\cdots+\frac{x_{k-1}}{k-1}+\frac{x_k+x_{k+1}}{k}+\frac{x_{k+1}}{k+1}-\frac{x_{k+1}}{k}\right|\\ \leqslant&\left|\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\cdots+\frac{x_{k-1}}{k-1}+\frac{x_k+x_{k+1}}{k}\right|+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)|x_{k+1}|\end{aligned}$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}\right)+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(k+1)}.$$

这表明,命题对于 $n=k+1$ 时成立.

由数学归纳法得更强命题成立.更有原命题成立. □

例6-64 求证

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4}. \quad ①$$

讲解 (见习题五第4(1)题,P.334)$n=1$ 时,显然成立.

假设 $n=k$ 时不等式成立

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots+\frac{1}{(2k+1)^2}<\frac{1}{4},$$

两边加上 $\frac{1}{(2k+3)^2}$,得

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots+\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{(2k+3)^2}<\frac{1}{4}+\frac{1}{(2k+3)^2}.$$

这时,右边大于 $\frac{1}{4}$,无法推出命题当 $n=k+1$ 时成立.现改证加强命题:

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4}-\frac{1}{4(n+1)}. \quad ②$$

证明 (1) 当 $n=1$ 时

$$\frac{1}{9}<\frac{1}{8}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4\times(1+1)},$$

命题②成立.

(2) 假设 $n=k$ 时,命题②成立,则

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots+\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{(2k+3)^2}$$

$$<\frac{1}{4}-\frac{1}{4(k+1)}+\frac{1}{(2k+3)^2}$$

$$<\frac{1}{4}-\frac{1}{4(k+1)}+\frac{1}{4(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4(k+2)}.$$

即命题②对 $n=k+1$ 时成立.

由数学归纳法得命题②成立,更有①成立.□

4. 构造对偶命题

对一个已知数式或一个已知命题,我们构造一个与之对应的数式或对应的命题,然后一齐参与运算,这个新的数式或命题就是"有效增设".常见的构造手段有倒数变换,相反数变换,根式或复数的共轭变换,以及函数与它的反函数重合的叠代等(在习题四第20题中见过,P.250).

例6-65　设 λ, w 是已知的复数($|\lambda|\neq 1$),解关于 z 的方程

$$\overline{z}-\lambda z=w. \quad ①$$

解　对已知式求共轭复数

$$z-\overline{\lambda}\,\overline{z}=\overline{w}. \quad ②$$

与①式联立可解得

$$z=\frac{\lambda w+\overline{w}}{1-|\lambda|^2}. \ \square$$

这里,作共轭变换,增加了一个方程②.

例6-66　设函数 $f(x)$ 满足条件

$$af(x)+f(-x)=bx^3.$$

①其中 a,b 是常数($a^2\neq 1$),求 $f(x)$.

解　将所给条件中的 x 换成 $-x$,有

$$af(-x)+f(x)=-bx^3. \quad ②$$

①+②可得

$$f(x)+f(-x)=0(\text{奇函数}),$$

代入①得 $f(x)=\dfrac{bx^3}{a-1}$. □

这里,作相反数变换,增加了一个函数方程②.

例6-67　设 x_1,x_2 是二次方程 $x^2+x-3=0$ 的两个根,那么 $x_1^3-4x_2^2+19$ 的值等于(　　).

A. -4　　B. 8　　C. 6　　D. 0

［1996 年全国初中数学联赛题］

解　这里的所求式 $x_1^3-4x_2^2+19$ 中，x_1 与 x_2 是不对称的，但二次方程的两根与系数的关系是具有对称性的，为了体现这种对称性，我们设

$$M=x_1^3-4x_2^2+19,$$

$$N=x_2^3-4x_1^2+19.$$

则
$$\begin{aligned}M+N&=[(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)]-\\&\quad 4[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]+38\\&=(-1)^3-3\times(-3)\times(-1)-4[(-1)^2-2(-3)]+38\\&=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M-N&=(x_1^3+4x_1^2)-(x_2^3+4x_2^2)\\&=[(-x_1^2+3x_1)+4x_1^2]-[(-x_2^2+3x_2)+4x_2^2]\\&=(3x_1^2+3x_1)-(3x_2^2+3x_2)\\&=3(x_1^2+x_1)-3(x_2^2+x_2)\\&=3\times3-3\times3\\&=0.\end{aligned}$$
（由 x_1,x_2 的对称性及结论的惟一性，能预感到 $M=N$）

故得　$M=N=0$. 选 D. □

其中配对式 N 对于本题的求解是一个“有效增设”.

5．重复等价条件

简单重复通常不产生新的东西，但重复等价条件，并分别看成是不同的存在形式，则能产生新的情景，出现“有效增设”. 在例 4－25 中(P.187)，我们重复已知条件

$$a+b+c=0,$$

$$c+a+b=0,$$

$$b+c+a=0,$$

产生线性方程组

$$\begin{cases}ax+by+cz=0,\\ cx+ay+bz=0,\\ bx+cy+az=0.\end{cases}$$

有非零解 $x=y=z=1$. 从一个已知等式产生出一个线性方程组体现了“有效增设”的策略.

在例 4-26(P.190)中,将$\triangle ABC$ 重复一次得出$\triangle ACB$. 三角形全等的定理立即派上了用场. 找出$\triangle ACB$ 是“有效增设”.

例 6-68　若数列$\{x_n\}$满足 $x_1=1$, $x_n>x_{n+1}$,且对常数 a,b,有

$$ax_nx_{n+1}=(x_n+x_{n+1}-b)^2(n\geqslant 1), \quad ①$$

则

$$x_{n+3}-(a-1)x_{n+2}+(a-1)x_{n+1}-x_n=0.$$

证明　重复已知条件,有

$$ax_{n+1}x_{n+2}=(x_{n+1}+x_{n+2}-b)^2, \quad ②$$

展开①、②,得

$$x_n^2-[(a-2)x_{n+1}+2b]x_n+(x_{n+1}-b)^2=0,$$

$$x_{n+2}^2-[(a-2)x_{n+1}+2b]x_{n+2}+(x_{n+1}-b)^2=0;$$

又由已知有 $x_n>x_{n+1}>x_{n+2}$,故 x_n, x_{n+2}是二次方程

$$x^2-[(a-2)x_{n+1}+2b]x+(x_{n+1}-b)^2=0$$

的两个根,由根与系数的关系,得

$$x_n+x_{n+2}=(a-2)x_{n+1}+2b. \quad ③$$

重复这个结论

$$x_{n+1}+x_{n+3}=(a-2)x_{n+2}+2b. \quad ④$$

④-③消去 b,可得

$$x_{n+3}-(a-1)x_{n+2}+(a-1)x_{n+1}-x_n=0. \ \square$$

由于①、③中的 n 有任意性,我们重复同样的结构,但取不同的下标,使产生“有效增设”.

6. 优化假设

对已知条件中的数学对象作出有序化或最优量的假定,叫做优

化假设.这里说的数学对象可以是字母、点、线段、角、运算的和与积、图形的周长与面积等;这里所说的有序化通常指数的大小、点的顺序或某种位置规则等;这里说的最优量通常指最大最小、最长最短、最远最近等.对数学对象作有序假定或最优假定等于给题目增加了一个已知条件,从而打开思路入口的大门,并降低问题的抽象度与复杂性.著名的"极端原理"就包含在优化假设的思考之中(见例 5-40, P.315).在处理不等关系时,优化假设是一种行之有效的方法.

在习题五的第 11 题中(P.341),"设$\angle B \geqslant \angle C$"是有效增设,首先它是原题未出现的,其次作此假定并不改变题意还使证明有两个不同寻常的特色:

(1) 这个"斯坦纳定理"的证明很多,但基本上都用反证法.而这里的证明有点像反证法,但它确实是正面的叙述;

(2) 证明中不断使用不等式,但证出的却是等式:若$\angle B \geqslant \angle C$且$\angle B \leqslant \angle C$,则$\angle B = \angle C$.

例 6-69 设有 $2n \times 2n$ 的正方形方格棋盘,在其中任意的 $3n$ 个方格中各放一枚棋子,求证,可以选出 n 行和 n 列,使得 $3n$ 枚棋子都在这 n 行和 n 列中.

[1990 年全国初中数学联赛题]

分析 直观上想,要使选出的 n 行 n 列包含所放的 $3n$ 枚棋子,应尽量选含棋子多的行或列;当所选的 n 行至少有 $2n$ 个棋子时,命题便得证了.

但是,题目没有告诉我们哪些行的棋子多,怎么办?用字母表示并作有序化的假设便可迎刃而解.

证明 设 $3n$ 枚棋子放进棋盘后,$2n$ 行上的棋子数从少到多分别为$a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$,有

$$0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_{2n}; \quad ①$$

且
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n} = 3n, \quad ②$$

从而
$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} = 3n - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n). \quad ③$$

当 $a_{n+1} \geqslant 2$ 时,由③的左边及①,有

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}\geqslant na_{n+1}\geqslant 2n. \quad ④$$

当 $a_{n+1}<2$ 时，由③的右边及①，有

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}\geqslant 3n-na_n\geqslant 2n.$$

总之恒有 $$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}\geqslant 2n.$$

据此，可先取棋子数分别为 $a_{n+1},a_{n+2},\cdots,a_{2n}$ 所对应的 n 行，由于剩下的棋子数不超过 n，因而至多取 n 列必可取完全部 $3n$ 个棋子. □

例6－70　给定平面上不全在一条直线上的 n 个点，则必有一直线恰好通过这 n 个点中的两个点[1].

证明　连结 n 个点中的每两点可得到 m（不超过 C_n^2）条不同的直线. 从 n 个点向 m 条直线引垂线可得有限个非零距离，其中必有一个取最小值. 不妨设 P 点到直线 l 的距离取最小值（优化假设！）. 下面证明，直线 l 恰好通过 n 点中的两个点.

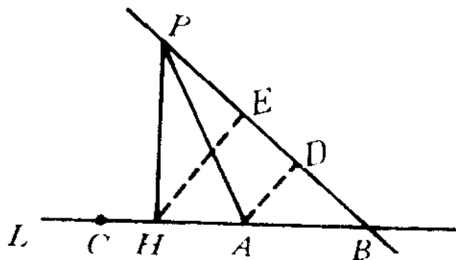


图6－59

如图6－59，若不然，l 至少通过 n 个点中的3个点 A,B,C. 记 P 在 l 上的垂足为 H，则 H 将 l 分为两段，其中一段上至少有 A,B,C 中的两个点，不妨设 A,B 在同一段上，且

$$0\leqslant AH<BH.$$

连 PA,PB，则 $$PA<PB.$$

则 A 到 PB 的距离 AD 不大于 H 到 PB 的距离 HE，更小于 P 到 l 的距离，$PH>HE\geqslant AD$，这与 PH 的最小性假设矛盾. 故 l 恰好通

---

① 这个有趣的问题是英国数学家希尔维斯特（sylvester，1814—1897）在1893年提出的，1933年才由数学家T·伽莱（Gallai）找到一个复杂的证明. 后来，数学家L·M·凯里（Kelly）给出一个十分简单的解法，用的正是优化假设.《美国科学新闻》于1980年报道过此事.

过 n 个点中的两个点. □

由这个例子可以看到,极端状态常有些非平凡的性质,它可以成为我们解题的突破口.

7. 挖掘隐含条件

隐含条件是已知本身已包含但又未明确给出的条件. 当说 $\triangle ABC$ 时就同时隐含着 $a+b>c, b+c>a, c+a>b$ 及 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$;当给出函数式 $f(x)=\sqrt{x-3}$ 时,也就同时隐含着 $x-3\geqslant 0$;当给出二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根时,就同时隐含着 $a\neq 0$ 且 $b^2-4ac\geqslant 0$. 更一般地,隐含条件常常表现为:

(1) 概念、定理成立的前提;

(2) 题目叙述中所暗示的限定;

(3) 图形中存在着但未指明的关系;

(4) 已知事项间的内在联系;

(5) 运动变化中的不变性质.

在例 1-8(P.25)中,z_3, z_1 与 z_2 的等量关系隐含在图形中,这些关系一旦明朗,问题的解决则近乎完成.

在例 1-13(P.31)的方程中,隐含着系数和为 0 的条件,它清清楚楚地写在我们的眼前,但没有明确指出来.

在例 3-7(P.124)中,找出 $\angle 3$ 既与 $\angle 2$ 成对顶角、又与 $\angle 1$ 成同位角是解题的重大进展,但这只不过是图形中存在着但未指明的关系.

在例 3-11(P.135)中,$1=3^x\cdot 3^{-x}$ 是一个隐含条件,看透这一点,只须心算即可完成解方程.

在例 4-18(P.177)中,改进的解法来源于对左右两边被开方数关系的揭示(隐含条件)

$$3x-4=3(x-3)+5, \qquad ①$$

当 $x\geqslant 3$ 时,显然有

$$3(x-3)+5\geqslant x-3.$$

而 $x-3\geqslant 0$ 本身也是一个隐含条件.

在例 5-2(P.273)的配方解法中,用到了一个隐含条件:若非负数之和为零,则各个非负数全部为零.由此,便把一个方程变成了二元方程组.

在例 2-4(P.63)中,甲、乙运动的速度与路程都不一样,但相遇时运动的时间相等,这是一个不变性质,据此可列出方程.

如此等等说明,隐含条件的明朗化是一项有效增设,它能引起解题的重大进展.与此相反的是,未深入挖掘隐含条件将导致解题受阻或失误.正因为解答中忽视了某些隐含条件,所以解题过程或是充分而不必要的,或是必要而不充分的,或是既不充分又不必要的.

寻找隐含条件的基本途径是深入理解题意,常常离不开观察.

例6-71　在实数范围内,设

$$x=\left[\frac{\sqrt{(a-2)(|a|-1)}+\sqrt{(a-2)(1-|a|)}}{1+\frac{1}{1-a}}+\frac{5a+1}{1-a}\right]^{1988},$$

则 x 的个位数字是(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 6

解　x 是字母表示的数,结构又很复杂,怎么能知道它的个位数字呢?其实这只是表面现象.在 x 的表达式中有两个根号,被开方数恰成相反数,由被开方数非负可知

$$(a-2)(|a|-1)=0, \qquad ①$$

有

$$a=2,\ a=1,\ a=-1.$$

但 $a=2,a=1$ 时均出现分母为零,故只有 $a=-1$,得

$$x=\left[\frac{5(-1)+1}{1-(-1)}\right]^{1988}=(-2)^{1988}=16^{497}.$$

由 $6^n\equiv 6(\mathrm{mod}10)$知,应选 D. □

这里,解题的关键是挖掘出隐含条件①.

例6-72　设有 n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,其中每一个不是 $+1$ 就是 -1,且

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}=0, \qquad ①$$

求证 n 是 4 的倍数.

讲解 首先一个隐含条件是 $\frac{x_1}{x_2},\frac{x_2}{x_3},\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n},\frac{x_n}{x_1}$ 只能取 $+1$ 或 -1,已知①式为

$$\pm1\pm1\pm\cdots\pm1=0. \qquad ②$$

由①、②又可得两个隐含条件：n 个 ±1 的和为 0(从而 -1 的个数是 $\frac{n}{2}$),其积为 1(从而 -1 的个数是偶数). 这就弄清①中所隐含的 3 个条件:

(1) 各项为 $+1$ 或 -1;

(2) 各项之和为 0;

(3) 各项之积为 1.

下来求解将没有什么困难(解法略).

例 6-73 从数集 $\{3,4,12\}$ 开始,每一次从其中任选两个数 a, b,用 $\frac{3}{5}a-\frac{4}{5}b$ 和 $\frac{4}{5}a+\frac{3}{5}b$ 代替它们. 能否通过有限多次代替得到数集 $\{5,6,8\}$?

分析 盲目试验可能会抓不住要领,本题的关键是"代替",亦即将 (a,b) 变为

$$\begin{cases} a_1=\frac{3}{5}a-\frac{4}{5}b, \\ b_1=\frac{4}{5}a+\frac{3}{5}b; \end{cases}$$

这是一个平面上的旋转变换,它具有保距性,即

$$\left(\frac{3}{5}a-\frac{4}{5}b\right)^2+\left(\frac{4}{5}a+\frac{3}{5}b\right)^2=a^2+b^2.$$

抓住这个不变性可以作为解题的突破口.

解 对于数集 $\{a,b,c\}$,经过一次替代后,得出

$$\left\{\frac{3}{5}a-\frac{4}{5}b,\ \frac{4}{5}a+\frac{3}{5}b,\ c\right\},$$

有

$$\left(\frac{3}{5}a-\frac{4}{5}b\right)^2+\left(\frac{4}{5}a+\frac{3}{5}b\right)^2+c^2=a^2+b^2+c^2.$$

即每一次替代后，保持3个元素的平方和不变，由

$$3^2+4^2+12^2\neq 5^2+6^2+8^2,$$

知不能由$\{3,4,12\}$替换为$\{5,6,8\}$. □

8. 引进辅助参数

辅助参数的引进可以分解复杂的结构，增加参与运算的关系或数式，同时产生一个动态过程，为运动观点、参数方法的运用创造了机会. 这一技术在解方程、条件等式证明、不等式证明、连比式问题及解析几何中有广泛的应用. 在例1－5(P.20)的分析中，我们引进参数得出平面系，逻辑地找出简捷解法.

例6－74　求函数$y=\sqrt{x-4}+\sqrt{15-3x}$的值域.

解　易知定义域为$4\leqslant x\leqslant 5$，可设

$$x=4+\sin^2 t,\quad 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}. \qquad ①$$

则
$$y=\sin t+\sqrt{3}\cos t=2\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right).$$

当$t=0$时$y=\sqrt{3}$，当$t=\frac{\pi}{6}$时$y=2$，当$t=\frac{\pi}{2}$时$y=1$. 故函数的值域为$[1,2]$. □

这里，引进三角参数式①是有效增设，它提供了三角公式使用的条件并将函数表达式化简. 若设

$$\begin{cases}u=\sqrt{x-4},\\ v=\sqrt{15-3x}.\end{cases}$$

则
$$\begin{cases}u+v=y,\\ 3u^2+v^2=3.\end{cases}$$

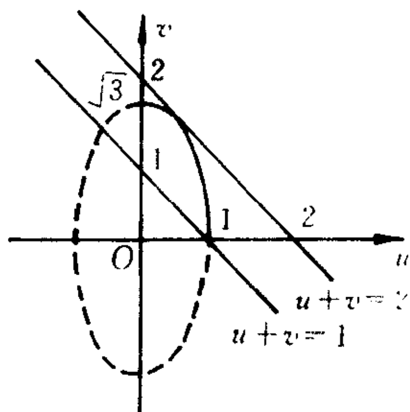


图6－60

如图6－60，$y_{\min}=1$，$y_{\max}=2$. 问题的几何意义十分明显.

例6－75　对于非零实数a,b,c，若

$$\frac{b-c}{a}=\frac{c-a}{b}=\frac{a-b}{c},$$

则 $a=b=c$.

解① 引进比值,设

$$\frac{b-c}{a}=\frac{c-a}{b}=\frac{a-b}{c}=k.$$

得关于 a,b,c 的齐次线性方程组

$$\begin{cases} ka-b+c=0, & ①\\ a+kb-c=0, & ②\\ -a+b+kc=0. & ③\end{cases}$$

有非零解,故其系数行列式为 0

$$0=\begin{vmatrix} k & -1 & 1\\ 1 & k & -1\\ -1 & 1 & k\end{vmatrix}=k(k^2+3).$$

但 $k^2+3>0$,得惟一解 $k=0$,从而

$$b-c=c-a=a-b=0.$$

有 $a=b=c$. □

这里参数的引进把原来两个独立的等式增加到 3 个,并把它们的关系从连环套中解脱出来(有较大的自由度),进而组成一个新的方程组.使问题得以简便而完善地解决.由解题过程还可看到,若在复数范围内求解,k 有 3 个取值: $0,\sqrt{3}i,-\sqrt{3}i$.

例 6-76 已知椭圆 $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{16}=1$,直线 l: $\frac{x}{12}+\frac{y}{8}=1$. P 是 l 上一点,射线 OP 交椭圆于点 R,又点 Q 在 OP 上且满足 $|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$. 当点 P 在 L 上移动时,求点 Q 的轨迹,并说明轨迹是什么曲线.

解 问题的难度在于 $Q(x,y)$ 同时受到两个动点 $P(x_P,y_P)$, $R(x_R,y_R)$ 的约束,为了化解这个难点,我们引进辅助参数 $\lambda\in(0,1)$,

---

① 罗增儒.比例与行列式.数学通报,1985,6,P.18.

使
$$\frac{OQ}{OR}=\frac{OR}{OP}=\lambda,$$

则
$$\begin{cases} OR=\dfrac{OQ}{\lambda}, \\ OP=\dfrac{OR}{\lambda}=\dfrac{OQ}{\lambda^2}. \end{cases}$$

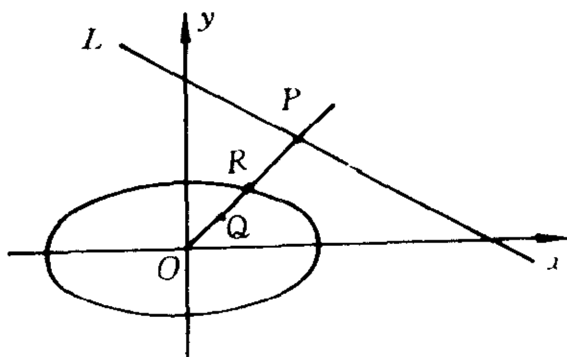


图 6-61

向两坐标轴作投影,有

$$\begin{cases} x_R=\dfrac{x}{\lambda}, \\ y_R=\dfrac{y}{\lambda}; \end{cases}\qquad \begin{cases} x_P=\dfrac{x}{\lambda^2}, \\ y_P=\dfrac{y}{\lambda^2}. \end{cases}$$

分别代入所在的曲线方程,得

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{16}=\lambda^2, \\ \dfrac{x}{12}+\dfrac{y}{8}=\lambda^2; \end{cases}$$

相减即得 Q 的轨迹方程(相当于已知两方程相减)

$$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{16}=\frac{x}{12}+\frac{y}{8},$$

其中由 $\lambda\neq0$ 知,不包括原点,变形得

$$\frac{(x-1)^2}{\dfrac{5}{2}}+\frac{(y-1)^2}{\dfrac{5}{3}}=1(x^2+y^2\neq0),$$

这是中心在(1,1),长半轴为$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$,短半轴为$\dfrac{\sqrt{15}}{3}$,且长轴与 x 轴平行的椭圆,不包括原点. □

9. 设置中途点

中途点是实施正确证明的引理,中途点是沟通证明思路的桥梁.为了证明 $A\Rightarrow B$,我们找出一个中途点 C,使得 C 是 A 的必要条件,又是 B 的充分条件,则

$$A\Rightarrow C\Rightarrow B.$$

思路畅通了,解法找到了.设置中途点 C 是一个有效增设.

例6-77 对 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,求证

(1) $\cos\alpha<\sin\alpha$;

(2) $(\cos\alpha)^{\sin\alpha}<(\sin\alpha)^{\cos\alpha}$.

证明 (1) 在 $\cos\alpha$ 与 $\sin\alpha$ 之间找一个中途点

$$\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4},$$

从而
$$\cos\alpha<\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}<\sin\alpha. \square$$

于是,中途点的引进把不同名函数的比较大小转化为同名函数的比较大小.一方面 $\cos\alpha$ 与 $\cos\frac{\pi}{4}$ 是同名函数,在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 上是递减的;另方面 $\sin\alpha$ 与 $\sin\frac{\pi}{4}$ 也是同名函数,在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 上是递增的.通过中途点整个思路就畅通了.

(2) 引进中途点 $(\cos\alpha)^{\cos\alpha}$,一方面由指数函数的单调性,有

$$(\cos\alpha)^{\sin\alpha}<(\cos\alpha)^{\cos\alpha}.$$

另一方面由幂函数的单调性,有

$$(\cos\alpha)^{\cos\alpha}<(\sin\alpha)^{\cos\alpha}.$$

从而
$$(\cos\alpha)^{\sin\alpha}<(\sin\alpha)^{\cos\alpha}. \square$$

例6-78 已知 n 个互不相等的正整数的倒数的平方和为 S_n,求证 $0<S_n<2$.

证明 设这 n 个正整数为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 并作有序化假设

$$a_1<a_2<\cdots<a_n,$$

则
$$a_1\geqslant 1,a_2\geqslant 2,\cdots,a_n\geqslant n,$$

有
$$a_1^2\geqslant 1,a_2^2\geqslant 1\cdot 2,\cdots,a_n^2\geqslant (n-1)n.$$

得
$$S_n=\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}$$
$$<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$
$$=2-\frac{1}{n}$$
$$<2.\ \square$$

这里 $T_n=1+\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$ 是一个中途点，一方面

$$S_n<T_n,$$

另方面
$$T_n<2.$$

整个思路就沟通了.

发现并设置选择得当的中途点,是解题获得进展的一个标志.(继续见例 6—118)

6-2-10　以美启真

数学美是一种人的本质力量通过宜人的数学思维结构的呈现.

出于数学美的考虑而导致解题思路的设计与发现,叫做以美启真.这种解题策略将数学的简单美、对称美、和谐美、奇异美与问题的条件或结论相结合,再凭借知识经验与审美直觉从而确定解题的总体思路或入手方向.于是,美的启示就在解题过程中起到了宏观指导和决策的作用,从而,体现了、也形成了数学中的美学方法①,它是数学解题中的一个重要策略②,也是数学教学中的一个基本原则③.

1. 在数学史上,数学美是数学发展的伟大动力.虚数 i 的引进、非欧几何的创立、射影几何的诞生,无不体现了数学美对数学发现的指导作用.

---

① 徐本顺、殷啟正著.数学中的美学方法.江苏教育出版社,1990 年 7 月第 1 版.

② 参考文献[26]任樟辉.数学思维论,P.300.

③ 钟以俊.一条新的教学原则——以美启真.教学科学,辽宁师范大学,1988 年第 2 期,P.57.

这样简单的方程 $x^2+1=0$ 竟没有解(实数解),实在令人可惜而遗憾,当人们规定 $i^2=-1$ 时,还没有找到虚数的富有成果的应用,只是获得了审美情感的满足.然而,美感是我们必须信任的向导,黑格尔说:“美必然是真的.”i 的引进解决了数学内在矛盾(开方运算不能进行)所产生的不协调、不和谐、不雅致,一句话,使数学更美了.而虚数找到应用之后就更美了.

正是对欧氏第五公设“非自明性”的不满而开始了关于平行公理“独立性”的长达1千多年的研究,并最终促成了非欧几何的创立,这可以认为是对数学简单美的追求而导致数学突破性的革命.

在欧氏几何中,点和直线的关系并不是完全对称的,因为过任两点总可以连一条直线,而任两条直线却未必有一个交点.为了解决这个“不对称性”,法国数学家笛沙格提出设想:与圆一样,直线也是一种封闭图形,其两端的连接点在无穷远处,从而直线上就有一个无穷远点,这个无穷远点就是平行直线的交点,从这一假设出发,笛沙格初步发展起了射影几何理论.其中一个著名的结果就是所谓的“对偶原理”:在射影平面内的几何定理中,把“点”换成“直线”,“直线”换成“点”,所得的命题仍是射影几何的定理.所以,对偶原理乃至射影几何的发现,正是追求对称美、统一美、奇异美的结果.

在推导椭圆标准方程时,引进短半轴 b 是以美启真的一个简单例子.若使用椭圆定义的原始数据,椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \quad ①$$

出于整齐对称性的考虑,我们用一个更简单的数 $b>0$ 去代替 $\sqrt{a^2-c^2}$,得到

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \quad ②$$

方程简单了,整齐了,好看了,殊不知,这个 b 有明显的几何意义,b 的引进使椭圆图形美的神韵跃然纸上,匀称、对等、中心对称、轴对称等赏心悦目的性质全都在标准方程中显露无遗.

数学家高斯说："去寻求一种最美和最简捷的证明，乃是吸引我研究的主要动力."美是真的光辉，依靠这种光辉可以照亮认识数学真理的道路，并给探求者一种认识道路的内驱力.

2. 数学美不仅在宏观上是数学发展的伟大动力，而且在微观上也是数学解题中探求思路、发现解法的一个源泉.

(1) 简单美. 这包括计算过程短、推理步骤少、逻辑结构浅显而明确、表达准确而简明. 许多数学问题，虽然其表现形式看上去较为复杂，但本质总会存在简单的一面的. 因此，如果能用简单的知识、简化的方法对问题进行整体处理或本质分类，则往往能找到解题的简易途径. 在例 3-9(P.128)中，我们透过已知条件中复杂的外形

$$a^2-a-2b-2c=0,$$
$$a+2b-2c+3=0;$$

找出其与结论的直接联系，将其变形为

$$(a+2b)+2c=a^2,$$
$$(a+2b)-2c=-3;$$

并相乘，直接得出

$$c^2=a^2+b^2+ab=a^2+b^2-2ab\cos120^\circ.$$

体现了对简单美的追求，也体现了简单美本身.

在例 3-11(P.135)的分析中，简单美的追求将一个相对复杂的解法改进为"可以在 30 秒内心算完成". 本书中的大批例子都体现了对简单美的追求.

直觉也告诉我们，解题中如果推演过程越来越麻烦，杂乱无章，我们就会怀疑"可能出错了"；如果结果简单、有序性强或整体上和谐统一，那么我们就相信有更大的正确性.

(2) 对称美. 对称是最能给人以美感的一种形式，它是整体中各个部分之间的匀称和对等. 在数学上可以表现为数式或图形的对称，命题或结构的对偶、对应、对逆等. 有些数学问题，当我们用对称的眼光去观察时，可通过形象的补形(轴对称、中心对称、镜面对称等)而造成对称，可采用对称变换调整元素间的结构，可实施共轭原理产生

对偶命题,可出于周期性的考虑而简化演算与推理,这一切都有助于思路的探求.

在例 4-33(P.206)解题思路的分析中,我们认为

$$\frac{S_{n+1}}{S_n}>\frac{S_{n+2}}{S_{n+1}}$$

左右两边结构相同,有较好的对称性,从而找到一批简捷的解法.

在例 5-40(P.315)中,利用了 a,b,c 的"轮换对称"性,作出了 a 为最大的假设,使得一道国际数学奥林匹克难题只用了一行的书写①:

$$a(b-c)^2(b+c-a)+b(a-b)(a-c)(a+b-c)\geqslant 0.$$

在例 4-26(P.190),例 6-35(P.378),例 6-58(P.403)中使用了图形的对称性,使求解简捷而奇异.

在§6-2-9 的构造对偶命题和重复等价条件中,都体现了对称性考虑对解题的指导作用.而习题五第 11 题(P.339)的解法则放射着对称美的光芒.正如德国数学家、物理学家魏尔所说:"美和对称紧密相关".

(3) 和谐美.或称统一美,是指部分与部分、部分与整体之间的和谐一致,是指在不同的数学对象或同一对象的不同组成部分之间所存在的内在联系或共同规律.统一性是数学结构美的重要标志,是数学家不懈追求的永恒目标,也是数学发现与创造的美学方法之一.正因为在数学的内容与内容之间、内容与形式之间、形式与形式之间存在着本质上的和谐与统一,所以数学解题中的信息转换、分合并用、进退互化、正反相辅等等能够畅通无阻.转化为更加协调的形式、化归为已经解决的问题也总能得以施行.而知识链、方法链也正因此而客观存在着,并为我们解题思绪的流淌而源源喷吐甘泉.在例 4-29(P.193)中,我们看到了各学科、各章节之间奇迹般的联系;例 4-35(P.215)又进一步强化了我们这种统一性、和谐性的感受,并且,

① 当年,西德选手伯恩哈德·李使用此解法获得特别奖.

当中一些意想不到的解法还使我们看到奇异性与和谐性的统一.

(4) 奇异美.这是指所得出的结果或有关的发展是如此地出乎意料,使人既惊奇又赞赏与折服.徐利治教授说:"奇异是一种美,奇异到极度更是一种美."奇异性的结果对数学发展的影响无论作何种评价都不会过分,因为它意味着旧观念的崩溃和新思想的诞生.在数学解题中,奇异性的存在使得构造反例、寻求特例、反证、极端等手法能够发挥出乎意料的作用.而解题中的正难则反、以退求进、逆向思维、发散思维等可以认为是对奇异性的通俗理解.在例1-1,例3-9,例4-24,例4-35(证明5)中,都有简便得奇异的解法,而例4-12,例4-27,例4-28,例4-34则体现着思维发散的奇异美.

在例4-12(P.168)中,我们由行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin A & \cos A \\ 1 & \sin B & \cos B \\ 1 & \sin C & \cos C \end{vmatrix} = 0$$

看到了单位圆上的三点$(\sin A, \cos A)$,$(\sin B, \cos B)$,$(\sin C, \cos C)$共线.

在例4-27(P.191)中,我们又看到了双曲线上的三点$\left(a, \frac{1}{a}\right)$,$\left(b, \frac{1}{b}\right)$,$\left(c, \frac{1}{c}\right)$不共线.

在例4-28(P.191)中,我们由

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c,$$
$$a\cos\varphi + b\sin\varphi = c,$$

看到了两条重合的直线.

$$ax + by = c,$$
$$x\cos\frac{\theta+\varphi}{2} + y\sin\frac{\theta+\varphi}{2} = \cos\frac{\theta-\varphi}{2}.$$

在例4-34(P.211)中,我们大胆地将已知两式

$$a^2 + b^2 - kab = 1,$$
$$c^2 + d^2 - kcd = 1$$

相乘.

所有这些,都有奇异性、发散性和美.

数学美的各种表现在解题中的指导作用是相互结合、渗透并用的.

例6-79 已知 $\dfrac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta}+\dfrac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta}=1$,

求证 $\dfrac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}=1$.

讲解 这是我们在例4-43(P.241)处理过的题目,其证明1充分利用了条件的特殊性,也体现了奇异美,但没有充分体现题目的条件与结论之间结构上的对称性: $\cos^2\alpha$ 与 $\cos^2\beta$ 对换, $\sin^2\alpha$ 与 $\sin^2\beta$ 对换,由这种对称性的启引,我们猜想 $\sin^2\alpha=\sin^2\beta$, $\cos^2\alpha=\cos^2\beta$. 为了计算上的方便,我们设

$$x=\sin^2\alpha,\ y=\sin^2\beta,\ x,y\in(0,1).$$

则原式变为 $$\frac{(1-x)^2}{1-y}+\frac{x^2}{y}=1, \qquad ①$$

有 $$y(1-x)^2+x^2(1-y)=y(1-y),$$

即 $$(x-y)^2=0.$$

得 $$x=y. \qquad ②$$

把①中的 x 与 y 互换,得

$$\frac{(1-y)^2}{1-x}+\frac{y^2}{x}=1, \qquad ③$$

即 $$\frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}=1. \ \square$$

这是对称性启示解题思路的成功例子.此题还可用柯西不等式取等号的条件来证.

例6-80 如图6-62,在平面上给定半径为1的圆与 n 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,求证 在圆上总可以找到点 M,使

$$MA_1+MA_2+\cdots+MA_n\geqslant n.$$

讲解 也许我们想起一个思路,建立坐标系,使已知圆为

$$x^2+y^2=1.$$

已知点为 $A_i(x_i,y_i)$. 问题转化为存在 $M(\cos\theta,\sin\theta)$，使

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-\cos\theta)^2+(y_i-\sin\theta)^2}\geqslant n.$$

即
$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^2+y_i^2-2(x_i\cos\theta+y_i\sin\theta)+1}\geqslant n.$$

由于表达式越来越复杂，又不能保证求和式的每一项都大于或等于 1. 简单性的直觉警告我们，这个思路并不好.

回到图 6－62，我们对它有一种整体性不平衡的感觉，怎样才能整体上更和谐一些呢？先考虑特殊情况只有一个点 A. 如图 6－63，这时连结 AO，交圆于 MM'，则直径两端点中必有一个与 A 的距离不小于 1，命题成立.

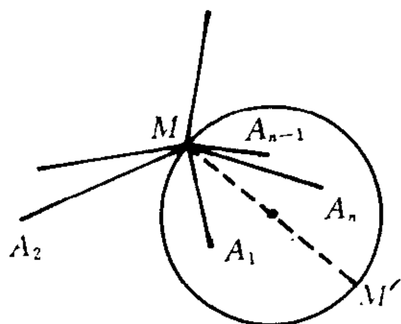


图 6－62

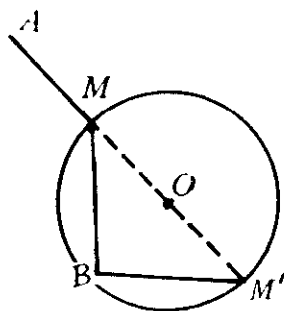


图 6－63

当问题增加到两个点 A,B 时，我们虽然不能连两条直径，但可以连 BM,BM'（如图 6－63），有

$$AM+AM'\geqslant MM'=2,$$
$$BM+BM'\geqslant MM'=2;$$

相加
$$(AM+BM)+(AM'+BM')\geqslant 4. \quad ①$$

当中必有某一括号内的和不小于 2. 于是，整个思路已经打通，这里式①即有简单性又有和谐性的启示.

证明　任取一条直径 MM'，连 $A_iM,A_iM'(i=1,2,\cdots,n)$，有

$$A_iM+A_iM'\geqslant MM'=2,$$

得 $$\sum_{i=1}^{n} A_iM + \sum_{i=1}^{n} A_iM' = \sum_{i=1}^{n}(A_iM + A_iM') \geq 2n.$$

则有 $$\sum_{i=1}^{n} A_iM \geq n \text{ 或} \sum_{i=1}^{n} A_iM' \geq n. \qquad ②$$

所以，圆周上可以找到这样的点 M（或 M'）使①成立. □

为了找到满足条件的点，我们动用了圆周上的两个点，采用"二保一"的策略.

例6-81 如图6-64，$A_1B_1C_1D_1$ 是长方体的一个斜截面，其中 $AB = 4\text{cm}$，$BC = 3\text{cm}$，$AA_1 = 5\text{cm}$，$BB_1 = 8\text{cm}$，$CC_1 = 12\text{cm}$，求该几何体的体积.

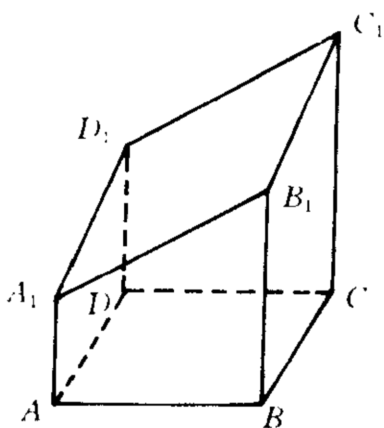


图6-64

解 出于对称性与和谐性的考虑，我们给已知几何体补充一个相等的几何体，使成为一个长方体. 其高为 $5+12=17\text{cm}$，则已知几何体的体积为

$$V = \frac{1}{2}(5+12)\times 3\times 4 = 102(\text{cm}^3). \square$$

这使得 $BB_1 = 8\text{cm}$ 成为多余条件.（习题一第12题，P.34）

例6-82 对 $0<b<a$，求证

$$b < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < a.$$

讲解 这个不等式链本身、以及下面给出的统一证明（代数的、三角的、几何的），体现了数学的统一性.

证明1 对正数 b,a 作定比分点①

---

① 也可以作增函数 $f(x) = \dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}}{a^x+b^x}$，转化为 $f(-2)<f(-1)<f\left(-\dfrac{1}{2}\right)<f(0)<f(1)$.

$$f(x)=\frac{b+ax}{1+x}\ (x\geqslant 0),$$

这是一个单调增函数，由

$$0<\frac{b}{a}<\sqrt{\frac{b}{a}}<1<\frac{a}{b},$$

得
$$f(0)<f\left(\frac{b}{a}\right)<f\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)<f(1)<f\left(\frac{a}{b}\right),$$

从而
$$f(0)<f\left(\frac{b}{a}\right)<f\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)<f(1)<\sqrt{f(1)f\left(\frac{a}{b}\right)},$$

得
$$b<\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}<a.\square$$

证明 2　作平均值三角变换①

$$\begin{cases} a=R(1+\cos\theta)=2R\cos^2\dfrac{\theta}{2}, \\ b=R(1-\cos\theta)=2R\sin^2\dfrac{\theta}{2}, \end{cases}$$

其中 $R=\dfrac{a+b}{2}$，$0<\theta<\pi$. 有

$$\sqrt{ab}=R\sqrt{1-\cos^2\theta}=R\sin\theta,$$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=R\sqrt{1+\cos^2\theta},$$

$$\frac{2ab}{a+b}=\frac{(R\sin\theta)^2}{R}=R\sin^2\theta,$$

由
$$\sin^2\theta<\sin\theta<1<\sqrt{1+\cos^2\theta},$$

两边乘以 R 即得

$$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

进而

$$b=\frac{2ab}{a+a}<\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}<a.\square$$

① 罗增儒.平均值变换与不等式证明.中学生数学,1984,6,P.10.

证明3① 以 a 为下底，b 为上底作一个梯形 $ABCD$，再作4条直线均平行于两底分别交两腰于 $A_iB_i(i=1,2,3,4)$. 其中

A_1B_1 平分梯形的面积，有

$$A_1B_1=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}};$$

A_2B_2 为中位线，有

$$A_2B_2=\frac{a+b}{2};$$

A_3B_3 分梯形为两个相似的梯形，有

$$A_3B_3=\sqrt{ab};$$

A_4B_4 过两对角线的交点，有

$$A_4B_4=\frac{2ab}{a+b}.$$

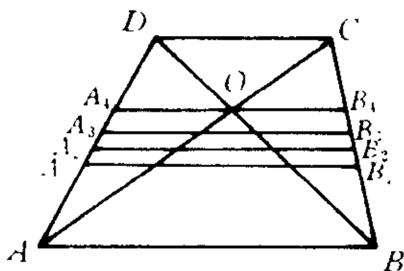


图 6－65

由 $CD<A_4B_4<A_3B_3<A_2B_2<A_1B_1<AB$，

得 $$b<\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}<a.\square$$

还可以用半圆上的有关线段来表示这个不等式链，不赘述.

能用数学美的思想来指导解题，表明对数学美的认识已从欣赏、理解的阶段，上升到策略运用的台阶；同时也表明，对数学解题已摆脱套用现成模式的层次，发展到较为自觉、自主地运用辩证思维的水平. 数学美能给我们一种认识题意、寻找思路、设计解法的新角度、新方法和新思路.

6－3 策略意识的培养

策略意识的培养，一方面需要系统掌握上面谈到的各种策略，并有意识地渗透到每一道题的具体分析中去；另一方面还要根据具体的学科、具体的题型研究相应的策略. 作为示例我们来谈4个问题，

① 当然这还不是严格意义上的证明，但确实能体现统一性.

它们属于不同的方面从而也体现了解题策略的层次性.

6-3-1 从学科结构到解题策略

分析学科结构的特征,由此产生解决该学科问题的一些基本考虑或总体把握,这是策略意识培养的一个重要方面.

比如,平面几何的公理化结构,使得所有的定理都有少数几个共同的公理缘由,这样一个演绎体系特别适宜使用综合——分析法.又由平面几何的研究范围知,解平面几何问题最基本的工具是三角形的全等与三角形相似(全等法、相似法).其一般性格式为"由一找三":要证一个等式,我们去证明相应的两个三角形全等(或相似),而由判别定理知,要证3个等式(SAS,ASA,SSS).这当中,如果对应的三角形并不现成,那就要作辅助线;而新证的3个等式中若有一个是未知的,则又要重复一次"由一找三"的格式.以上分析,使我们从学科结构上看清了平面几何解题思路的脉络,同时,也从方法论的角度揭示了平面几何证题的两个主要难点:作辅助线和串联式的"由一找三"①.

又如,立体几何是平面几何的"升维",因此,升维与降维的相结合、互转化是解决空间图形的一个基本思考.由此产生的"线线、线面、面面间转化"以及"平面化的思考"(主平面、截面、展平、投影等)正是立体几何解题的最基本、最常用的方法.

例6-83 有 n 个圆,其中每两个圆都相交于两点,并且每3个圆都不相交于同一点.求证这 n 个圆把平面分成 n^2-n+2 个部分.

讲解 这是数学归纳法教学中一个比较难的题目,为了突破难点,关键是分析平面图形的结构.众所周知,平面图形的基本元素是点和线.由于点线间位置的不同、数量的变化,构成了千姿百态的图形和图形的百态千姿.这是对平面几何学科思想的一个简单认识.在

---

① 参见张景中著《教育数学探索》P·9"难在何处",四川教育出版社,1994年8月第1版.

这种认识指导下,当圆的个数从 k 个增加到 $k+1$ 个时,当然影响到平面上交点的数量变化,从而引起平面块数的变化.因此,弄清这种变化的几何结构与数量关系就成为突破难点的钥匙.$k=1$ 时,平面分成两部分;$k=2$ 时,第 2 个圆与第 1 个圆有两个交点,这两个交点把第 2 个圆分成两段弧,每段弧把所在的平面一分为二,于是"新增加的交点数与新增加的平面块数相同".设 k 个圆时,把平面分成

$$f(k)=k^2-k+2$$

个部分.则第 $k+1$ 个圆与前 k 个圆交于 $2k$ 个点,这 $2k$ 个点把第 $k+1$ 圆分成 $2k$ 段弧,每一段弧都把所在的平面一分为二,共增加了 $2k$ 块平面,得

$$f(k+1)=f(k)+2k,$$

有了这个关系式,剩下来的工作仅仅是简单的恒等变形

$$f(k+1)=(k^2-k+2)+2k=(k+1)^2-(k+1)+2.$$

可见,在这个问题的处理中,学科结构的思想对问题的解决产生了决策性的作用.

对解析几何作学科结构的分析更容易悟出解题的基本方法——坐标化建立方程(组)、求解或讨论方程(组).

6.3-2 从选择题的结构到求解体系

选择题大都可以从题干出发,通过求解对照来作出选择,这是最常用的方法,与求解常规解答题几乎没有什么区别,因而也就不能体现选择题自身的特点,反映不出解选择题的策略.一般说来,解选择题要充分利用题目本身所提供的新信息,把常规题变为特殊技巧的快速解答题,避免"小题大做".选择题的新信息主要是结构形式上的特点和回答方式上的特点.根据这些特点找出选择题的求解体系,是解题中培养策略意识的好途径

例 6-84 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中,若 $a_5a_6=9$,则 $\log_3a_1+\log_3a_2+\cdots+\log_3a_{10}=(\quad)$.

A. 12　B. 10　C. 8　D. $2+\log_35$

[1993年数学高考题]

水平1 从已知条件中求出 a_1, q(或说求出 a_n 的表达式),从而逐项求出 $\log_3 a_1, \log_3 a_2, \cdots, \log_3 a_{10}$,再相加便可得出结果.这个想法,表面上看是有道理的,但实际上是办不到的,已知条件 $a_5a_6=9$ 不能惟一确定一个数列.一般来说,求两个未知数 a_1, q 通常需要两个独立的等量关系.

水平2 由原式 $=\log_3 a_1a_2\cdots a_{10}$ 知,只须求

$$a_1a_2\cdots a_{10}=a_1^{10}q^{1+2+\cdots+9}=a_1^{10}q^{45},$$

但

$$9=a_5a_6=(a_1q^4)(a_1q^5)=a_1^2q^9,$$

故得

$$\text{原式}=\log_3 a_1^{10}q^{45}=\log_3(a_1^2q^9)^5=\log_3 3^{10}=10.$$

对照4个选择支,应选B. □

这个解法与做一道解答题没有任何区别,选择题的特点体现不出来,是“小题大做”了.

水平3 由等比数列的性质知

$$9=a_5a_6=a_4a_7=a_3a_8=a_2a_9=a_1a_{10},$$

有

$$\text{原式}=\log_3(a_5a_6)^5=\log_3 3^{10}=10. \ \square$$

这个解法对知识的理解深度比水平2有所提高,但仍然没有用到选择题结构形式与回答方式上的特点(也可以把等比中项的性质换成等差中项的性质 $\log_3 a_1+\log_3 a_{10}=\log_3 a_2+\log_3 a_9=\cdots=\log_3 a_5+\log_3 a_6$).

水平4 结论暗示,不管数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是什么(有无穷多个),答案都是惟一的,故只须取一个满足条件的特殊数列 $a_5=a_6=3$, $q=1$ 就可以了.这样一想,心算即可在30秒内作出选择,为B. □

1. 选择题的结构特征

选择题像常规题一样有前提因素和结论因素,但各有自己的特点,可以细分为4部分.

前提由3部分组成,是怎样解这道题的信息源.

(1) 统一前提——所有选择题的共同说明词,即“4个选择支中有且只有1个正确”.(至今,数学考试中只出现“四选一”的单项选

择题.)

(2) 具体前提——类似于标准解答题中的已知条件,叫做选择题的题干.

(3) 选择前提——4 个可供挑选的选择支,其中错误的 3 支称为诱误支.这是一个独特的条件,一方面有结论因素(结论不会在 4 个选项之外),但又不像证明题那样明确指出结论是那一项;另方面也有已知因素(结论必在 4 个选项之内),可又不像题干那样肯定是结论成立的前提.但决不要忘记,这是一个可供使用的已知信息!特别地,当题干的发散度较大时,对于找出惟一的选择项并不充分,只是在 4 个选择支的范围内才惟一确定,还非得用选择前提参加推理不可(参见例 6-92,例 6-94).

结论是第 4 部分,既简单又独特.

(4) 选择结论——填上代号,就是根据"统一前提"、"具体前提"、"选择前提"找出结论的代号.

2. 选择题的求解策略

由上面的结构特征分析,可以得出解答选择题的 5 个基本策略.

(1) 由"统一前提"知,4 个选择支"有且只有 1 个正确",从而产生 3 个策略.

策略 1　肯定 1 支

即只要能肯定 1 支便自动否定 3 支(而无须验证其错误),否则至少有两个正确支,题目是错题.

例 6-85　以 t 为参数的方程

$$\begin{cases} x=1-\dfrac{3}{5}t, \\ y=\dfrac{4}{5}t \end{cases} \quad (t\in \mathrm{R})$$

所表示的直线适合(　　).

A. 过点(1,0),倾角为 $\arcsin\dfrac{4}{5}$

B. 过点(1,0),倾角为 $\pi-\arcsin\frac{4}{5}$

C. 过点(1,0),倾角为 $\pi-\arctan\frac{4}{3}$

D. 过点(1,0),倾角为 $\pi+\arctan\frac{4}{3}$

讲解　由 B⇔C 且都正确,与只有一支正确矛盾.这是错题.

例6-86　对方程 $x|x|+px+q=0$ 讨论,下面结论中,哪一个是错误的?

A. 至多有 3 个实根;

B. 至少有 1 个实根;

C. 仅当 $p^2-4q\geqslant0$ 时才有实根;

D. 当 $p<0$ 和 $p>0$ 时,有 3 个实根.

[1986 年全国高中数学联赛题]

讲解　此题 C,D 均可选,是错题.

例6-87　和数轴上的点一一对应的数集是(　　).

A. 整数集　　　　B. 无理数集

C. 实数集　　　　D. 有理数集

讲解　此题 B,C 均为所求,是错题.

策略2　否定 3 支

即只要能否定 3 支便自动肯定第 4 支(而无须证明其正确),否则 4 个全是诱误支,题目是错题.

例6-88　设甲是乙的充分条件,乙是丙的充要条件,丙是丁的必要条件,那么丁是甲的(　　).

A. 充分条件　　　　B. 必要条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

[1986 年数学高考题]

讲解　丁与甲的关系无法确定.4 个选择支无一为所求,是错题.

例6-89　极坐标方程 $p=\frac{4}{2-k\cos\theta}$ 表示椭圆,k 的值域

为(　　).

A. $\{k|0<k<1\}$　　　　B. $\{k|0<k<2\}$

C. $\{k|-1<k<0\}$　　　　D. $\{k|2<k<4\}$

讲解　k 的取值应为

$$0<|k|<2.$$

所以,4 个选择支中没有一个是正确的,这是错题.

策略3　逻辑分析

即先对选择支之间的逻辑关系作出判断,减少选择干扰,缩短解题长度.比如,若 A 真时 B 也真,则 A 必假,否则至少有两个正确支,与"统一前提"矛盾;又如,若 A⇔B 时,则 A,B 均假,否则将有两个正确支;再如 A,B 成矛盾关系时,必有一真,从而 C,D 均假.熟悉这些逻辑关系,自觉进行这方面的逻辑分析,可以在节约使用数学知识的前提下,提高解题的效率.

(2) 由"选择前提"及"选择结论"知,只须从指定的 4 个代号中选择一个代号,既不说明理由,又不书写过程,这对一类题目来说是提高了要求,不允许有任何概念上的模糊、推理上的疏忽和计算上的粗心;而对另一类题目来说,由于这一回答方式上的特征而提供了新的机会,从而产生两个策略:

策略4　合情推理

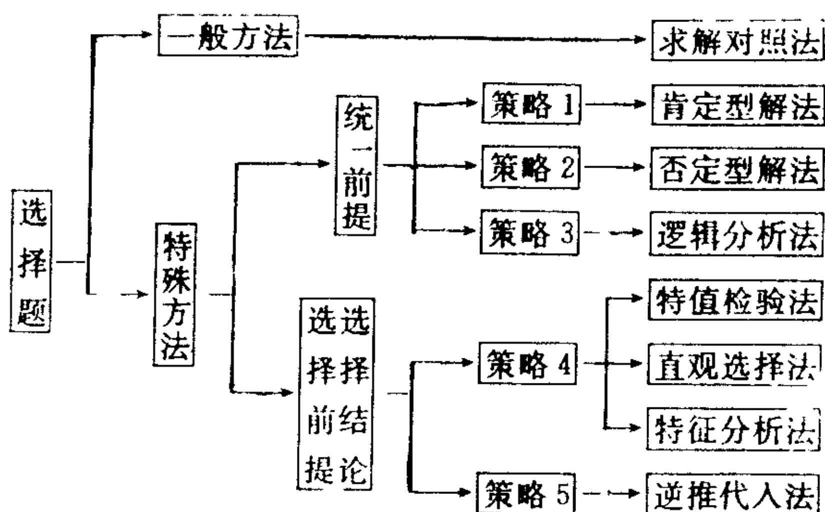
即由明显的几何直观、简单的逻辑判断、特殊的数值检验,以及结构特征的分析,甚至猜想,迅速作答.

策略5　结论也是已知信息

就是说,要充分利用 4 个选择支所提供的信息,从中获取积极的暗示(逻辑分析已体现了这一考虑),或是让其参加推理,或是对其边推理边否定,或是直接从结论出发逆推验证.

3. 解答选择题的方法体系

由上述结构特征与求解策略,可以顺利得出解选择题的方法体系:



这个体系，以选择题的结构特征与回答方式上的特点为基础，产生几个策略，再由策略推出方法，从根本上摆脱了选择题求解上的盲目性、偶然性和零敲碎打式的一招一式.将这个体系列成表，就是6个基本方法又各有肯定形式与否定形式的12个技巧解法.

基本形式／基本方法	肯定一支	否定三支	解法依据
求解对照	顺推肯定	顺推否定	常规思路
逆推代入	逆推肯定	逆推否定	策略 5
特值检验	特值肯定	特值否定	策略 4
逻辑分析	逻辑肯定	逻辑否定	策略 3.5
直观选择	直观肯定	直观否定	策略 4
特征分析	特征肯定	特征否定	策略 4
	策略 1	策略 2	解法依据

在具体使用这些方法时，应该注意到求解对照是用得最多的通用方法，当其他方法都无能为力时，求解对照常能成功，但在使用求解对照前，我们应先考虑其他方法能否奏效，尽量避免“小题大做”.同时，还应注意多种方法的交替使用.

(1) 求解对照法

从题干出发，像演算常规解答题一样往下做，并把得出的结果与4个选择支作比较，若演算的结论恰为某一选择支，我们就称为顺推

肯定,若演算的过程可以逐步排除 3 个诱误支,我们就称为顺推否定. 一般说来,顺推肯定用得较多.

值得注意的是,顺推肯定法是求解选择题的最基本方法,并且这种方法本身也是充满技巧的(如例 1-6 中的解法 2,P.21).

例 6-90 用 1,2,3,4,5 这 5 个数字,可以组成比 20000 大,并且百位数不是数字 3 的没有重复数字的五位数,共有( ).

A. 96 个 B. 78 个 C. 72 个 D. 64 个

[1985 年数学高考题]

解法 1 (顺推肯定)直接计算满足条件的五位数有

$$P_5^5-2P_4^4+P_3^3=78(\text{个});$$

或 $$4P_4^4-3P_3^3=78(\text{个});$$

或 $$P_4^4+3\cdot 3\cdot P_3^3=78(\text{个}).$$ 选 B. □

解法 2 (顺推否定)这 5 个数字组成的五位数共有 $P_5^5=120$ 个,减去"1 开头"的(尚未减够)有 $P_5^5-P_4^4=96$ 个,可否定 A;再减去"3 在百位上"的(多减了 1 在万位且 3 在百位的数)有 $96-P_4^4=72$,可否定 C,D. 故应选 B. □

例 6-91 等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n 与 T_n,若 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n}{3n+1}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$等于( ).

A. 1 B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{9}$

[1995 年数学高考题]

解 (顺推肯定)由极限的性质,有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+a_1}{b_n+b_1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n(a_n+a_1)}{n(b_n+b_1)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2S_n}{2T_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$ □

(2) 逆推代入法

与求解对照法的思考方向相反,从选择支出发,逐一检验是否与题干相容,称为逆推代入.若检验能否定3个诱误支,我们称为逆推否定;若检验能肯定一支,我们就称为逆推肯定.当题干提供的信息太少、或结论是一些具体的计算数字时(方程及不等式的解集等),用这种方法是较为方便的.

例6-92　在下列函数中,以$\frac{\pi}{2}$为周期的函数是(　　).

A. $y=\sin 2x+\cos 4x$　　B. $y=\sin 2x\cos 4x$

C. $y=\sin 2x+\cos 2x$　　D. $y=\sin 2x\cos 2x$

[1994年数学高考题]

分析　由于以$\frac{\pi}{2}$为周期的函数有无穷多个,因而用求解对照法难以奏效,应该反过来,将选择支代入已知条件加以检验.

解法1　(逆推否定)将A,B,C逐一检验,均不能证实以$\frac{\pi}{2}$为周期,从而D为所求. □

解法2　(逆推肯定)将D化为

$$y=\frac{1}{2}\sin 4x,$$

其周期为$\frac{\pi}{2}$.又选择项中有且只有一支正确,故选D. □

例6-93　设a,b是满足$ab<0$的实数,那么(　　).

A. $|a+b|>|a-b|$　　B. $|a+b|<|a-b|$

C. $|a-b|<||a|-|b||$　　D. $|a-b|<|a|+|b|$

[1987年数学高考理科题]

解　将4个选择支平方后,有

A. $ab>0$;　　B. $ab<0$;

C. $|ab|-ab<0$;　　D. $|ab|+ab>0$.

由B等价于$ab<0$而选B是逆推肯定,由A,C,D与已知矛盾而选B是逆推否定. □

例6－94　在下列各图中，$y=ax^2+bx$ 与 $y=ax+b(ab\neq0)$ 的图像只可能是(　　).

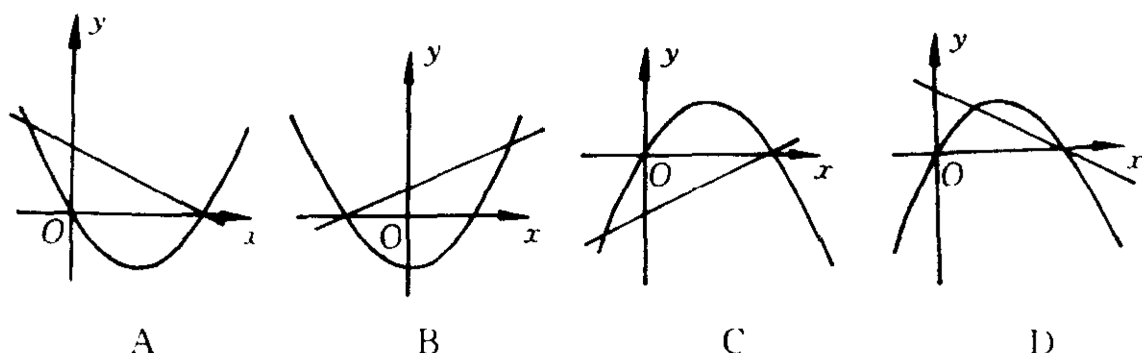


图6－66

[1986年数学高考理科题]

解　(逆推否定)由已知条件可以确定抛物线过原点(0,0)，也可以确定两图像的交点坐标为$(1,a+b)$，但是无法确定抛物线的开口向上还是向下，也无法确定对称轴在左半平面还是右半平面，除非把选择支的已知信息加进去考虑，否则满足条件的图形有多种情况.这类选择题宜用逆推法.

由于A中抛物线的开口向上($a>0$)，而直线的斜率为负($a<0$)，矛盾，可否定A.

由于B中的抛物线不过原点，与已知矛盾，可否定B.

由于C中抛物线的开口向下($a<0$)，而直线的斜率为正($a>0$)，矛盾，可否定C.

又由于4个选择支中必有一个正确，故可能的图像为D. □

例6－95　如果 $AC<0$ 且 $BC<0$，那么直线 $Ax+By+C=0$ 不通过(　　).

A. 第一象限　　　　B. 第二象限

C. 第三象限　　　　D. 第四象限

[1992年数学高考题]

解　此题可有多种途径求解(如取 $A=B=1,C=-1$，用特值

检验法),但用逆推代入法仍有独到之处.首先将方程变为

$$(AC)x+(BC)y+C^2=0.$$

用4个象限的符号代替 x,y 知,方程对A,B,D相容,而与C矛盾.故直线不通过第三象限,选C. □

(3) 特值检验法

就是从题干出发,取满足条件的特殊值,并将得出的结论与4个选择支作比较,产生矛盾或根本不存在的选择支即可淘汰.若通过特殊值可肯定1支,我们称为特值肯定;若通过特殊值可否定3支,我们称为特值否定.由于取特殊值的过程通常是必要条件过程,所以特值否定用得较多,从原理上讲,有效的取值一次至少可以否定一个选择支,因而最多有3次取值就足够了,最好的情况是一次取值就否定了3支,而更大量的情况是取2次特殊值(第一次取值否定2支,再一次取值否定第3支,从而第4支为所求).那么,怎样才能减少取值的次数呢?我们的建议是作选择支的结构分析,下文还要谈到.

特值检验法体现了黑箱方法,在§4-1-9例4-23(P.181)中曾经说过,其独到之处就在于,即使不知道系统内部的构造,我们依然能通过外部观察而了解系统的整体功能.

与求解对照法相比,特值否定法弥补了顺推否定法的不足.

例6-96　函数 $y=-\dfrac{1}{x+1}$ 的图像是(　　).
[1995年数学高考题]

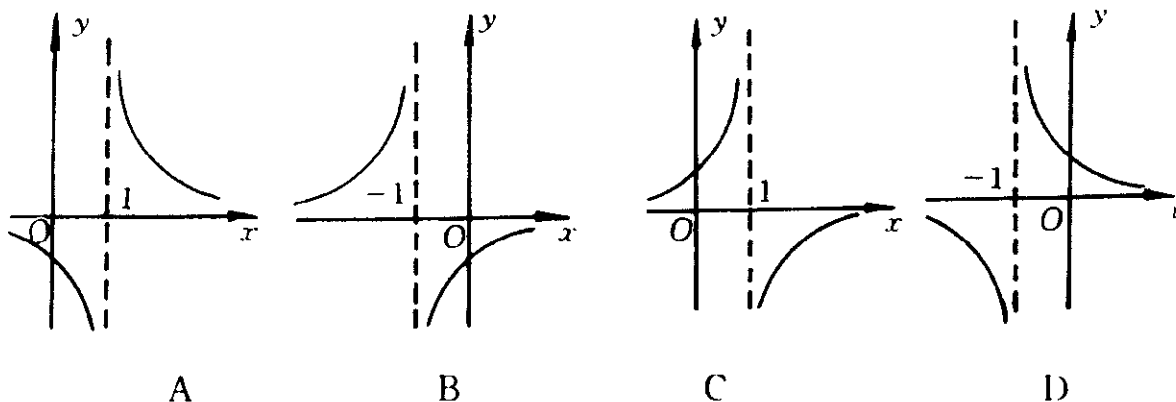


图6-67

解 (特值否定)取函数图像上一点$\left(1,-\frac{1}{2}\right)$,可排除 A,C,D. 选 B. □

例 6-97 使 $\arcsin x>\arccos x$ 成立的 x 的取值范围是( ).

A. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　B. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$

C. $\left[-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　D. $[-1,0)$

[1995 年数学高考题]

解 (特值否定)取 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$,由

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}>\frac{\pi}{6}=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$$

知,不包括$\frac{\sqrt{3}}{2}$的 A,C,D 均可排除,选 B. □

(4) 逻辑分析法

就是对选择支之间的逻辑关系先作分析,弄清各选择支之间是否存在同一关系、从属关系、交叉关系、矛盾关系、对立关系等,通过这些关系否定诱误支,肯定正确支.前者称为逻辑否定,后者称为逻辑肯定.

例 6-98 直线与平面平行的充要条件是这条直线与平面内的( ).

A. 一条直线不相交

B. 两条直线不相交

C. 任意一条直线都不相交

D. 无数条直线不相交

[1984 年数学高考题]

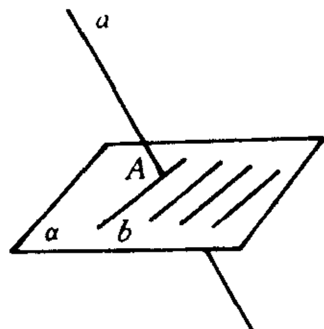


图 6-68

解法 1 (逻辑否定)显然 A,B,C,D 都是必要的,只须考虑充分性,有

A 为充分条件⇒B 为充分条件⇒

D 为充分条件⇒C 为充分条件.

故 A,B,D 均应排除,选 C.□

解法 2 (直观否定)设直线 a 与平面 α 相交于 A,在平面 α 上过 A 作一直线 b,则 α 上每一条与 b 平行的直线都与 a 不相交,但 a 与 α 不平行,故这个直观图可否定 A,B,D. 选 C. □

例 6-99 数集 $X=\{(2n+1)\pi, n$ 是整数$\}$ 与 $Y=\{(4k\pm 1)\pi$, k 是整数$\}$之间的关系是( ).

A. $X\subset Y$ B. $X\supset Y$ C. $X=Y$ D. $X\neq Y$

[1984 年数学高考题]

解法 1 (顺推肯定)由

$$2n+1=\begin{cases}4k+1, n=2k \text{ 时};\\4k-1, n=2k-1 \text{ 时}.\end{cases}$$

知 $X=Y$. 选 C. □

解法 2 (逻辑肯定)$\{2n+1\}$是全体奇数,$\{4k\pm 1\}$是由奇数组成的集合,有 $X\supseteq Y$,这否定了 A.

但 $X\supset Y$ 时,即若 B 真,则 D 也真,所以 B 必假,只有 $X=Y$,得出 C 真. □

解法 3 (逻辑肯定)若 A 真则 D 真,故 A 假;若 B 真则 D 真,故 B 假.

又由 $4k\pm 1$ 为奇数知 $X\supseteq Y$,再由 B 假得 C 真. □

解法 4 由 C,D 成矛盾关系知必一真一假,从而 A,B 均假. 又 $X\supseteq Y$ 且 B 假知 C 真. □

例 6-100 在卡片上写有下列 4 个命题

在这张卡片上恰有 1 个命题是不真的
在这张卡片上恰有 2 个命题是不真的
在这张卡片上恰有 3 个命题是不真的
在这张卡片上恰有 4 个命题是不真的

那么在它们中间,不真的命题的数目恰好是( ).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解　因为卡片上的任两个命题都是对立(互斥)的,所以,4 个命题中最多有 1 个为真命题,亦即不真命题最少有 3 个,这就排除了 A,B. 又若有 4 个命题不真,则第四个命题为真,矛盾,排除 D,应选 C.

例6－101　关于实数 a,b 的下述4个关系式中,有且只有一个正确,这个正确的关系只可能是(　　).

A. $|a|<1$ 或 $|b|<1$　　B. $|a|>1$ 且 $|b|>1$

C. $|a+b|<|1+ab|$　　D. $|a|+|b|<2$

解法1　(逻辑分析法)

若 C 真 $\Leftrightarrow (a^2-1)(b^2-1)>0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{或 B 真,推出 C,B 同真;} \\ \text{或} \begin{cases} |a|<1 \\ |b|<1, \end{cases} \text{推出 D,得 C,D 同真.} \end{cases}$$

均与"只有一个正确"矛盾,故 C 不真.

若 B 真则 C 也真,推出 B,C 均真,故 B 不真;

若 D 真则 A 也真,推出 D,A 均真,故 D 不真.

否定 C,B,D 后,应选 A.□

解法2　(特值否定)取 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=2$,有 B,C,D 均假,故选 A.□

(5) 直观选择法

就是通过数形结合的方法,借助于具体的直观,迅速肯定 1 支或快捷否定 3 支,前者称为直观肯定,后者称为直观否定. 由于选择题不用书写解题过程,仅仅填上一个代号就可以了,因而借助于大跨度的直观是可行而明智的.

例6－102　设全集 $I=\{(x,y)\mid x,y\in \mathbf{R}\}$,集合 $M=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{y-3}{x-2}=1\right\}$, $N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$. 那么 $\overline{M\cup N}$ 等于(　).

A. $\varnothing$　　B. $\{(2,3)\}$

C. $(2,3)$　　D. $\{(x,y)\mid y=x+1\}$

[1990 年数学高考题]

解 (直观肯定)考虑各集合的几何意义.

I 表示全平面,

M 表示直线 $y=x+1$ 去掉点$(2,3)$,

N 表示全平面去掉直线 $y=x+1$,

$\overline{M\cup N}$是单元素集合$\{(2,3)\}$.选 B. □

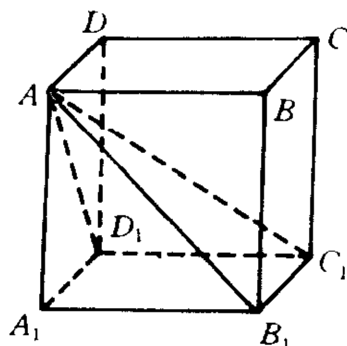


图 6-69

例 6-103 在四棱锥的 4 个侧面中,直角三角形最多可有( ).

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

解 (直观否定)如图 6-69,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中连 AB_1,AC_1,AD_1,则四棱锥 $A—A_1B_1C_1D_1$ 的 4 个侧面都是直角三角形,故选 D. □

(6) 特征分析法

就是抓住题目(特别是 4 个选择支)所提供的位置特征、数值特征、结构特征,进行大跨度、粗线条的推理,从而肯定 1 支或否定 3 支,前者称为特征肯定,后者称为特征否定.在本小节例 6-85 中,我们抓住了"无穷个满足 $a_5a_6=9$ 的等比数列中,和 $\log_3a_1+\log_3a_2+\cdots+\log_3a_{10}$是惟一的,"这样一个结构特征,给出了水平 4 的小题巧做.值得指出的是,这种特征分析对于非选择题虽然只有辅助的作用,但对于选择题却是严格的,因为选择题多了两个已知条件:"统一前提"与"选择前提".

例 6-104 已知过球面上 A,B,C 三点的截面和球心的距离等于球半径的一半,且 $AB=BC=CA=2$,则球面面积是( ).

A. $\frac{16}{9}\pi$ B. $\frac{8}{3}\pi$ C. 4π D. $\frac{64}{9}\pi$

[1994 年数学高考题]

解法 1 (顺推肯定)设球的半径为 R,$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 r,则

$$r=\frac{AB}{2\sin60^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}},$$

又由 $R^2 - r^2 + \left(\dfrac{R}{2}\right)^2$,

得 $R^2 = \dfrac{4}{3}r^2 = \dfrac{16}{9}$,

从而 $S = 4\pi R^2 = \dfrac{64}{9}\pi$. 选 D. □

这种解法没有任何知识性错误,结论也是正确的,但费时费事、"小题大做"了.注意到4个选择支中,A,B对应的球半径小于1,C对应的球半径等于1,D对应的球半径大于1,利用这些结构特征,可以得出下面的简捷解法.

解法2 (特征分析)计算△ABC的外接圆半径 $r = \dfrac{2}{\sqrt{3}} > 1$,因而 $R \geqslant r > 1$,有

$$S = 4\pi R > 4\pi.$$

但A,B,C均不大于4π,只有选D. □

这个解法使条件 $R^2 = r^2 + \left(\dfrac{R}{2}\right)^2$ 成为多余,甚至连 r 的值也不用计算,只判断 $r > 1$ 就够了.这也是估值的功能.

例6-105 函数 $y = \dfrac{\sin x}{|\sin x|} + \dfrac{|\cos x|}{\cos x} + \dfrac{\tan x}{|\text{tot} x|} + \dfrac{|\cot x|}{\cot x}$ 的值域是( ).

A. $\{-2,4\}$　　B. $\{-2,0,4\}$

C. $\{-2,0,2,4\}$　　D. $\{-4,-2,0,4\}$

[1990年数学高考题]

解 分别讨论各三角函数在4个象限中的符号,具体计算出值域来是一种解法(顺推肯定).如果抓住选择支中"元素个数"的特征,那就可以省去具体的计算.

因为函数表达式中的每一个加项的绝对值都是1,所以,问题便相当于在4个1的前面添加正、负号:

$$\boxed{\pm}\,1\,\boxed{\pm}\,1\,\boxed{\pm}\,1\,\boxed{\pm}\,1.$$

这样,有多少种不同(无序)的添法就有多少种不同的数值,由于

4个三角函数在4个象限中的符号只有3种情况:四正,二正二负、一正三负,因而值域应是3个元素,这就否定了A,C,D,选B. □

这个解法的简捷,来源于对三角函数符号的本质理解与对题目实质的透彻洞察,决不是胡猜瞎碰.

例6-106　在$(x^2+3x+2)^5$的展开式中x的系数为(　　).

A. 160　　B. 240　　C. 360　　D. 800

[1992年数学高考理科题]

解　(特征肯定)因为x^2乘以式中的另两项不会产生一次项x,故确定x的系数与x^2项无关,只须考虑$(3x+2)^5$展开式中的x项就够了: $C_5^4\cdot(3x)\cdot 2^4=240x$,选B. □

例6-107　把复数$1+i$对应的向量按顺时针方向旋转$\frac{2\pi}{3}$,所得到的向量对应的复数是(　　).

A. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}i$　　B. $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$

C. $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i$　　D. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$

[1990年数学高考题]

解　(特征否定)$1+i$对应的辐角为$\frac{\pi}{4}$,按顺时针方向旋转$\frac{2\pi}{3}$后得到的辐角为$\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}=-\frac{5\pi}{12}$,在第四象限且不等于$-\frac{\pi}{4}$.但A的辐角在第二象限,C的辐角为$-\frac{\pi}{4}$,D的辐角在第三象限,均可否定,故选B. □

这是抓住辐角的位置特征,使问题的求解简化.

例6-108　如果函数$f(x)=x^2+bx+c$对任意实数t都有$f(2+t)=f(2-t)$,那么(　　).

A. $f(2)<f(1)<f(4)$　　B. $f(1)<f(2)<f(4)$

C. $f(2)<f(4)<f(1)$　　D. $f(4)<f(2)<f(1)$

[1992年数学高考题]

解 (特征否定)由已知函数的开口特征和对称轴特征,取一个满足条件的函数

$$f(x)=(x-2)^2$$

由 $f(1)=1, f(2)=0, f(4)=4$ 可否定 B,C,D. 故选 A. □

4. 选择支的结构分析

上面的许多例子告诉我们,从选择支中获取信息是选择题精巧求解的一个源泉. 但是,这里面有一些技术问题,比如,逆推代入时,是 A,B,C,D 顺次代入,还是有目的地挑某一选择支先代入?显然,弄好了,我们代入一个选择支就能算出结论,问题是,如何选择顺序呢?

又如,特值检验时,碰巧了,取 1 个值就否定了 3 支,问题是,这个特殊值是怎么找到的?

为了解决这些问题,我们建议采用"选择支的结构分析法". 它的做法是把 4 个选择支的内容对照着列成一个表,然后对比它们的关系,找出最关键的环节、找出最特别的数值、找出最经济的解题方案.

例 6-109 四边形 $ABCD$ 的边 AB, BC, CD, DA 之长分别是 1,9,8,6(如图 6-70),对于以下命题

① 四边形 $ABCD$ 外切于圆;

② 四边形 $ABCD$ 不内接于圆;

③ 对角线不互相垂直;

④ $\angle ADC \geqslant 90^\circ$;

⑤ $\triangle BCD$ 是等腰三角形.

正确的认识是( ).

A. ① 真、② 假、④ 真

B. ③真、④假、⑤ 真

C. ③真、④ 假、⑤ 假

D. ② 假、③ 假、④ 真

[1986 年全国初中数学联赛题]

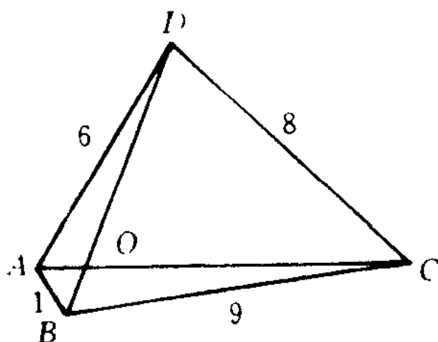


图 6-70

讲解 判断 5 个命题后对照选择,等于做了 5 道题,实在是"小

题大做"了.当年的标准答案做了3个命题也有点盲目.那么,应该先做哪个命题?又最少要做几个命题呢?作选择支的结构分析可一目了然①.

命题号 选择支	①	②	③	④	⑤
A	+		?	+	?
B	?	?	+	-	+
C	?	?	+	-	-
D	?	-	-	+	?

对于①号命题,若为假则只能否定A;若为真则什么也不能肯定、什么也不能否定,做了一个无效劳动.

对于②号命题,若为假则做了无效劳动;若为真可否定A,D.

对于③号命题,若为假则可否定B,C;若为真则只能否定D.

对于⑤号命题,若为假则可否定B;若为真则只能否定C.

对于④号命题,4个选择支都作了表态,信息最多,无论真假,都能否定两个选择项.所以应该从④号命题做起,

由 $$AC < AB + BC = 10,$$

知 $$AD^2 + CD^2 = 10^2 > AC^2.$$

得$\angle ADC$是锐角.故④假,这就否定了A,D.

又因为只有⑤号命题对B,C表明了真假,故应再判断⑤号命题,由

$$BD < AB + AD = 7 < CD < BC,$$

知$\triangle BCD$不是等腰三角形,这就否定了B,应选C. □

于是,选择支的结构分析告诉我们:应从④号命题做起.作两次判断便可得出结论.这就完全避免了盲目性,提高了自觉性和技巧性.

例6－110　设实数a,b,c满足

---

①　表中,＋表示肯定,－表示否定,?表示未作判断.

$$\begin{cases} a^2 - bc - 8a + 7 = 0, \\ b^2 + c^2 + bc - 6a + 6 = 0, \end{cases}$$

那么 a 的取值范围是(　　).

A. $(-\infty, +\infty)$　　　B. $(-\infty, 1] \cup [9, +\infty)$

C. $(0, 7)$　　　D. $[1, 9]$

[1986 年全国高中数学联赛题]

讲解　本题求解的方法很多,其中正面求出 a 的范围 D 比较麻烦(需保证充分又必要),但否定 A,B,C 比较容易. 列表

	$(-\infty,0]$	$(0,1)$	1	$(1,7)$	$[7,9)$	9	$(9,+\infty)$
A	+	+	+	+	+	+	+
B	+	+	+	−	−	+	+
C	−	+	+	+	−	−	−
D		-	+	+	+	+	−

由表可见,一般地,a 取两个特殊值必可作出选择;特殊地,取 $a = \frac{1}{2}$ 时,由已知第二式可得

$$0 = b^2 + c^2 + bc + 3 = \left(b + \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}c^2 + 3 \geqslant 3.$$

矛盾,这表明,包括 $a = \frac{1}{2}$ 的 A,B,C 均应否定,选 D.

事实上,由表中第三列可见,取 $a \in (0,1)$ 均有否定 A,B,C 的功能,所以,利用已知第二式不取任何特殊值也能简捷求解(从而第一式成为多余).

解　由已知第二式,得

$$6(a-1) = b^2 + c^2 + bc = \left(b + \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}c^2 \geqslant 0,$$

有 $a \geqslant 1$,所以,包含 $a < 1$ 的 A,B,C 均应否定. 选 D. □

6-3-3　解填空题的策略分析

填空题是一类传统题型,古代科举中称为贴经,近 10 年来,又常

与选择题一起成为标准化考试的基本题型,研究这一类题目的解法,是培养策略意识的又一好途径.

1. 填空题的认识

数学填空题通常是将一个数学真命题写成当中缺少一些语句的不完整形式,要求将缺少的语句填写在指定的空位上,使之成为一个完整而正确的数学命题.

在一道填空题中,要求填空的部分可以是一处也可以是多处,但最基本的格式为

若 A 则______.

从填写的内容看,主要有两类填空题,其一是定量型的,要求解答者填写数值、数集或数量关系,如方程、不等式的解,函数的定义域、值域、周期、某参变量的值或变化范围等.其二是定性型的,要求填写具有某种性质的数学对象或数学对象的某种性质.

如果一道填空题经完型之后仍不能成为真命题,通常是考生的错误,特殊情况下是出题的错误(参见§7-4).

2. 解填空题的基本方法

填空题的求解与选择题、解答题的求解均有联系,其中比较重要的特点有3个.

特点1 与选择题相比,填空题缺少选择支的信息,更像一道解答题,因而解答题的求解策略(参见6-3-2)可以原封不动地移植到填空题上来,由此产生直解法.

特点2 与解答题相比,填空题不用说明理由,又无须书写过程,这一方面是要求每一步都不允许出错(否则"一步失误、全题皆空"),另一方面是更接近选择题,因而选择题的"合情推理"等策略也适用于填空题,由此产生特例法、图解法等.

特点3 由于填空题常常用来考查基本概念、基本运算,大多是一些能从课本找到原型或背景的题目,可以通过观察、联想与转化,变为基本问题,这是填空题与一些高档综合题的重要区别.

还要指出,定量型的填空题一定要运算到最终结果并保持准确

值(除非规定了精确度).

(1) 直解法

就是直接从条件出发推出结论,然后将最后结果填入空位处.由于填空题不需要过程,因而可以跳过一些步骤,大跨度前进.为了节省时间,还可手算与心算相结合.例 3－11(P.135)及例 6－111 表明,直解法也是充满技巧的.

例6－111 函数 $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$的反函数的定义域是 ______.
[1989 年数学高考题]

解法1 先求出反函数

$$y=\ln\frac{1+x}{1-x},$$

再解不等式

$$\frac{1+x}{1-x}>0.$$

可得定义域$(-1,1)$. □

这种解法相当于用通法做了一道解答题,是解填空题中的"小题大做",对本题的这种处理是不策略的.

解法2 反函数的定义域就是直接函数 $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$的值域,记 $\lambda=e^x>0$,由

$$y=\frac{-1+(+1)\lambda}{1+\lambda}$$

知,y 分-1,$+1$ 为定比 $\lambda>0$,因而 $y\in(-1,1)$,即反函数的定义域为$(-1,1)$. □

解法3 分别令 $x\to-\infty$,$x\to+\infty$可得 y 的值域$(-1,1)$,此即反函数的定义域. □

后两种解法转化为求直接函数的值域,只要基本概念清楚,心算即可完成,几乎没有运算量.(还可令 $e^x=\tan\alpha$、或转化为斜率来求解)

例6－112 函数 $y=\sin x\cos x+\sin x+\cos x$ 的最大值是

______.

[1990年数学高考理科题]

解法1　$y=\frac{1}{2}\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$$=-\frac{1}{2}\cos 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}$$

$$=\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2-1,$$

当 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$ 时，y 的最大值为 $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$. □

如此处理这道题就有相当的难度了，由于填空题不需要过程，所以，我们可以大跨度直奔结论.

解法2　只须找一个 x，使

$$y_1=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,$$

$$y_2=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),$$

同时达到最大值.由于 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，y_1,y_2 同时取大值，故 $y_{\max}=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$.这相当于在解法1中只写出第一行就直奔结论.□

(2) 特例法

当填空题暗示，答案是一个“定值”时，我们可以取一个(些)特殊数值、或一个特殊图形、或一种特殊结构来确定这个定值，以节省推理论证的过程.对于解答题，特例常常只有辅助的作用(提示解题方向、诱发解题思路等)，而对于填空题却就是答案了.当题目的条件是从一般性的角度给出时，特例法尤其有效.在例1－16(P.32)，例5－33注(P.309)，例6－11(P.354)中已经见过这方面的例子.

例6－113　已知 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列，如果 S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}$ 等于 ______.

[1990 年数学高考理科题]

解法 1 等差数列的公差 $d\neq 0$ 时，a_n 是 n 的一次函数，S_n 是 n 的二次函数

$$a_n=dn+k,$$

$$S_n=\frac{d}{2}n^2+hn.$$

有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{dn+k}{\frac{d}{2}n+h}=2. \square$$

解法 2 取一个公差不等于 0 的数列 $a_n=n$，则 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，

有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2. \square$$

例 6－114 P 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的点（非长轴两端点），F_1,F_2 为焦点，A 为 $\triangle PF_1F_2$ 的内心，PA 的延长线交 F_1,F_2 于 B，则 $BA:AP$ 的值为 _____.

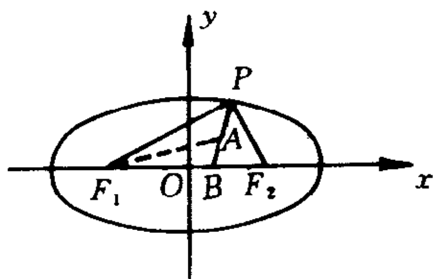


图 6－71

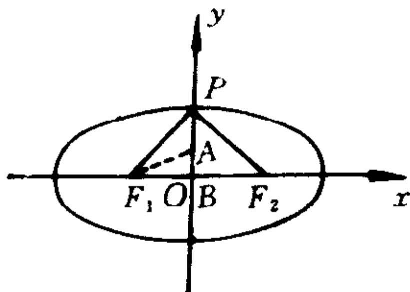


图 6－72

解法 1 （直解法）如图 6－71，连 AF_1. 由椭圆的定义知

$$PF_1+PF_2=2a,$$

$$F_1B+BF_2=2c=2\sqrt{a^2-b^2}.$$

又由角平分线的性质有

$$\frac{F_1B}{PF_1}=\frac{BF_2}{PF_2}=\frac{F_1B+BF_2}{PF_1+PF_2}=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}.$$

再由 AF_1 为角平分线得

$$\frac{BA}{AP}=\frac{F_1B}{PF_1}=\frac{c}{a}.\ \square$$

解法 2　(特解法)如图 6－72,取点 P 在 y 轴上,则 A,B 也在 y 轴上,$PF_1=a,F_1B=c=\sqrt{a^2-b^2}$,由角平分线的性质,得

$$\frac{BA}{AP}=\frac{F_1B}{PF_1}=\frac{c}{a}.\ \square$$

(3) 图解法

由于填空题不用写出论证过程,因而画出辅助图示进行直观分析便可填上最后答案.这是一种数形结合的解题方法.

例 6－115　如果实数 x,y 满足等式 $(x-2)^2+y^2=3$,那么 $\frac{y}{x}$ 的最大值是______.

[1990 年数学高考文科题]

解法 1　(直解法)设 $\frac{y}{x}=k$,联立方程

$$\begin{cases}(x-2)^2+y^2=3,\\ y=kx;\end{cases}$$

消去 y,得

$$(1+k^2)x^2-4x+1=0.$$

由 x 为实数知,方程的判别式非负

$$\Delta=16-4(1+k^2)=4(3-k^2)\geqslant 0,$$

有

$$-\sqrt{3}\leqslant k\leqslant\sqrt{3}.$$

当 $x=\frac{1}{2},y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时,k 取最大值 $\sqrt{3}$. $\square$

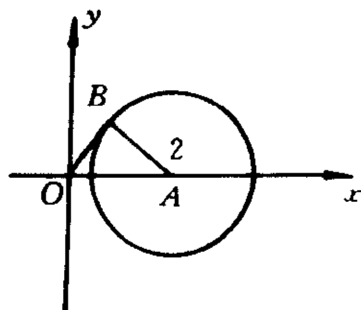


图 6－73

解法 2　(图解法)在直角坐标系上作圆 A:

$$(x-2)^2+y^2=3.$$

这时 $\frac{y}{x}$ 就是圆上任一点 (x,y) 与原点连线的斜率了.如图 6－73,当

连线成为切线 OB 时,斜率最大,由 $OA=2,AB=\sqrt{3}$,得 $OB=1$,且

$$\frac{y}{x}=\tan\angle AOB=\frac{AB}{OB}=\sqrt{3}.\ \square$$

例 6－116 已知 $\omega=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$,求 $\omega^2+\omega+1$ 的值.
[1986 年数学高考题]

解 由已知得

$$1=\cos 0+i\sin 0,$$

$$\omega=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3},$$

$$\omega^2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

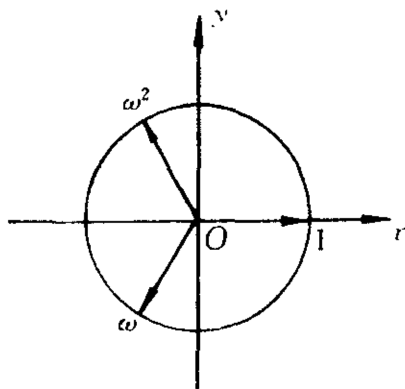


图 6－74

视这 3 个复数所对应的向量为单位圆上的3个共点力(如图6－74),它们两两夹角为$\frac{2\pi}{3}$,因其合力为0,故得

$$\omega^2+\omega+1=0.$$

例 6－117 在球面上有 4 个点 P,A,B,C,如果 PA,PB,PC 两两互相垂直且 $PA=PB=PC=a$,那么这个球面的面积是____.
[1991 年数学高考理科题]

解法 1 (直解法)如图 6－75,连直径 PQ 交面 ABC 于 H,由 $PA=PB=PC,OA=OB=OC$ 知 $PH\perp$面 ABC. 设球的半径为 R,则 $AB=BC=CA=\sqrt{2}a$,由

$$V_{P-ABC}=V_{A-PBC},$$

得
$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}(2a^2)\cdot PH=\frac{a^3}{6},$$

有
$$PH=\frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

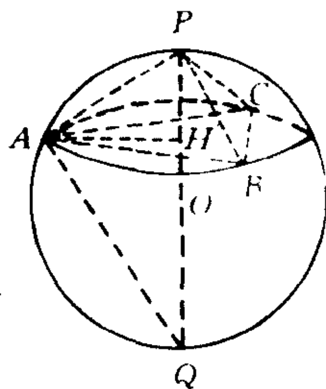


图 6－75

又在 Rt△PAQ 中,

$$PA^2=PH\cdot PQ,$$

即 $$a^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)2R,$$

得 $$R=\frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

从而球面的面积为 $S=4\pi R^2=3\pi a^2$. □

解法2 (图解法)由题想图,就是求棱长为 a 的正方体外接球的面积.因为外接球的直径等于正方体的对角线,故有 $2R=\sqrt{3}a$,从而得

$$S=4\pi R^2=3\pi a^2. \square$$

6-3-4 多参减元的策略

含有多个字母(亦称为参数)的数学题是一类颇具挑战性的题型,通过"减元"来解决它包含着分多为少、化繁为简、变难为易的自然想法.那么,怎样实现"减元"的目标呢?这又是培养策略意识的一个好课题.

我们的解题经验表明,下述9条措施共同体现了多参减元的策略.

1. 代换 把若干参数的整个式子换成一个新的字母,于是问题中的参数就减少了.这是换元法基本换元方式中的一种.

2. 消去 或者让一部分参数互相抵消,或者让一部分参数代替另一部分参数.比如,在解方程中消元法,数列求和(积)中的交叉消去法等,都是这一措施的表现.

3. 分离 把一部分参数从整体或另一部分参数中分离出来.比如,由齐次线性方程组有非零解、或两直线重合的条件,可以把系数参数与未知数字母分离;同样,由二次方程是否有实根,也可以把包括系数参数的判别式独立出来(判别式法).

4. 取值 让一部分参数取具体数字、或是特殊值、或是边界值、平均值等.这是特殊化的一个应用.

5. 分隔 把多个参数分类、分步、分段逐次处理,每次处理一部

分.当处理某个(些)参数时,可把其余参数作为次要参数或干脆看成已知数(主元素法).

6.分解 把多参数式子分割为若干个较少参数的式子,由各个分割式的性质再组合成原先的性质,常见的有叠加法、连乘法等.

7.对称 如果多参数本身具有对称性,那么可以把问题归结为一个(些)参数的研究(对称性分析).

8.限定 如果对多参数作大小顺序的排队、或具有某种性质的编号,问题常常可以转化为处理某个(些)特殊元素,如考虑最大、最小元素.这正是有序化与极端原理的应用(有效增设).

9.摆脱多参数细节上、头绪上的纠缠,从整体或全局上去考虑问题(整体原理).

例6-118 已知

(1) $2\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant a_4\leqslant b_1\leqslant b_2$;

(2) $a_1+a_2+a_3+a_4\geqslant b_1+b_2$.

求证 $a_1a_2a_3a_4\geqslant b_1b_2$. ①

分析1 求证式有6个参数,并且左、右两边字母不相同,无法直接比较它们的大小,因此减元时必须顾及字母的统一.这有两条途径,或者都换成 a_i,或者都换成 b_i.比如换成 a_i.由

$$b_1b_2\leqslant\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{2}\right)^2$$

知,欲证①,只须证

$$4a_1a_2a_3a_4\geqslant(a_1+a_2+a_3+a_4)^2. \quad ②$$

这就减少了两个参数.继续减元,把②的左边取特殊值缩小,而右边让 a_3 代替 a_1,a_2 进行放大,由

$$4a_1a_2a_3a_4\geqslant4\cdot2\cdot2\cdot a_3a_4=16a_3a_4,$$

$$(a_1+a_2+a_3+a_4)^2\leqslant(3a_3+a_4)^2$$

知,欲证②,只须证

$$16a_3a_4\geqslant(3a_3+a_4)^2, \quad ③$$

即

$$(a_4-a_3)(a_4-9a_3)\leqslant0. \quad ④$$

由已知条件(1),得 $a_4-a_3\geqslant 0$,所以要证④只须证

$$a_4\leqslant 9a_3. \tag{5}$$

但由已知(1)、(2),有

$$a_1+a_2+a_3+a_4\geqslant b_1+b_2\geqslant 2a_4,$$

得

$$a_4\leqslant a_1+a_2+a_3\leqslant 3a_3<9a_3.$$

就是说,式⑤成立,反推回去,④、③、②、①成立.

分析2　由上面的分析知,欲证①只须证②:

$$4a_1a_2a_3a_4\geqslant (a_1+a_2+a_3+a_4)^2.$$

实施换元,设

$$b=a_1+a_2+a_3,\ c=a_1a_2a_3.$$

问题转化为

$$(a_4+b)^2\leqslant 4ca_4. \tag{6}$$

为了继续减元,我们用 b 来代替 c,注意到

$$\frac{b}{c}=\frac{a_1+a_2+a_3}{a_1a_2a_3}\leqslant\frac{a_3+a_3+a_3}{2\cdot 2\cdot a_3}=\frac{3}{4},$$

有

$$c\geqslant\frac{4b}{3}, \tag{7}$$

欲证⑥,只须证

$$(a_4+b)^2\leqslant\frac{16}{3}ba_4, \tag{8}$$

即

$$\left(a_4-\frac{b}{3}\right)(a_4-3b)\leqslant 0, \tag{9}$$

亦即

$$\frac{b}{3}\leqslant a_4\leqslant 3b. \tag{10}$$

但由已知条件(1)、(2)可得

$$a_3\leqslant a_4\leqslant a_1+a_2+a_3,$$

从而

$$\frac{b}{3}=\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\leqslant\frac{a_3+a_3+a_3}{3}\leqslant a_4\leqslant a_1+a_2+a_3=b<3b.$$

就是说,式⑩成立,反推回去,⑨、⑧、⑦、⑥、②、①成立.

这里的两个解题思路,运用了代换、消去、取值等策略,把6个参

数减少为 4 个、3 个、最终归结为 2 个参数的证明.

最后指出,当 $a_1=a_2=a_3=a_4=2, b_1=b_2=4$ 时,不等式可以取等号.

例 6－119 已知方程组

$$\begin{cases} x_1x_2\cdots x_{1987}x_{1988}=1, & ① \\ x_1-x_2x_3\cdots x_{1988}=1, & ② \\ x_1x_2-x_3x_4\cdots x_{1988}=1, & ③ \\ \cdots\cdots \\ x_1x_2\cdots x_{1987}-x_{1988}=1. \end{cases}$$

求 x_{1987}.

分析 1 实施换元的策略,记

$$\begin{cases} u=x_1x_2\cdots x_{1987}, \\ v=x_{1988}. \end{cases}$$

则由首尾两个方程有

$$\begin{cases} uv=1, \\ u-v=1. \end{cases}$$

这表明,u, v 是关于 t 的二次方程

$$t^2-t-1=0 \tag{A}$$

的两个根.这里体现了集中的策略,把 u,v 两个参数集中到参数 t 上.同理,设

$$\begin{cases} p=x_1x_2\cdots x_{1986}, \\ q=x_{1987}x_{1988}. \end{cases}$$

由第①个方程及第 1987 号方程知,p,q 也是方程(A)的两个根,于是有

$$u=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}, \quad p=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

得 $x_{1987}=\dfrac{u}{p}$ 有 3 个搭配值

$$1,\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2},\ \frac{-3-\sqrt{5}}{2}.$$

在这里,换元摆脱了数以千计方程的迷魂阵.同时也有集中与分解的应用.

分析2　作代换

$$x = x_1x_2\cdots x_{1986} \neq 0,$$

$$m = x_{1987};$$

用 mx 乘第1988号方程,再把①代入

$$m^2x^2 - mx - 1 = 0, \tag{B}$$

再用 x 乘第1987号方程,并代入①得

$$x^2 - x - 1 = 0. \tag{C}$$

这表明(B),(C)两个二次方程有非零公共根,对(B),(C)分别乘以 x 后,得

$$\begin{cases} m^2x^3 - mx^2 - x = 0, \\ m^2x^2 - mx - 1 = 0, \\ x^3 - x^2 - x = 0, \\ x^2 - x - 1 = 0, \end{cases}$$

也就是齐次线性方程组

$$\begin{cases} m^2y_1 - my_2 - y_3 = 0, \\ m^2y_2 - my_3 - y_4 = 0, \\ y_1 - y_2 - y_3 = 0, \\ y_2 - y_3 - y_4 = 0, \end{cases}$$

有非零解 $(x^3, x^2, x, 1)$.因而分离出系数行列式

$$0 = \begin{vmatrix} m^2 & -m & -1 & 0 \\ 0 & m^2 & -m & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (m-1)^2(m^2+3m+1).$$

得 $m=x_{1987}$的 3 个取值

$$1,\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2},\ \frac{-3-\sqrt{5}}{2}.$$

这里的减元策略,既用 1 来消去乘积 $x_1x_2\cdots x_{1988}$,又用 x 来代换 $x_1x_2\cdots x_{1986}$,最后把 x 看成主元素,用分离的策略把问题归结为一元四次方程的求解.

例 6-120 若正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$,则

$$\prod_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)\geqslant\left(n+\frac{1}{n}\right)^n.$$

证明 实施分解的策略,每次只处理一个字母.

$$a_i+\frac{1}{a_i}=a_i+\underbrace{\frac{1}{n^2a_i}+\cdots+\frac{1}{n^2a_i}}_{n^2\text{个}}$$

$$\geqslant(n^2+1)\left[\frac{a_i}{(n^2a_i)^{n^2}}\right]^{\frac{1}{n^2+1}}$$

$$=\left(n+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{na_i}\right)^{\frac{n^2-1}{n^2+1}}.$$

取 $i=1,2,\cdots,n$,再连乘组合起来

$$\prod_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)\geqslant\left(n+\frac{1}{n}\right)^n\left(\frac{1}{n^na_1a_2\cdots a_n}\right)^{\frac{n^2-1}{n^2+1}}$$

$$\geqslant\left(n+\frac{1}{n}\right)^n.$$

其中 $\dfrac{1}{n^na_1a_2\cdots a_n}\geqslant 1$,可由

$$1=\sum_{i=1}^{n}a_i\geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

变形得到.□

例 6-121 已知实数 x_1,x_2,x_3 满足

$$x_1+x_2+x_3=a\ (a>0),$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\frac{a^2}{2}.$$

求证　$0\leqslant x_i\leqslant\frac{2}{3}a$，$i=1,2,3$.

证明　由对称性，只须考虑一个字母 x_1，有

$$\frac{a^2}{2}-x_1^2=x_2^2+x_3^2\geqslant\frac{(x_1+x_2)^2}{2}=\frac{(a-x_1)^2}{2}.$$

即　$3x_1^2-2ax_1\leqslant 0$.

解得　$0\leqslant x_1\leqslant\frac{2a}{3}$.

同理　$0\leqslant x_2\leqslant\frac{2a}{3}$,

$0\leqslant x_3\leqslant\frac{2a}{3}$.□

习　题　六

1. 谈谈你对解题策略的认识.

2. 介绍你体会最深的一二个解题策略，举例说明你是如何应用的.

3. 下面两道应用题各属于什么题型：

A. 工程问题　　B. 追及问题

C. 流水问题　　D. 平均问题

(1) 甲、乙两人织毛线，甲 5 小时织的数量与乙 8 小时织的数量相等，现乙织了 2 小时后甲才开始织，问再过几小时甲与乙织的数量相等？

(2) 某人从甲地走往乙地，甲、乙两地之间有定时的公共汽车往返，而且，两地发车的间隔都相等，他发现每隔 6 分钟开过来一辆去甲地的公共汽车，每隔 12 分钟开过来一辆去乙地的公共汽车，则公共汽车每隔几分钟从各自的始发站发车？

4. 分析下列 3 道高考题，找出它们共同的几何结构，成为一个

基本图形.

(1) [1995 年文科(24)题、理科(23)题]如图 6－76,$ABCD$ 是圆柱的轴截面,点 E 在底面的圆周上,$AF\perp DF$,F 是垂足.

(Ⅰ) 求证　$AF\perp DB$.(习题四第 18 题)

(Ⅱ) 如果 $AB=a$,圆柱与三棱锥 $D-ABE$ 的体积比等于 3π.求

文科:点 E 到截面 $ABCD$ 的距离.

理科:直线 DE 与平面 $ABCD$ 所成的角.

(2) [1986 年文、理科第三题]如图 6－77,AB 是圆 O 的直径,PA 垂直于圆 O 内所在的平面,C 是圆周上不同于 A,B 的任意一点.求证平面 PAC 垂直于平面 PBC.

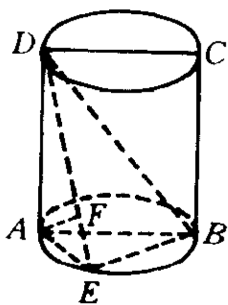


图 6－76

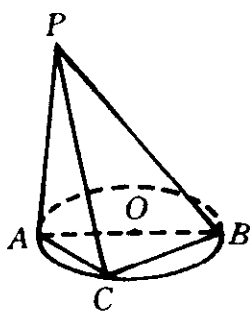


图 6－77

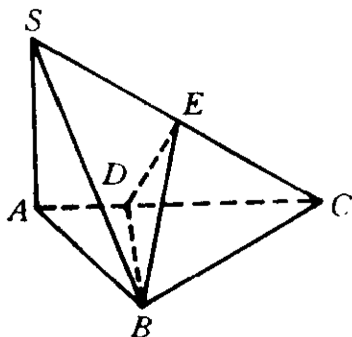


图 6－78

(3) [1990 年文、理科(23)题]如图 6－78,在三棱锥 $S-ABC$ 中,$SA\perp$底面 ABC,$AB\perp BC$.DE 垂直平分 SC,且分别交 AC,SC 于 D,E.又 $SA=AB$,$SB=BC$.求以 BD 为棱,以 BDE 与 BDC 为面的二面角的度数.

运用各种解题策略求解 5～62 题

5. 甲乙两队各出 7 名队员按事先排好的顺序出场参加围棋擂台赛,双方先由 1 号队员比赛,负者被淘汰,胜者再与负方 2 号队员比赛,……直到有一方队员全被淘汰为止,另一方获得胜利,形成一种比赛过程,那么所有可能出现的比赛过程的种数为______.
[1988 年全国高中数学联赛题]

6. 设 A 是一个有 n 个元素的集合，A 的 m 个子集 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两互不包含，试证

(1) $\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{1}{C_n^{|A_i|}}\leqslant 1$；　　(2) $\sum\limits_{i=1}^{m}C_n^{|A_i|}\geqslant m^2$.

[1993 年全国高中数学联赛题]

7. 空间中有 n 个点（$n\geqslant 4$），任何三点不共线，任何 4 点不共面，过每两点连一条直线，问所连的直线中，有几条异面直线？

8. 设 A,B,C,D 是一条直线上依次排列的 4 个不同的点，分别以 AC,BD 为直径的两圆相交于 X 和 Y，直线 XY 交 BC 于 Z. 若 P 为直线 XY 上异于 Z 的一点，直线 CP 与以 AC 为直径的圆相交于 C 及 M，直线 BP 与以 BD 为直径的圆相交于 B 及 N. 试证 AM,DN 和 XY 三线共点.

[IMO_{36-1}]

9. 设 $\{a_n\}$ 是正数组成的数列，其前 n 项和为 S_n，并且对于所有的自然数 n，a_n 与 2 的等差中项等于 S_n 与 2 的等比中项. 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

10. 已知△ABC 的三个内角 A,B,C 满足 $A+C=2B$，$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=-\frac{\sqrt{2}}{\cos B}$. 求 $\cos\frac{A-C}{2}$ 的值.

[1996 年数学高考题]

11. 若三角形 A 与三角形 B 的面积相等，求证一定可以把 A 分成 n 个互不重叠的三角形 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，把 B 分成 n 个互不重叠的三角形 $B_1,B_2,\cdots,B_n$，使 $A_i\cong B_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$（叫做面积相等的三角形必剖分相等）.

12. 求证　在周长一定的简单闭曲线的集合中，圆的面积最大.

13. 证明　对 $n\geqslant 4$，每一个有外接圆的四边形，总可以划分成 n 个都有外接圆的四边形.

[IMO_{14-2}]

14. 在一个游戏中这样计分，回答一个容易的问题得 3 分，回答

一个较难的问题得 7 分,在不能作为选手总分数的整数集合中,求最大值.

15. 1024 名网球手用淘汰制争夺单打冠军,问一共需进行多少场比赛?

16. 已知 $a_1, a_2, \cdots, a_9$ 为非零实数,求证 $a_1a_5a_9, a_2a_6a_7, a_3a_4a_8, -a_3a_5a_7, -a_1a_6a_8, -a_2a_4a_9$ 中必有一个正数而又不能全为正数.

17. 设 $X=\{1,2,\cdots,n\}$,试求

(1) 所有子集的所有元素之和;

(2) 所有子集的最小元素之和;

(3) 所有子集的最大元素之和.

18. 求和 $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k$.

19. 比较 16^{18} 与 18^{16} 的大小.

20. 在平面内给出了 100 个点,其中没有 3 点在一条直线上,考察以上述点为顶点的所有可能的三角形,试证这些三角形中至多只有 70% 的三角形是锐角三角形.

[IMO_{12-6}]

21. 设 E, F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC, CD 上滑动,但保持 $\angle EAF=45°$. 证明 $\triangle AEF$ 的高 AH 为定值.

22. 如图 6-79, $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G$ 的度数为______.

[1983 年天津市初中竞赛题]

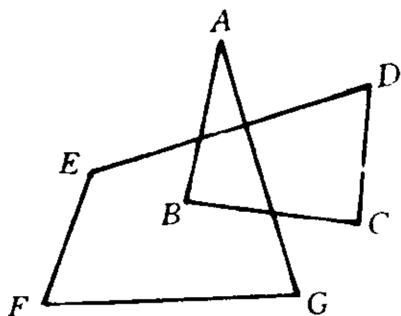


图 6-79

23. 解方程

$$x^3+2\sqrt{3}x^2+3x+\sqrt{3}-1=0.$$

24. 已知

$$9a+3b+c=0,$$
$$9d+3e+f=0.$$

求证　$(cd-af)^2=(ae-bd)(bf-ce)$.

25．已知$\frac{a}{\cos x}=\frac{b}{\cos 3x}$，求证　$\tan^2 x=\frac{a-b}{3a+b}$.

26．证明 lg2 为无理数.

27．100 个人站成一行，自 1 起报数，凡报奇数者离队，留下的再次自 1 起报数，凡报奇数者又离队.这样反复下去，最后留下一个人，问这个人第一次报数为多少?

28．有关于 x 的 3 个方程：

$$x^2+4mx-4m+3=0,$$
$$x^2+(m-1)x+m^2=0,$$
$$x^2+2mx-2m=0.$$

它们中至少有一个存在实数根，求 m 的取值范围.

29．如图 6－80，已知⊙O 分别是正△ABC 的内切圆、正△$A_1B_1C_1$ 的外接圆，求△$A_1B_1C_1$ 与△ABC 的面积之比.

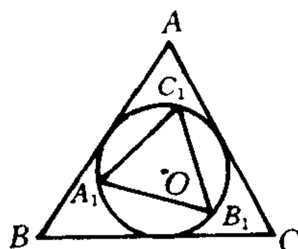


图 6－80

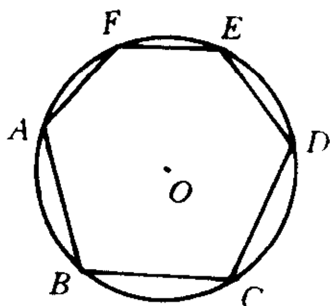


图 6－81

30．如图 6－81，六边形 $ABCDEF$ 内接于⊙O，且 $AB=BC=CD=\sqrt{3}+1$，$DE=EF=FA=1$，试求面积 S_{ABCDEF}.

31．如图 6－82，直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=2b$，$BC=a$，AC 边的两个端点分别在平面直角坐标系中的正半轴上滑动，求动点 B 到原点的最大距离.

32．已知边长为 10 的正方形 $ABCD$ 的边 AB，CD 的中点分别

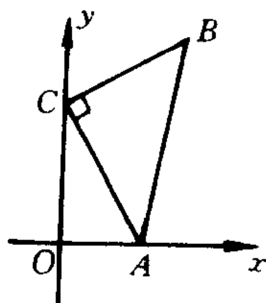


图 6-82

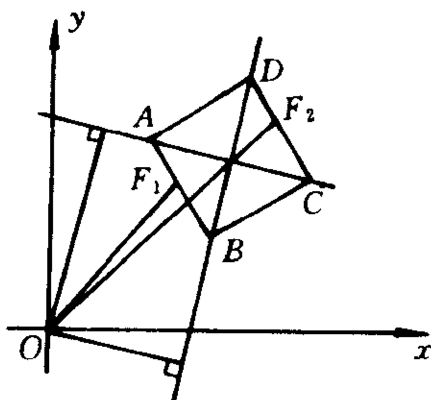


图 6-83

为F_1,F_2,如图 6-83,当正方形运动时,始终保持着$|OF_1-OF_2|=5\sqrt{2}$,求证原点到直线AC,BD的距离之积为定值.

33. 有一个小孩掉在河里抱住了一根圆木随水向下漂流.有3条船逆水而上,在对应河岸上P的地方,同时与圆木相遇,但没有发现圆木上有小孩,三条船的速度是已知且不相同的.当3条船离开P点一小时后,船员们同时从收音机中听到圆木上有小孩要求营救的消息,因此3条船同时返回,去追圆木.当晚孩子的父母被告知,小孩已在离P点6千米的下游某处被救起,问哪条船先追上圆木救这个孩子?

34. 若方程$|\cos x|=ax+1$恰有两解,求a的取值.

35. 若$x_1,x_2,\cdots,x_n$均为正数,$n>1$,且$0<\theta<\pi$.则

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\cos\theta}+\sqrt{x_2^2+x_3^2-2x_2x_3\cos\theta}+\cdots+\sqrt{x_{n-1}^2+x_n^2-2x_{n-1}x_n\cos\theta}+\sqrt{x_n^2+x_1^2-2x_nx_1\cos\theta}\geqslant\sqrt{2(1-\cos\theta)}(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$

36. 已知x,y,z为正数,且$xyz(x+y+z)=1$,求表达式$(x+y)(y+z)$的最小值.

[1989年全苏数学竞赛题]

37. 方程$2^x=x^2$解的个数为( ).

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

38. 设直线 l 经过点 $A(0,1)$，并且与抛物线 $y^2=x$ 只有一个公共点，求直线 l 的方程.

39. 如果曲线 $y^2=6x$ 与 $(x-m)^2+y^2=4$ 没有公共点，求实数 m 的取值范围.

40. 已知 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$，求证

$$\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}.$$

41. 将一个四棱锥的每个顶点染上一种颜色，并使同一条棱的两端点异色，如果只有 5 种颜色可供使用，那么不同的染色方法的总数是______.

[1995 年全国高中数学联赛题]

42. 已知 $x_1>0$，$x_1\neq 1$，且

$$x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}(n=1,2,\cdots),$$

试证数列 $\{x_n\}$，或者对任意自然数 n 都满足 $x_n<x_{n+1}$，或者对任意自然数 n 都满足 $x_n>x_{n+1}$.

[1986 年数学高考理科第八题]

43. 函数 $f(x)$ 满足条件

$$f\left(\frac{1}{x}\right)-2f(x)=x,$$

求 $|f(x)|$ 的最小值.

44. 求三角式的值

(1) $\sin10^\circ\sin30^\circ\sin50^\circ\sin70^\circ$;

(2) $\cos^2 36^\circ+\cos^2 24^\circ-\cos36^\circ\cos24^\circ$.

45. 求和 $S_n=C_n^0\cos x+C_n^1\cos2x+\cdots+C_n^n\cos(n+1)x$.

46. 已知 $a_1=0, 2a_{n+1}=3a_n+\sqrt{5a_n^2+4}$，求证存在常数 k，使 $a_{n+1}=ka_n-a_{n-1}$.

47. 有互不相等的 12 个自然数，它们均小于 36，求证　这些自

然数两两相减所得的差中,至少有 3 个相等.

48. 设 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 都是自然数,且满足 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=x_1x_2x_3x_4x_5$,求 x_5 的最大值.

49. 直线上分布着 n 个点,我们来标出以这些点为端点的一切可能的线段的中点.试求至少可以得出多少个互不重合的中点?若这 n 个点分布在空间,情况如何?

50. 在一次乒乓球循环赛中,$n\geqslant 3$ 名选手中没有全胜的.证明一定可以从中找到 3 名选手 A,B,C,使 A 胜 B,B 胜 C,C 胜 A.

51. 设 S 为平面上的一个有限点集(点数$\geqslant 5$),其中若干点染上红色,其余的点染上蓝色,当中任何 3 个及 3 个以上的同色的点不共线.求证存在一个三角形,使得

(1) 它的 3 个顶点涂有相同颜色;

(2) 这三角形至少有一条边(线段)上不包含另一种颜色的点.

52. 证明 任何四体面中,一定有一个顶点,由它出发的 3 条棱可以构成一个三角形.

[$\mathrm{IMO}_{10\cdot 4}$]

53. 已知二次方程$(mp-np)x^2+(np-mn)x+(mn-mp)=0$有两个相等的实根,求证$\frac{1}{m},\frac{1}{n},\frac{1}{p}$成等差数列.

54. 如图 6-84,正比例函数 $y=x$ 和 $y=ax(a>0)$的图像与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0)$的图像分别相交于 A 点和 C 点.若 Rt$\triangle AOB$ 和 Rt$\triangle COD$ 的面积分别为 S_1 和 S_2,则 S_1 与 S_2 的关系是(　　).

A. $S_1>S_2$　　B. $S_1=S_2$

C. $S_1<S_2$　　D. 不确定

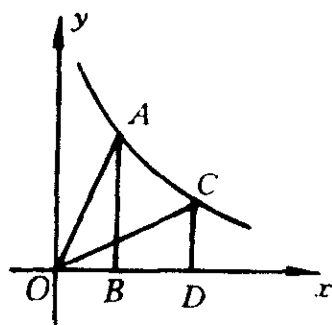


图 6-84

[1992 年全国初中数学联赛题]

55. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{1979}$是 1,2,…,1979 这些自然数的任意一个

排列.为了配对,令 $a_{1980}=0$.从计算 $b_i=|a_{2i-1}-a_{2i}|$ 中得到数列 $b_1,b_2,\cdots,b_{990}$;再从计算 $c_i=|b_{2i-1}-b_{2i}|$ 中得到数列 $c_1,c_2,\cdots,c_{495}$,为了配对令 $c_{496}=0$,从计算 $d_i=|c_{2i-1}-c_{2i}|$ 得到数列 $d_1,d_2,\cdots,d_{248}$.如此类推,一直算下去,最后得到一个数 x,求证 x 是偶数.

56.求方程 $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$ 的实数解.

57.已知 $x>0,y>0$,且 $x\neq y$,求证

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^{x+y}>x^y y^x.$$

58.剧院的座位排成 p 排,q 列(我们规定把纵行的座位叫做列),这样,整个剧院可容纳 pq 个观众($p>1,q>1$).在每一个座位上坐着一个小学生,他们都不一样高.老师在每一排中挑选个子最矮的学生,在这些最矮的学生中,个子最高的等于 a.然后老师在每一列中,挑选个子最高的学生,他们之中最矮的等于 b.试说明,3 个关系式 $a<b,a=b,a>b$ 之中的哪一个可以表示数 a 与 b 的关系.并弄清:当剧院里小学生调整座位时,这个关系是否会改变?
[1963 年匈牙利竞赛题]

59.若 x,y,z 为互不相等的非负实数,求证 $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2}\geqslant\sqrt{3}(x+y+z)$.

60.四边形 $ABCD$ 中,若 $AD+BC=AB+CD$,求证　四边形 $ABCD$ 存在内切圆.

61.求曲线 $y=x^3-3x^2+3x$ 与 y 轴及直线 $y=2$ 所围成的图形面积.

62.证明　对于和为 1 的正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,有不等式

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geqslant\frac{1}{2}.$$

63.选择题

在每小题给出的 4 个选项中,有且只有 1 项是符合题目要求的.

(1) A,B,C,D,E 五个人并排站成一行,如果 B 必须站在 A

的右边(A,B 可以不相邻),那么不同的排法共有(　　).

A. 24 种　　B. 60 种　　C. 90 种　　D. 120 种

[1990 年数学高考题]

(2) 圆 $x^2+2x+y^2+4y-3=0$ 到直线 $x+y+1=0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点共有(　　).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

[1991 年数学高考题]

(3) 设 θ 是第二象限的角,则必有(　　).

A. $\tan\frac{\theta}{2}>\cot\frac{\theta}{2}$　　B. $\tan\frac{\theta}{2}<\cot\frac{\theta}{2}$

C. $\sin\frac{\theta}{2}>\cos\frac{\theta}{2}$　　D. $\sin\frac{\theta}{2}<\cos\frac{\theta}{2}$.

[1994 年数学高考题]

(4) 若正棱锥的底面边长与侧棱长相等,则该棱锥一定不是(　　).

A. 三棱锥　　B. 四棱锥

C. 五棱锥　　D. 六棱锥

[1993 年数学高考题]

(5) 如果函数 $y=\sin 2x+a\cos 2x$ 的图像关于直线 $x=-\frac{\pi}{8}$ 对称,那么 $a=$(　　).

A. $\sqrt{2}$　　B. $-\sqrt{2}$　　C. 1　　D. -1

[1994 年数学高考题]

(6) 如果方程 $x^2+ky^2=2$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆,那么实数 k 的取值范围是(　　).

A. $(0,+\infty)$　　B. $(0,2)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $(0,1)$

[1994 年数学高考题]

(7) 函数 $y=\arccos(\sin x)\left(-\frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3}\right)$的值域是(　　).

A. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$　　B. $\left[0,-\frac{5\pi}{6}\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$　　D. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$

[1994 年数学高考题]

(8) 已知集合 $E=\{\theta\mid\cos\theta<\sin\theta,0\leqslant\theta\leqslant2\pi\}$, $F=\{\theta\mid\tan\theta<\sin\theta\}$,那么 $E\cap F$ 为区间(　　).

A. $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$

C. $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$

[1993 年数学高考题]

(9) 平行六面体 $ABCD\quad A_1B_1C_1D_1$ 的两个对角面 ACC_1A_1 与 BDD_1B_1 都是矩形,则这个平行六面体是(　　).

A. 正方体　　B. 长方体

C. 直平行六面体　　D. 正四棱柱

(10) 如果凸 n 边形 $F(n\geqslant4)$ 的所有对角线都相等,那么(　　).

A. $F\in\{$四边形$\}$

B. $F\in\{$五边形$\}$

C. $F\in\{$四边形$\}\cup\{$五边形$\}$

D. $F\in\{$边相等的多边形$\}\cup\{$内角相等的多边形$\}$

[1982 年全国高中数学联赛题题]

(11) 在$[0,2\pi]$上满足 $\sin x\geqslant\frac{1}{2}$的 x 的取值范围是(　　).

A. $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$　　B. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

C. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$

[1992 年数学高考文科题]

(12) 如果实数 x,y 满足等式 $(x-2)^2+y^2=3$,那么 $\frac{y}{x}$ 的最大值是(　　).

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　D. $\sqrt{3}$

[1990年数学高考理科题]

(13) 如图6－85,正三棱锥 $S-ABC$ 的侧棱与底面边长相等,如果 E,F 分别为 SC, AB 的中点,那么异面直线 EF 与 SA 所成的角等于(　　).

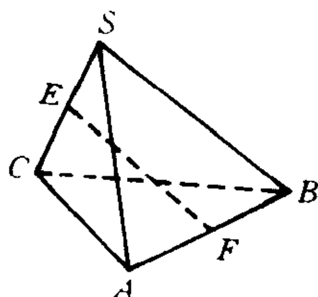


图6－85

A. 90°　B. 60°　C. 45°　D. 30°

[1990年数学高考题]

(14) 直线 $bx+ay=ab(a<0,b<0)$ 的倾斜角是(　　).

A. $\arctan\left(-\frac{b}{a}\right)$　B. $\arctan\left(-\frac{a}{b}\right)$

C. $\pi-\arctan\frac{b}{a}$　D. $\pi-\arctan\frac{a}{b}$

[1993年数学高考理科题]

(15) 在 $(1-x^3)(1+x)^{10}$ 的展开式中,x^5 的系数是(　　).

A. -297　B. -252　C. 297　D. 207

[1995年数学高考理科题]

(16) 用1,2,3,4,5这5个数字,组成没有重复数字的三位数,其中偶数共有(　　).

A. 24个　B. 30个　C. 40个　D. 60个

(17) 复数 $\sin 40^\circ - i\cos 40^\circ$ 的辐角为(　　).

A. 40°　B. 140°　C. 220°　D. 310°

[1987年数学高考文科题]

(18) 水池装有编号为①、②、③、④、⑤的5条水管,其中有些是进水管,有些是出水管,如果同时开放两条水管,注满水池的时间如下表:

开放水管号	①②	②③	③④	④⑤	⑤①
注满水池的时间(小时)	2	15	6	3	19

那么单开一条水管,最快注满水池的水管编号为(   ).

A. ① B. ② C. ④ D. ③或⑤

[1989 年全国初中数学联赛题]

(19) 若 $F\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=x$,则下列等式中正确的是(   ).

A. $F(-2-x)=-2-F(x)$ B. $F(-x)=F\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

C. $F(x^{-1})=F(x)$ D. $F(F(x))=-x$

[1984 年全国高中数学联赛题]

(20) 设$-1<a<0,\theta=\arcsin a$,那么不等式 $\sin x<a$ 的解集为(   ).

A. $\{x|2n\pi+\theta<x<(2n+1)\pi-\theta,n\in Z\}$

B. $\{x|2n\pi-\theta<x<(2n+1)\pi+\theta,n\in Z\}$

C. $\{x|(2n-1)\pi+\theta<x<2n\pi-\theta,n\in Z\}$

D. $\{x|(2n-1)\pi-\theta<x<2n\pi+\theta,n\in Z\}$

[1986 年全国高中数学联赛题]

64. 填空题

(1) 求$\left(|x|+\frac{1}{|x|}-2\right)^3$的展开式中的常数项______.

[1984 年数学高考理科题]

(2) 已知等比数列$\{a_n\}$的公比 $q>1$,并且 $a_1=b(b\neq0)$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_6+a_7+\cdots+a_n}$______.

[1988 年数学高考理科题]

(3) 已知等差数列$\{a_n\}$的公差 $d\neq0$,且 a_1,a_3,a_9 成等比数列,则$\frac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}}$的值是______.

[1992 年数学高考文科题]

(4) 如果三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,若 E,F 分别为AB,AC 的中点,平面 EB_1C_1F 将三棱柱分成体积为 V_1,V_2 的两部分,那么

$V_1 : V_2 =$ ______.

[1990 年数学高考题]

(5) $\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{2}$的值是______.

[1991 年数学高考题]

(6) 4 个不同的小球放入编号为 1,2,3,4 的 4 个盒中,则恰好有一个空盒的放法共有______种(用数字作答).

[1995 年数学高考题]

(7) 已知集合

$$M=\{x, xy, \lg(xy)\}$$

及

$$N=\{0, |x|, y\},$$

并且 $M=N$,那么 $\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{y^3}\right)+\cdots+\left(x^{2001}+\frac{1}{y^{2001}}\right)$的值等于______.

[1987 年全国高中数学联赛题]

第七章　数学习题

数学习题的研究与数学解题的研究是密切相关的，本书的第一章就已经谈过对数学习题的种种认识，第四、五章又从不同角度涉及．本章将继续讨论数学习题的分类，数学题解的检验，解题错误的分析，最后研究数学习题的科学性要求与编拟方法．

7－1　数学习题的分类

在§1－1－1中，我们曾把数学题分为两类，练习型与研究型．其分类标准是“结论是否为已知”．其实，按不同的需要、不同的标准，数学习题有不同的分类．下面讨论的是练习型问题的一些常见分类．

1．二分法

将数学题分成两类，一类叫求解题，一类叫求证题．

(1)求解题

这类题的主要特征是，题目未明确写出结论，需要我们通过演算或推理把结论找出来，即以寻找目标对象为主．大量的计算题都属于这一类，求轨迹或作图也归入这一类．常见的求解题有：求数、式各种运算的值；化简题；解方程；解不等式；求函数的特征数值（如极值、零点等）；求排列数、组合数；求数列的项、项数、和；求轨迹或轨迹方程；画图等．

(2)求证题

这类题的主要特征是，题目明确写出结论，需要我们通过推理或演算去证实它．即以判定命题真假为主，如

1)求证数量关系方面:如证明恒等式、条件等式、不等式,以及几何图形中的数量关系证明题.

2)求证图形之间位置关系:如证明平行、证明垂直、证明全等、证明相似、证明共点、证明共面、证明共圆以及证明对称性、周期性等.

3)求证某种数量具有某种性质:如证明有关参数的性质;函数的性质,方程根的性质等.

2.二分法

即从二分法中,把具有实际操作性问题抽出来,独立为一类求作题(包括一部分应用题).

3.学科分类

分为代数题、三角题、平面几何题、平面解析几何题、立体几何题,继续还可以有二级、三级分类等.比如代数题,又可分为方程题、不等式题、函数题、数列题……;而方程还可分为代数方程与超越方程并继续细分.

4.教学分类

(1)按教学活动的形式可分为:口答题、板演题、讨论题、课堂练习题、家庭作业题、思考题、复习题、测验题、考试题、竞赛题等.

(2)按解答的方式可分为:选择题、填空题、是非题、改错题、计算题、证明题、作图题等.

(3)按综合程度分类:单一性题目与综合性题目;而综合题又有纵向综合与横向综合之分.

(4)按得分率分类:

1)容易题,通过率在0.7以上;

2)中档题,通过率在0.4~0.7之间;

3)难题,通过率在0.4以下.

5.按评分的客观性分类

(1)客观性题:如是非题、选择题、填空题(并非全部)等.无论谁阅卷得分都一样,评分客观,可使用机器阅卷.

(2)主观性题:需详细写出解题过程的求解题或求证题.不同的

人阅卷有可能产生得分上的差异.

6. 按要素分析分类

这在§4-1中谈过,数学题是一个由4要素组成的系统R(Y,O,Z,P).当4个要素都为已知时,称为标准型问题;当4个要素中只有1个是学生所不知道时,称为训练型问题;当4个要素中有2个是学生所不知道时,称为探索型问题;当4个要素中有3个是学生所不知道时,称为问题型问题.

7. 按题目条件与其答案的确定性分类

(1)封闭性习题:指条件恰当(不多不少)、答案固定的题目.现行教材中使用的基本上都是这类题,亦称为常规性题或收敛性题.

(2)开放性习题:条件与结论不匹配,条件多余时需选择,条件不足时需补充.(本书暂不展开讨论)

8. 按认识的范畴分类

(1)纯数学题:题目只涉及数学概念、符号、定理、法则、公式、不直接与生产、生活实际相联系.

(2)应用题(文字题):把数学知识用于解决生产、生活中的实际问题,如例3-3(P.105),例4-6(P.152),例4-8(P.157),例6-3(P.345),例6-24(P.368),例6-36(P.379),例6-37(P.380)等都有一定的实际背景.在强调素质教育的今天,这类题目的训练不可忽视.近年高考推出的信息迁移题是应用题的一种新形式,它即时设计一个陌生的数学情景(信息),要求学生在理解的基础上运用所学的知识和方法灵活地解题(迁移),情况有点像英语中的"阅读理解",或语文高考中的"材料作文"(例7-1,例7-2,例7-75).

例7-1 在测量某物理量的过程中,因仪器和观察的误差,使得n次测量分别得到$a_1,a_2,\cdots,a_n$,共n个数据.我们规定所测量的"最佳近似值"a是这样一个量,与其他近似值比较,a与各数据的差的平方和最小,依此规定,从$a_1,a_2,\cdots,a_n$推出的$a=$________.[1994年数学高考题]

例7-2 某地现有耕地10000公顷.规划10年后粮食单产比

现在增加 22%，人均粮食占有量比现在提高 10%．如果人口年增长率为 1%，那么耕地平均每年至多只能减少多少公顷(精确到 1 公顷)？$\left(\text{粮食单产}=\dfrac{\text{总产量}}{\text{耕地面积}},\text{人均粮食占有量}=\dfrac{\text{总产量}}{\text{总人口数}}\right)$
[1996 年高考数学题]

7－2　数学题解的检验

7－2－1　检验的作用

1．确认答案正确性的一种措施

这适用于一切数学习题．我们每做完一道题目都应该检验有无不合题意的地方，检查有无疏漏、差错或笔误，以确保解答的正确与完整．

2．解题过程的必不可少的步骤

凡是用“必要条件”来解的题目，其充分性都未加证实，因而欲求充要条件的答案都必须检验，这是解题的必不可少的步骤．如分式方程、无理方程、超越方程、函数方程，其求解缺少同解原理作保证，因而必须检验；对于应用题，检验其实际意义也是不可或缺的．

上述两个作用，反映了不同性质的两种检验．

例 7－3　设 c,d,x 为实数，$c\neq0$，x 为未知数，讨论方程

$$\log_{\left(cx+\frac{d}{x}\right)} x=-1. \qquad ①$$

在什么情况下有解？有解时求出它的解．
[1984 年数学高考理科题]

讲解　本题满分 14 分．由①有

$$\left(cx+\frac{d}{x}\right)^{-1}=x,\quad (x>0)$$

即 $$x\left(cx+\frac{d}{x}\right)=1,$$

亦即 $$cx^2+d=1,$$

有　$$x^2=\frac{1-d}{c}\quad(c\neq 0).$$

所以,当 $c\neq 0$ 且 $\frac{1-d}{c}>0$ 时,方程有解

$$x=\sqrt{\frac{1-d}{c}}.$$

当年的许多考生做到这里以为能得满分,其实只能得 8 分,还要扣掉 6 分. 主要原因是没有检验. 通过检验还可以发现 $x=1$ 是增根,正确的答案应补充两点.

(1) $c>0,d<1,c\neq 1-d$ 或 $c<0,d>1,c\neq 1-d$ 时,

$$x=\sqrt{\frac{1-d}{c}}.$$

(2)代入原方程检验.

例 7－4　如图7－1,直线 l 的方程为 $x=-\frac{p}{2}$,其中 $p>0$;椭圆的中心为 $D\left(2+\frac{p}{2},0\right)$,焦点在 x 轴上,长半轴长为 2,短半轴长为 1,它的一个顶点为 $A\left(\frac{p}{2},0\right)$,问 p 在哪个范围内取值时,椭圆上有 4 个不同的点,它们中每一个点到点 A 的距离等于该点到直线 l 的距离.
[1988 年数学高考理科题]

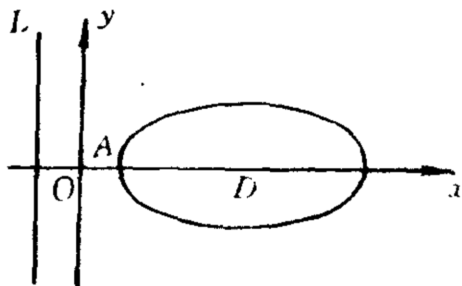


图 7－1

讲解　本题满分 12 分. 假定椭圆上有符合题意的 4 个点,则这 4 个点的坐标应满足方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\left[x-\left(2+\dfrac{p}{2}\right)\right]^2}{4}+y^2=1, & ①\\ y^2=2px. & ②\end{cases}$$

消去 y,得方程

$$x^2+(7p-4)x+\frac{p^2}{4}+2p=0 \quad ③$$

的判别式大于零

$$\begin{aligned}\Delta &= (7p-4)^2-4\left(\frac{p^2}{4}+2p\right)\\ &= 16(3p^2-4p+1)\\ &>0,\end{aligned}$$

解得　　$p>1$ 或 $p<\frac{1}{3}$.　　④

由已知，椭圆上点的横坐标都大于零，所以方程③的两个根都应是正数，于是得

$$7p-4<0,$$

即　　$p<\frac{4}{7}$，　　⑤

由④、⑤及已知得　　$0<p<\frac{1}{3}$.　　⑥

求解到此，式⑥的充分性尚未检验，只能得 10 分，要扣掉 2 分.

这两个例子的检验，都是解题过程中的必不可少的步骤.

3.题解的检验也是丰富解题经验，提高解题能力、增强数学素质的一个有效途径.

解题的后期肯定比解题开始时，对问题有更深刻的认识，检验将充实我们的解题知识，并加强我们对解决的信任，还将形成良好的解题习惯.本书各章在分析解题过程时，已经多次论述过.

7-2-2　检验的方法

1.复查核对

就是从头到尾重新审查：各步推理、运算是否正确、依据是否可靠？各种变形是否合乎数学标准？解题步骤是否完善？书写是否有笔误？文字、符号使用是否恰当？特别要留神字母的下标，括号前的负号，a 与 α 的区别，绝对值符号与数字 1 的不同，避免忙中出错.

这种检验方法人们用得最多，主要危险是循老路走，缺乏后发

力,易受思维定势的影响而重蹈覆辙,不易发现问题.

在临场考试中,为了节省时间,有时候可以只检查容易出错的最薄弱的环节,如曲线方程互化是否等价?用不等式求极值等号是否成立?作变量代换、进行数式变形时存在域有无变化?这可以避免全过程的简单重复,收事半功倍之效.

2.代入检验

就是将解得的值代入原题,以检验是否符合原意?是否有实际意义?如求解分式方程、无理方程、对数方程、指数方程、三角方程或相应的不等式时,这一步是必不可少的.

例7－5　一个容器盛满了纯酒精,先倒出8升,然后加满水,再倒出5升,然后再加满水,这时容器内酒精和水之比为9:11,求容器的容积.

解　设容器的容积为x升,依题意列出方程

$$\frac{(x-8)-\frac{5(x-8)}{x}}{x}=\frac{9}{11+9},\qquad ①$$

即 $$11x^2-260x+800=0,\qquad ②$$

亦即 $$(x-20)(11x-40)=0,$$

解得 $$x_1=20,\quad x_2=\frac{40}{11}.$$

检验　x_1,x_2均满足方程①,但由原意应有$x\geqslant 8$,故只能取$x=20$升.

代入检验能证实结论的充分性,对于排除增根很有效,但对于寻找减根就无能为力了.

3.多解对照

就是用多种方法求解同一问题.比如,用加法原理来求解的排列组合题,再改用乘法或减法来做.如果多种方法所得的结论都一样,那么,这个结论就比较可靠;如果所得到的结果不一样,那就说明其中必有一错,甚至多个全错(特殊情况下是题目错了,见例7－42).有时候通过不同途径得出的结果恰好是问题在不同情况下的结论,

这个检验就能帮助我们全面地、分情况地考虑问题，避免“以偏概全”（如例 7－6）.

这是一种必要性的检验，能有效发现错误，但还不是正确性的肯定.

例 7－6 书架上有 4 本不同的数学书，5 本不同的物理书，3 本不同的化学书，全部竖起排成一行，如果要求各类书本身互不相邻，一共有多少种不同的排法？（习题三第 6 题，$P.141$）

解法 1 先排化学书有 P_3^3 种排法，再在其间 4 个空档中各插入 1 本数学书，有 P_4^4 种排法；最后在这 7 本书之间的 8 个空档处任选 5 个插入物理书，有 P_5^8 种插法. 由乘法原理共得

$$P_3^3P_4^4P_5^8=967680(\text{种}).\square$$

解法 2 先排数学书有 P_4^4 种排法，再在其间 5 个空档中各插入 1 本物理书，有 P_5^5 种排法；最后在这 9 本书之间的 10 个空档处任选 3 个插入化学书，有 P_3^{10} 种排法. 由乘法原理共得

$$P_4^4P_5^5P_3^{10}=2073600(\text{种}).\square$$

这两种解法的结果不一样，至少有一个是错误的. 事实上，解法 1 中化学书不会排头，解法 2 中数学书不会排头，两种解法都有遗漏.

解法 3 用○表示化学书，×表示数学书，用△表示物理书，先排 3 本化学书，然后插入 4 本数学书，将出现 3 大类型 11 小类型，对每一类型再插入 5 本物理书，有

第一大类型，化学书被数学书分为 1＋1＋1 的形式，这有 4 个小类型.

(1) ○×××○×○

再插入 5 本物理书时，有 $2P_3^3P_4^4P_2^5P_3^6=691200$ 种.

(2) ○××○××○

再插入 5 本物理书时，有 $P_3^3P_4^4P_2^5P_3^6=345600$ 种.

(3) ×○×○××○

再插入 5 本物理书时，有 $P_3^3P_3^3P_4^4P_1^5P_4^7=3628800$ 种.

(4) ×○×○×○×

再插入 5 本物理书时，有 $P_3^3P_4^4P_5^8=967680$ 种.

第二大类型. 化学碎被数学书分为 2 + 1 的形式，这有 4 个小类型.

(5) ○○××××○

再插入 5 本物理书时，有 $2P_3^3P_4^4P_4^5P_1^4=138240$ 种.

(6) ○○×○×××

再插入 5 本物理书时，有 $8P_3^3P_4^4P_3^5P_2^5=1382400$ 种.

(7) ○××○○××

再插入 5 本物理书时，有 $4P_3^3P_4^4P_3^5P_2^5=691200$ 种.

(8) ×○○××○×

再插入 5 本物理书时，有 $P_4^4P_2^3P_3^3P_2^5P_3^6=2073600$ 种.

第三大类型　化学书未被数学书分开，这有 3 个小类型.

(9) ○○○××××

再插入 5 本物理书时，有 $2P_3^3P_4^4P_5^5=34560$ 种.

(10) ×○○○×××

再插入 5 本物理书时，有 $2P_3^3P_4^4P_4^5P_1^4=138240$ 种.

(11) ××○○○××

再插入 5 本物理书时，有 $P_3^3P_4^4P_4^5P_1^4=69120$ 种.

合计得 10160640 种. □

这种分类的方法不便于推广，下面的递推公式可以处理一般情况①：

$$f(5,4,3)=f(4,3,3)+f(4,4,2)+f(5,3,2)+2f(4,3,2).$$

4. 逆向运算

即将运算程序颠倒过来再演算一次. 比如当初用加(减)法运算的结果，现改为用减(加)法来检验；当初用乘(除)法运算的结果，现

① 惠州人. 自不相邻排列的计数问题. 中学数学月刊，1997，6，P.20.

改为除(乘)法来检验. 一道因式分解题,可将结果相乘加以还原.

例7－7 计算

$$\frac{69-7\sqrt{15}+(\sqrt{3}-6\sqrt{5})i}{3-(\sqrt{3}-3\sqrt{5})i}.$$

讲解 学生计算出4种答案:

A. $2-(\sqrt{3}-4\sqrt{5})i$, B. $2+(\sqrt{3}-4\sqrt{5})i$

C. $2-(\sqrt{3}+4\sqrt{5})i$ D. $2+(\sqrt{3}+4\sqrt{5})i$

一种检验方法是重新计算一遍,设原式为 $x+yi$,则

$$[3-(\sqrt{3}-3\sqrt{5})i](x+yi)$$
$$=69-7\sqrt{15}+(\sqrt{3}-6\sqrt{5})i,$$

有方程组

$$\begin{cases}3x+(\sqrt{3}-3\sqrt{5})y=69-7\sqrt{15},\\(3\sqrt{5}-\sqrt{3})x+3y=\sqrt{3}-6\sqrt{5};\end{cases}$$

解出
$$x=\frac{\begin{vmatrix}69-7\sqrt{15} & \sqrt{3}-3\sqrt{5}\\ \sqrt{3}-6\sqrt{5} & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & \sqrt{3}-3\sqrt{5}\\ 3\sqrt{5}-\sqrt{3} & 3\end{vmatrix}}$$
$$=\frac{114-12\sqrt{15}}{57-6\sqrt{15}}$$
$$=2,$$

从而
$$y=\frac{1}{3}[(\sqrt{3}-6\sqrt{5})-2(3\sqrt{5}-\sqrt{3})]$$
$$=\sqrt{3}-4\sqrt{5}.$$

这表明B是对的.

另一种检验是逆向运算,将A,B,C,D分别与 $3-(\sqrt{3}-\sqrt{5})i$ 作乘法,也可得B是对的.

多解对照、逆向运算可以避免“复查核对”中常犯的重复性错误.

5. 观测估值

就是利用积累起来的经验，去判断合理性的方法．例如，求出人步行速度为 60 千米/小时，求出圆锥内切球半径比圆锥的底半径还大，求出双曲线的离心率大于 1，解对称方程组得到的解不对称等，只要稍加观察或粗略估计就可发现结果违背了日常生活和数学的一般常识．

例 7－8　$\triangle ABC$ 中，已知 $a\cos A+b\cos B=c\cos C$，试判定三角形的形状．

解　把余弦定理代入，有

$$a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+b\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=c\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},\qquad ①$$

即
$$(a^2-b^2)^2=c^4,\qquad ②$$

开方
$$a^2-b^2=c^2.\qquad ③$$

这是一个以 a 为斜边的直角三角形．□

检验　已知条件中 (a,A) 与 (b,B) 是对称的，因而上述结论或者是不完整的，或者是错误的，事实上，由②有

$$a^2-b^2=\pm c^2.$$

正确结论是，以 a 为斜边的直角三角形，或以 b 为斜边的直角三角形．

观察估值要充分利用题目的数字特征、结构特征，并熟悉心算技巧．

例 7－9　确定 2^{100} 是几位数．

讲解　由 $\lg 2^{100}=100\times 0.3010=30.10$，本应得出 31 位数，但对数的概念不清误得出 30 位数．这时，作一个估计

$$2^{100}-(2^{10})^{10}=(1024)^{10}>(10^3)^{10}=10^{30}$$

而 10^{30} 是 31 位数，故得出 30 位数肯定错了．

6．量纲检查

量纲是指某种事物或动作的单位，数学习题中如果涉及的事物或动作的单位不对，就表明其中存在着某种错误．如将三角形面积公式记为 $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}$，肯定就不对了，因为计算出来

的单位不是平方，若 a,b 表示线段的长，而计算过程中出现 a^2+b 之类的式子，那么计算就可能已经出错了，因为单位不同的量不能相加（除非乘了一个单位长度，在表达式中省略了）.

7. 特例检验

就是对解题的结果，取特殊值、特殊图形、特殊位置或特殊结构来检验是否错误. 因为要说明一个判断为假，只要指出这个判断成立的某个必要条件不具备即可. 比如，关于一般三角形的结论，我们可以用正三角形或直角三角形来检验；关于字母的结论，我们可以用取具体值来检验.

例7－10 已知 $\frac{\pi}{2}\leqslant\theta<\pi$, $\sin\theta=\frac{m-3}{m+5}$, $\cos\theta=\frac{4-2m}{m+5}$，求 $\tan\frac{\theta}{2}$.

解 $$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{m-3}{9-m}, \tag{①}$$

又 $$\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2},$$

故 $$\frac{m-3}{9-m}\geqslant 1,$$

解得 $$6\leqslant m\leqslant 9. \tag{②}$$

所以得 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{m-3}{9-m}$ 且 $6\leqslant m\leqslant 9$. □

检验 取 $m=7$，代入检验，得

$$\sin\theta=\frac{1}{3},\ \cos\theta=-\frac{5}{6},$$

有 $$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\frac{29}{36}\neq 1, \text{矛盾}.$$

这个检验使我们发现，所求出的结果是不充分的，重新审题可以找到一个隐含条件.

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\frac{m-3}{m+5}\right)^2+\left(\frac{4-2m}{m+5}\right)^2=1,$$

解得 $m_1=0, m_2=8$. 由②知，只有取 $m=8$，代入①可得正确的结

论为　　$\tan\dfrac{\theta}{2}=5.$ □

例7－11　已知 a 为实数，对于一切实数 x，函数 $f(x)=x^2 - 4ax+2a+6$ 的值域为$[0,+\infty)$，求 a 的取值.

解　依题意得 $\Delta\leqslant 0$，解得 $-1\leqslant a\leqslant 1.$ □

检验　取 $a=0$ 代入，得

$$f(x)=x^2+6\geqslant 6,$$

与值域为$[0,+\infty)$矛盾.

可见，答案不正确，事实上，$\Delta=0$ 时，$a=\pm 1$，确有

$$f(x)=(x\pm 2)^2$$

的值域为$(0,+\infty)$. 正确答案应是 a 取 1 或 -1. □

8. 条件检验

就是检查题目中所有的条件是否用到，解题过程的各个环节中对条件的使用有没有走样. 如果题设中的某一前提未被用上(例7－28)，或用得不准确，那解答就有可能是错误的或不完整的(特殊情况下才会条件过剩，见§7－4). 尤其是题目中的隐含条件，特别要注意有无忽视. 比如习题五中的第9题(P.338)中，两种证法都没有用到“a,b,c 是三角形的边长”这一重要条件，相当于 a,b,c 为任意正数不等式都成立，但取 $a=7,b=1,c=5$ 时，

$$\begin{aligned}&a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\\=&49\times 6+5\times(-4)+25\times 7\times(-2)\\=&-76<0.\end{aligned}$$

这一反例说明，两种证明都是错误的，[证明1]所引用的原理需要澄清，两个不等式

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0,$$

与　　$$b^2a(b-a)+c^2b(c-b)+a^2c(a-c)\geqslant 0;$$

对每一组(a,b,c)同真同假需要证明；而[证明2]“不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$”已改变了题意，原不等式对于字母 a,b,c 仅仅是轮转对称，而不是全对称的.

9. 数形结合

对于用代数方法求解的问题,可以用图形来进行检验;反之,几何问题也可以用代数方法来检验.这样能更全面地分析问题和纠正错误.

例7－12 已知关于 x 的方程 $|(x-1)(x-3)|=mx$ 有4个不同的实数解,求实数 m 的范围.

解 (1)当 $1\leqslant x\leqslant 3$ 时,原方程可化为

$$x^2-4x+3=-mx,$$

即

$$x^2+(m-4)x+3=0. \qquad ①$$

方程①应有两个不相等的实数根在区间(1,3)内,有

$$\begin{cases}\Delta=(m-4)^2-12>0,\\ x_1+x_2=4-m>0;\end{cases} \qquad ②$$

得

$$m<4-2\sqrt{3}. \qquad ③$$

(2)当 $x<1$ 或 $x>3$ 时,原方程为

$$x^2-4x+3=mx,$$

即

$$x^2-(m+4)x+3=0. \qquad ④$$

方程④应有两个不相等的实数根在区间 $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ 内,有

$$\Delta=(m+4)^2-12=m^2+8m+4>0, \qquad ⑤$$

得

$$m<-4-2\sqrt{3}\text{或 } m>-4+2\sqrt{3}. \qquad ⑥$$

由③、⑥合并得

$$-4+2\sqrt{3}<m<4-2\sqrt{3}.$$

检验 在同一坐标系中画出

$$y=|(x-1)(x-3)|$$

与

$$y=mx$$

的图像(如图7－2),要使两图像有4个交点,直线 $y=mx$ 应在 x 轴与切线 l 之间,必须 $m>0$,故答案是错误的.

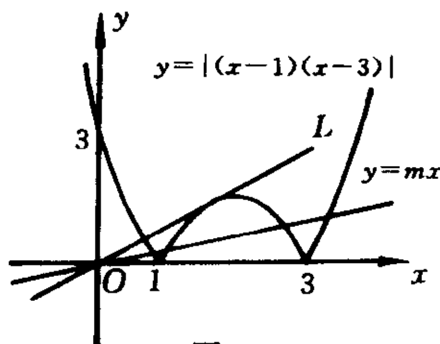


图7－2

事实上,式②、⑤都是必要而不充分条件,这个解法存在明显的逻辑缺陷.这也就是下面说的逻辑检验.

10.逻辑检验

解答数学题实质上是一系列推理论证的过程,只有各步推理都有充分的依据,论证都遵守相应的逻辑规则,解题才能正确,逻辑检验就是从检查解题的推理论证入手,全面考察推理是否真实,论证是否有效.例如,用反证法证题时,反设是否正确?用逆推法分析解题思路时,是否步步可逆?解方程或不等式时是否每一步都同解?逻辑上的不完善是大批解题失误的共同根源(参见§7－3中逻辑性错误).

例7－13　要使地球上任何地点的人都能看到全球各地的电视节目,只要有3颗与地球等距离的同步卫星P,Q,R作转播电视卫星,求卫星与地面的距离.

[《数学题解辞典(立体几何)》第632题]

解　3颗卫星所组成的三角形即球大圆的外切正三角形,所求与地面的距离即为正三角形顶点至球心的距离与球半径之差.如图7－3,过P,Q,R三点的平面应过球心O,则$\triangle PQR$为圆O的外切正三角形.故PQ,PR,RQ与圆O的切点A,B,C是大圆的三等分点,

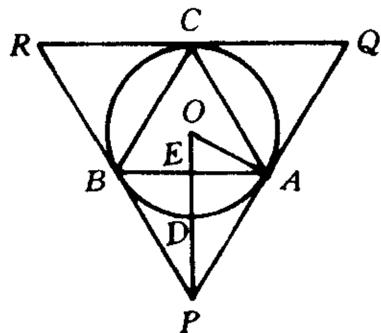


图7－3

则
$$S_{球冠ADB}=S_{球冠BC}=S_{球冠AC}=\frac{1}{3}S_{球面}.$$

设地球半径$R=6370$千米,卫星到地面距离$PD=h$.因为

$$S_{球冠ADB}=2\pi R\cdot ED,$$

所以
$$\frac{1}{3}\cdot 4\pi R^2=2\pi R\cdot ED,$$

得
$$ED=\frac{2}{3}R,$$

所以 $OE=\frac{R}{3}$.

$OP=OD+PD=R+h$,

而 $OP\cdot OE=R^2$,

有 $(R+h)\cdot\frac{R}{3}=R^2$,

得 $h=2R$.

故卫星与地球表面高度为地球直径长,即距地面12740千米.□

检验 由图7-3知,Rt△AOP中,$OP=2OA$,从而有

$h=R$.

这与$h=2R$是矛盾的.所以解法肯定有错误,进一步的研究可以发现,3颗卫星不能覆盖整个地球①②,题目是错题(数学习题的科学性见§7-4).

7-3 解题错误的分析

虽然我们谁都不愿意在解题中出现错误,而解题错误依然要出现在我们每个人身上.学生当然是比较普遍的,对于教师乃至专家也不能幸免.

检验可以帮助我们找到错误,但是找出错误还不是目的,至少不是最后目的,重要在于纠正错误."纠错"是解题教学的一项重要内容,纠错能力是解题能力的一个重要构成.通过纠错可以发展思维的正确性、严密性、完整性和批判性等.

为了能够"对症下药"地纠错,分析错误的表现形式及生成原因是必要的,有一种过于简单化的分析,认为一切错误都是知识性的,

---

① 欧其焕.关于用三颗地球同步卫星能否为全球转播电视节目的一道数学题.数学通报,1995年第3期,P.32.

② 《21世纪中国数学教育展望》P.287,北京师范大学出版社,1995年12月第1版.

因为种种错误都要最终反映到知识上来.其实,当一个人的认知结构不能同化他所接触的题目时,就会发生解题错误,所以,解题错误的成因,除了知识结构不完善之外,还应考虑到认知结构,有个中学高级教师为小学生写辅导材料时,有5道题重复着类似的错误:

(1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots+\frac{1}{399}$

$=\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\cdots+\frac{1}{19\times 21}$

$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{19}\quad\frac{1}{21}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{21}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{19}{21}$　①

$=\frac{19}{42}.\square$

(2) $\frac{1}{10}+\frac{1}{40}+\frac{1}{88}+\cdots+\frac{1}{928}$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{29}-\frac{1}{32}\right)$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{29}-\frac{1}{32}\right)$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{32}\right)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{30}{32}$　②

$=\frac{5}{16}.\square$

(3) $\frac{1}{21}+\frac{1}{77}+\frac{1}{165}+\cdots+\frac{1}{1677}$

$=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{39}-\frac{1}{43}\right)$

$=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{43}\right)$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{40}{43} \tag{③}$$

$$=\frac{10}{43}.\square$$

(4) $1+\frac{1}{3\times 6}+\frac{1}{6\times 9}+\cdots+\frac{1}{69\times 72}$

$$=1+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{69}-\frac{1}{72}\right)$$

$$=1+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{72}\right)$$

$$=1+\frac{1}{3}\times\frac{69}{72} \tag{④}$$

$$=1\frac{23}{72}.\square$$

(5) $\frac{1}{102\times 97}+\frac{1}{97\times 92}+\cdots+\frac{1}{7\times 2}$

$$=\frac{1}{2\times 7}+\cdots+\frac{1}{92\times 97}+\frac{1}{97\times 102}$$

$$=\frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{92}-\frac{1}{97}+\frac{1}{97}-\frac{1}{102}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{102}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{100}{102} \tag{⑤}$$

$$=\frac{10}{51}.\square$$

如果是小学生,我们可以认为这是分数减法上的知识性错误;如果是只发生在一道题上,我们也可以认为是书写上的偶然笔误.但对一个具有高级职称的中学教师来说,决不会小学的知识都未过关,更大的可能是心算中的记忆差错或瞬时遗忘.这应当属于心理性错误.稍加提醒,立即就能改正过来.

经对大量材料的整理分析并参考专家的意见①,我们将解题错

① 见参考文献[11]戴再平．数学习题理论,第六章.

误分为4类:知识性错误、逻辑性错误、策略性错误、心理性错误.这与§1-4解题基本功几乎是对应的.

1.知识性错误

这主要指由于数学知识上的缺陷所造成的错误.如误解题意(例7-14),概念不清、记错法则、用错定理(例7-15,例7-16,例7-17),不顾范围使用方法(例7-20,例7-25)等.

2.逻辑性错误

这主要指违反逻辑规则所产生的推理上与论证上的错误,如虚假论据(例7-18、例7-27),不能推出(例7-17,例7-19),偷换概念(例7-20),循环论证(例6-60、例7-21)等,常常表现为4种命题的混淆,充要条件的错乱(例7-22,例7-23,例7-24),反证法反设不真等.

由于数学知识与逻辑规则常常是相依共存的,从广义上说,我们也不能把逻辑知识排除在数学知识之外,所以,逻辑性错误与知识性错误经常是同时存在的,从哪个角度进行分析取决于对象特征或教学需要.在例2-1中使用数学归纳法的错误,§5-2-6中解题方法使用不当的例子(及相应习题3中的习题),§6-2-8中数形转换不等价例子等,都是从方法的角度谈解题错误,也就是更注重分析错误的知识因素,其实,当中的很多错例都有明显的逻辑因素和隐蔽的心理因素.应该说,逻辑性错误与知识性错误是互相影响的.

但是,知识性错误与逻辑性错误又是有区别的.知识性错误主要指涉及的命题是否符合事实(如定义、法则、定理等),核心是命题的真假性,逻辑性错误主要指进行的推理论证是否符合逻辑规则,核心是推理论证的有效性.当然,数学命题的事实真假性与推理论证的逻辑有效性是水乳交融的,然而,数学毕竟不是逻辑,我们依然应该也完全可以在知识盲点的基本位置和主要趋势上区分知识性错误与逻辑性错误.如证明:"$a^{0}=a^{1-1}=\frac{a}{a}=1$."主要还是逻辑性错误.

3.策略性错误

这主要指由于解题方向上的偏差,造成思路受阻或解题长度过大,特别是对于考试来说,如果解题思路过于曲折、存在多余的思维回路,即使做对了也因费时费事而有策略性错误(例 7-29,例 7-30).

4. 心理性错误

这主要指解题主体虽然具备了解决问题的必要知识与技能,但由于某些心理原因而产生的解题错误.如顺序心理(例 7-16,例 7-26),滞留心理(例 7-31),潜在假设(例 7-28),以及看错题、抄错题、书写丢三落四等.考试中的慌乱急躁、紧张焦虑、粗心大意等非智力因素表现欠佳而造成的过失性错误(例 1-15,例 1-16),也多属于心理性错误.一个大学生,心算$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}$时出现错误,主要不是知识问题而是短时记忆容量不足,使中间结果的存储与再现失真.这也是心理性错误,只要稍有笔算辅助,或有意识发展短时记忆能力,即可纠正.

例7-14 把一个边长为 1 的正方形分割成面积相等的 4 部分,使得其中的一部分内存在 3 个点,以这 3 个点为顶点可以组成一个边长大于 1 的等边三角形,满足上述性质的分割适合(　　).

A. 是不存在的

B. 恰有一种

C. 有有限多种,但不是一种

D. 有无穷多种

解 边长大于 1 的等边三角形的面积大于$\frac{\sqrt{3}}{4}$,4 个部分面积相等,其总面积大于$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4=\sqrt{3}>1$,超过了正方形的面积.应选 A.

评析 从解答的书写看,方向明确,推理严谨,选 A 应无懈可击.但真正的答案却为 D,原因在于题意理解错了.

题目只要求三角形的"顶点"属于同一部分,并不要求三角形的"全体"属于同一部分,甚至还不要求每一部分都是连通的,这样的分

割自由度非常大.如图7-4,先在单位正方形 $ABCD$ 内作一个正 $\triangle PAB$,然后分别以 A,B 为顶点作一个边长为 $\frac{1}{4}$ 的正方形,再居中作一个包括点 P 的边长为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 的正方形,这3个阴影正方形组成的一部分,面积恰为 $\frac{1}{4}$;以正方形的中心 O 为旋转中心,将阴影正方形旋转180°得3个记号为 S 的正方形组成分割的第二部分.剩余部分亦保持中心对称的特征,过 O 任作一直线 l 即可平分其面积.由 l 的任意性知,这样的分割有无穷多种.

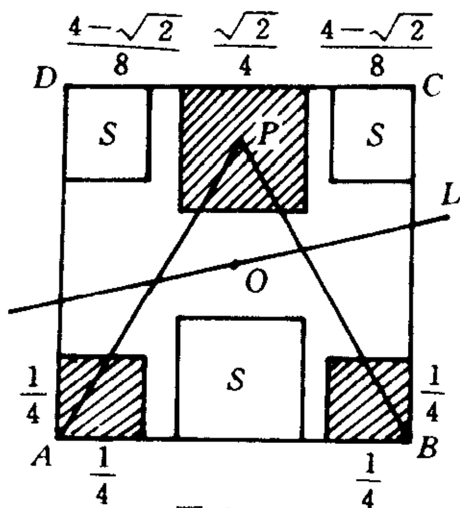


图7-4

选 A 的错误主要是知识性的,也可能有心理上的粗心大意.

例7-15 直线 AB 平行于平面 α,经过 AB 的一组平面与平面 α 相交,求证交线互相平行.

证明 设交线为 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$,则由线面平行的性质有

$$a_1 /\!/ AB,$$
$$a_2 /\!/ AB,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_n /\!/ AB,$$
$$\cdots\cdots$$

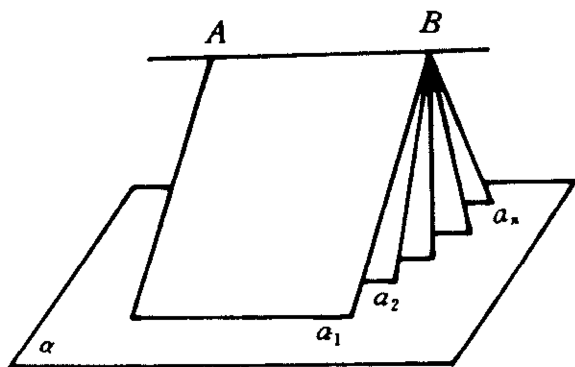


图7-5

再由平行线的传递性,得

$$a_1 /\!/ a_2 /\!/ \cdots /\!/ a_n /\!/ \cdots. \square$$

评析 过 AB 的平面不是可列集,“设交线 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$”本身未区分两类不同性质的无穷集合,或者是单个概念并未实质理解,或者是邻近概念辨别不清,主要属于知识性错误.与习题1第11题

错误性质相同.

例7－16 化简$\sqrt{\lg^2 5-\lg 25+1}$.

解 原式$=\sqrt{\lg^2 5-2\lg 5+1}$

$=\sqrt{(\lg 5-1)^2}$

$=\lg 5-1$.□

评析 错误在最后一步,有两种可能:

(1)算术根的概念不清楚,由顺序心理的驱使,得出$\lg 5-1$.

(2)虽然知道算术根,但对数知识不过关,以为$\lg 5>1$.

这两种可能都主要表现为知识性错误.

例7－17 已知$z\in\mathbf{C}$且$z=\dfrac{1}{1+3ai}$,$a\in(0,+\infty)$,求复平面内复数z所对应的点的轨迹.

解 求模$|z|=\dfrac{1}{\sqrt{1+9a^2}}$, ①

这是以原点为圆心,半径为$\dfrac{1}{\sqrt{1+9a^2}}$的同心圆.□

评析 z所对应的点是随a的变化而变化的动点,a是取自$(0,+\infty)$的变量,式①表示了模随a变化的函数表达式,它不是常数,所以①不是圆,事实上

$$z=\frac{1}{1+9a^2}-\frac{3a}{1+9a^2}i,$$

有
$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{1+9a^2}>0,\\ y=-\dfrac{3a}{1+9a^2}<0.\end{cases}\quad(a>0).$$

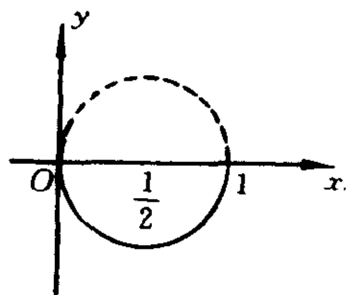


图7－6

消去a,得轨迹为半圆(如图7－6):

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}\ (x>0,\ y<0).$$

原解法中的错误,主要是误认为a为常数了,对字母表示数的任意性认识不深.属知识性错误,而对①式下结论为圆,在逻辑上叫

做不能推出.

例 7－18 已知$\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$是无理数,求证$\sqrt{3}+\sqrt{5}$也是无理数.

证明 因为无理数之和为无理数,所以由$\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$为无理数即得$\sqrt{3}+\sqrt{5}$为无理数.□

评析 "无理数之和为无理数"是一个假命题(如两个互为相反数的无理数之和为0,就不是无理数),从这个虚假前提出发,虽然三段论推理是完整的,结论也是正确的,但违反了"论据应当真实"的逻辑规则,犯有"虚假论据"的逻辑错误.

所以,这个例子既犯有明显的知识性错误,又犯有典型的逻辑性错误,两相比较,知识性错误是主要盲点,这个例子还有助于纠正一种误解:从假命题出发,经过正确的推理必然得出假命题.

例 7－19 对 $a\geqslant 3$,求证$\sqrt{a-1}+\sqrt{a-2}>\sqrt{a}+\sqrt{a-3}$.

证明 由
$$\sqrt{a-1}+\sqrt{a-2}\geqslant 2\sqrt[4]{a^2-3a+2}, \quad ①$$
$$\sqrt{a}+\sqrt{a-3}\geqslant 2\sqrt[4]{a^2-3a}. \quad ②$$
但
$$\sqrt[4]{a^2-3a+2}>\sqrt[4]{a^2-3a}, \quad ③$$
故得
$$\sqrt{a-1}+\sqrt{a-2}>\sqrt{a}+\sqrt{a-3}.□ \quad ④$$

评析 式①、②、③都是正确的,但推出④是无效的,当中使用了杜撰的假命题"大于较大的数者也较大",表现为"不能推出".

此题的一个几何意义是双曲线 $y^2-x^2=1$ 上的两点 $A(\sqrt{a-1},\sqrt{a})$,$B(\sqrt{a-3},\sqrt{a-2})$的斜率小于1.

例 7－20 已知$|a|\leqslant 1$,$|b|\leqslant 1$,求证
$$ab+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\leqslant 1.$$

证明 由$|a|\leqslant 1$,$|b|\leqslant 1$,可设
$$\sin\alpha=a,\quad \cos\alpha=b.$$
于是有
$$ab+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$$
$$=\sin\alpha\cos\alpha+\sqrt{(1-\sin^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)}$$
$$=\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{2}|\sin 2\alpha|$$

$$\leqslant |\sin 2\alpha|$$
$$\leqslant 1. \square$$

评析　原题中 a,b 是两个独立的量，但所作的变换增加了一个条件 $a^2+b^2=1$，作为知识性错误是换元不等价，作为逻辑性错误是“偷换概念”.

例 7－21　已知△ABC 中，AD 为∠A 的平分线，$BD>DC$，求证 $AB>AC$.

证明　如图 7－7，在 AB 上取点 E，使 $AE=AC$，连结 DE. 由 AD 平分∠A 得△AED≌△ACD，从而∠AED ＝∠C. 但由外角定理知∠AED＞∠B，所以∠C＞∠B，从而 $AB>AC$. □

评析　证明中取 $AE=AC$，已经承认了

$$AB>AE=AC.$$

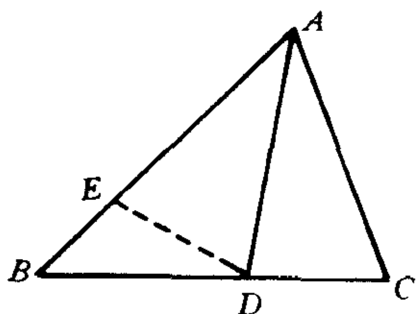


图 7－7

这相当于从 $AB>AC$ 出发，证明 $AB>AC$，等于什么也没有证. 犯了“循环论证”的逻辑错误. 在过去的高考中，有的考生用余弦定理证勾股定理（1980 年）、用对数换底公式证对数换底公式（1979 年）都是典型的“循环论证”.

例 7－22　已知关于 x 的二次方程

$$x^2-2mx+m^2-1=0$$

在(3,6)内只有一个实根，求实数 m 的取值范围.

解　记　$f(x)=x^2-2mx+m^2-1$，

则 $f(x)=0$ 在(3,6)内只有一个实根的充要条件为

$$f(3)f(6)<0. \quad ①$$

即　$(m^2-6m+8)(m^2-12m+35)<0$，

$$(m-2)(m-4)(m-5)(m-7)<0,$$

解得　$2<m<4$ 或 $5<m<7$. □　　②

评析　取 $m=4$ 时，有

$$x^2-8x+15=0,$$

得两实根为3,5,恰有一个在(3,6)上.

又取 $m=5$ 时,有

$$x^2-10x+24=0,$$

得两实根为4,6,恰有一个在(3,6)上.

可见答案②式减根了,原因在于式①为充分而不必要条件.事实上,方程两根为 $x_1=m-1$, $x_2=m+1$,其中只有一个属于(3,6)的充要条件为

$$x_1\leqslant3<x_2<6,$$

或　$$3<x_1<6\leqslant x_2.$$

得　$$m-1\leqslant3<m+1<6,$$

或　$$3<m-1<6\leqslant m+1.$$

解得　$$2<m\leqslant4 \text{ 或 } 5\leqslant m<7.$$

例7-23　若方程 $x^2+px+q=0$ 的两根是直角△ABC 的两个锐角的正弦,试求 p 与 q 之间的关系.

解　设∠A,∠B 为锐角,则

$$\begin{cases} p^2-4q\geqslant0, & ① \\ \sin A+\sin B=-p, & ② \\ \sin A\sin B=q, & ③ \\ \cos A=\sin B. & ④ \end{cases}$$

由②平方,并将③、④代入,得

$$p^2=1+2q, \qquad ⑤$$

把①代入⑤,得

$$q\leqslant\frac{1}{2}.$$

故得最后结果为

$$p^2=1+2q \text{ 且 } q\leqslant\frac{1}{2}.$$ □

评析　这个解法忽视了隐含条件 $\sin A>0$, $\sin B>0$,且在消去角参数的过程中扩大了 p,q 的取值范围.由

$$-p=\sin A+\cos A=\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$q=\sin A\cos A=\frac{1}{2}\sin 2A,$$

知 $$-\sqrt{2}\leqslant p<-1,\quad 0<q\leqslant\frac{1}{2}.$$

所以,正确结论应是

$$\begin{cases}p^2=1+2q,\\-\sqrt{2}\leqslant p<-1,\\0<q\leqslant\frac{1}{2}.\end{cases}$$

例 7－24 已知 4 个数成等比数列,其积为 16,中间两数之和为 5,求其公比.

解 设 4 个数为: $\frac{a}{q^3},\ \frac{a}{q},\ aq,\ aq^3,$ ①

依题意得 $$\begin{cases}a^4=16, & ②\\ \frac{a}{q}+aq=5. & ③\end{cases}$$

由②得 $a=\pm 2$,代入③,得

$$\frac{1}{q}+q=\pm\frac{5}{2},$$

平方 $$q^2+\frac{1}{q^2}=\frac{17}{4}.$$

解得 $q^2=4$ 或$\frac{1}{4}$. 即等比数列的公比为 4 或$\frac{1}{4}$. □

评析 设 4 个数为①式本身限定了公比为 $q^2>0$,这就排除了公比为负数的情况,因此是充分而不必要的,若设 4 个数为

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3.$$

则依题意有 $$\begin{cases}a^4q^6=16, & ④\\ aq(1+q)=5. & ⑤\end{cases}$$

对④式开方,对⑤式平方得

$$\begin{cases} a^2q^3=\pm 4, & ⑥\\ a^2q^2(1+2q+q^2)=25. & ⑦\end{cases}$$

消去 a，分别得

$$4q^2-17q+4=0, \quad ⑧$$

$$4q^2+33q+4=0. \quad ⑨$$

分别解得　$q_1=4,\ q_2=\frac{1}{4},\ q_{3,4}=\frac{-33\pm 5\sqrt{41}}{8}$.□

例 7－25　解三角方程

$$\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=2\cos x.$$

解　平方，得

$$2-2\sqrt{1-\sin^2 x}=4\cos^2 x,$$

即　$1\pm\cos x=2\cos^2 x$，

有　$(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$，

或　$(2\cos x+1)(\cos x-1)=0$；

得　$x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3},\ n\in Z$.□

评析　这个结果既有减根

$$x=(2n+1)\pi+\frac{\pi}{3},\ n\in Z,$$

又在平方时增根

$$x=2n\pi-\frac{\pi}{3},\ n\in Z.$$

事实上，用

$$\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}>0 \quad ①$$

乘原方程的两边，得

$$\sin x=\cos x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}).$$

可见，$\sin x$ 与 $\cos x$ 同号，即 x 在第一、三象限，当对原方程平方时，有

$$2\cos^2 x+|\cos x|-1=0,$$

分解　$(2|\cos x|-1)(|\cos x|+1)=0$.

但 $$|\cos x|+1\neq 0,$$
只有 $$2|\cos x|-1=0.$$

当 x 在第一象限时，有

$$\cos x=\frac{1}{2},$$

得 $$x=2n\pi+\frac{\pi}{3},\ n\in Z. \quad ②$$

当 x 在第三象限时，有

$$\cos x=-\frac{1}{2},$$

$$x=(2n+1)\pi+\frac{\pi}{3},\ n\in Z. \quad ③$$

合并②、③得

$$x=n\pi+\frac{\pi}{3},\ n\in Z.$$

验根有

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\sqrt{1+\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{3}\right)}-\sqrt{1-\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{3}\right)}\\&=\sqrt{1+(-1)^n\frac{\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{1-(-1)^n\frac{\sqrt{3}}{2}}\\&=(-1)^n\\&=2\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{3}\right)\\&=\text{右边}.\end{aligned}$$

可见，求解无误.

例 7－26 某工程车从仓库取出电线杆到 500 米以外的公路一侧栽立，每隔 50 米在路边栽立电线杆一根，每次至多只能运电线杆 3 根. 要完成栽立电线杆 20 根的任务，最后返回仓库，此工程车所行驶的路程最少为多少米？

解 为了使行驶的路程最少，汽车应尽可能满载，6 趟满载后，剩下 2 根，共 7 趟即可完成. 其中第 1 趟运 3 根共走 1200 米，第 2 趟比第 1 趟多走 300 米，逐次组成一个公差为 $d=300$，而 $a_1=1200$ 的

等差数列.走完第6趟后,第7趟运2根,共走了

$$S_1 = 1200 + 300 \times 5 + 100 \times 2 = 2900(\text{米}).$$

总路程为 $S = \dfrac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2} + S_1$

$$= \frac{6(2 \times 1200 + 5 \times 300)}{2} + 2900$$

$$= 14600(\text{米}).\square$$

评析　这种解法受"顺序心理"的支配,默认"就近装满"行驶的路程最少,既有心理性错误,又有知识性错误,主要还是心理性错误.请看换一种解法.

第一趟运2根,行程为 $550 \times 2 = 1100$ 米,第2趟运3根多走300米,逐次组成一个公差为 $d = 300$,而 $a_1 = 1100$ 的等差数列,其7项和为

$$S_7 = \frac{7(2 \times 1100 + 6 \times 300)}{2} = 14000(\text{米}).$$

可见,先运2根,总路程较少.

那么,有没有比这总路程更少的运法呢?显然,装载少于1根的运法是不足取的.现设第 n 趟运2根($1 \leqslant n \leqslant 7$),其余都运3根.其行驶总路程为

$$S = S_7 - S',$$

其中 S_7 为7趟全载3根的路程,有

$$S_7 = \frac{7(2 \times 1200 + 6 \times 300)}{2} = 14700(\text{米}).$$

而 S' 为上述计算中多计算了的路程.因为运2根时,每趟比运3根少走了100米,从第 n 趟起共有 $(8-n)$ 趟,故

$$S' = 100 \times (8 - n) = 800 - 100n,$$

得

$$S = 13900 + 100n, \quad (1 \leqslant n \leqslant 7).$$

这是 n 的一次函数,当 $n = 1$ 时,总路程最短为14000米.

例7-27　已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 的对应顶点连线 AA_1,BB_1,CC_1 相交于一点 O,而它们的对应边延长线分别相交于 P,Q,R(如图7-8),求证 P,Q,R 三点共线.

证明 首先视 ABC 与 $A_1B_1C_1$ 为空间两个不重合的平面，因为 AA_1 与 BB_1 相交于 O，所以 AB 与 A_1B_1 为共面直线，其交点 P 既在平面 ABC 上，又在平面 $A_1B_1C_1$ 上，P 为两平面的交点. 同理 Q,R 也是两平面的交点，但空间两平面相交于一条直线，故 P,Q,R 在交线上.

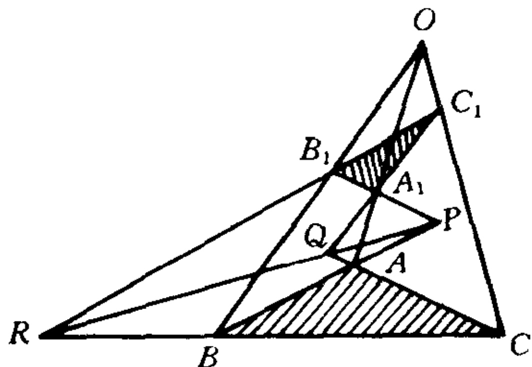


图 7－8

现将平面 $A_1B_1C_1$ 绕其交线旋转使与平面 ABC 重合，便得出原命题成立.

评析 空间情况的证明，关键是两相交平面只有惟一的交线，当两平面重合时，交线便不惟一了. 所以，从空间向平面过渡的理论依据是不可靠的. 如果这种证法成立，那么下面两个命题也应该同为真命题.

命题 1 设不共面的两个四边形，它们对应顶点的连线共点，则它们的对应边交点必共线.

命题 2 设共面的两个四边形，它们对应顶点的连线共点，则它们的对应边交点必共线.

但命题 1 为真命题，而命题 2 为假命题. ①

例 7－28 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义，$f(0)=f(1)$，如果对于任意不同的 $x_1,x_2\in[0,1]$ 都有 $|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|$，求证 $|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$.

证明 由已知条件有

① 梁绍鸿. 几个证明失检的例题. 初等数学研究，P. 232，北京师范大学出版社，1990 年 6 月第 1 版.

$$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1| \leqslant |x_2-0|=x_2, \quad ①$$

$$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1| = |x_1-x_2| \leqslant |1-x_2|=1-x_2. \quad ②$$

相加即得.□

评析　首先注意到,条件 $f(0)=f(1)$ 在证明中没有用到,其有效性值得怀疑.由具体分析证明中的两次放大看到,第一次放大时,将 x_1 缩小为 0,附加了一个条件

$$|x_2-x_1|\leqslant x_2 \Leftrightarrow x_1\leqslant 2x_2. \quad ③$$

第二次放大时,将 x_1 放大为 1,附加了一个条件

$$|x_1-x_2|\leqslant 1-x_2 \Leftrightarrow 2x_2\leqslant 1+x_1.$$

④这两个附加条件都是"潜在假设",实质上只证明了③、④同时满足时

$$x_1\leqslant 2x_2\leqslant 1+x_1,$$

原不等式成立,其余的情况还没有证.

例 7－29　解方程

$$3^{x+2}-3^{2-x}=80.$$

[1995 年数学高考文科题]

解　设 $y=3^x$,原方程可化为

$$9y^2-80y-9=0,$$

代入求根公式　$y_{1,2}=\dfrac{80\pm\sqrt{6724}}{18}$.

当 $3^x=\dfrac{80+\sqrt{6724}}{18}$ 时,得

$$x_1=\log_3\frac{80+\sqrt{6724}}{18};$$

当 $3^x=\dfrac{80-\sqrt{6724}}{18}$ 时,得

$$x_2=\log_3\frac{80-\sqrt{6724}}{18}.\ \square$$

评析 这个解法由于使用求根公式而导致大数运算,由于数字大而不会开方$\sqrt{6724}=82$.从而疏忽了$80-\sqrt{6724}<0$.所以,解法的第一个问题是x_2不仅为“增根”,而且没有意义(零和负数没有对数);第二个问题是x_1还未计算出最后结果$x_1=2$.

使用求根公式解二次方程不能算知识上有什么错误(尔后有知识性错误),但若用十字相乘法(办法不惟一),将方程变为

$$(9y+1)(y-9)=0.$$

便可避免大数运算和相应的错误.所以,本题中的问题主要表现为策略性错误.

例 7-30 $\sin15^\circ\sin75^\circ$的值是 _____.

解 原式$=\sqrt{\dfrac{1-\cos30^\circ}{2}}\sin(45^\circ+30^\circ)$

$$=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}(\sin45^\circ\cos30^\circ+\cos45^\circ\sin30^\circ)$$

$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{8}.\square$$

评析 这个解法,每一步运算都没有知识性错误,但从整体上看,有解题方向调控上的策略性错误.在考试中,这类错误经常出现并影响得分.事实上

$$\text{原式}=\sin15^\circ\cos15^\circ=\frac{1}{2}\sin30^\circ=\frac{1}{4}.\square$$

例 7-31 在复数范围内解方程$|x|+x=1+3i$.

解 原方程即

$$|x|=(1+3i)-x,$$

平方 $$x^2=(1+3i)^2-2(1+3i)x+x^2,$$

得 $$x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

评析 误认$|x|^2=x^2$,反映了认识还停留在实数的水平上.在心理上是滞留性错误.

例 7-32 画出方程$\sqrt{x^2-1}(y^2-1)=0$所表示的曲线.

解　有两种不同的解答，如图 7－9(1)或图 7－9(2).

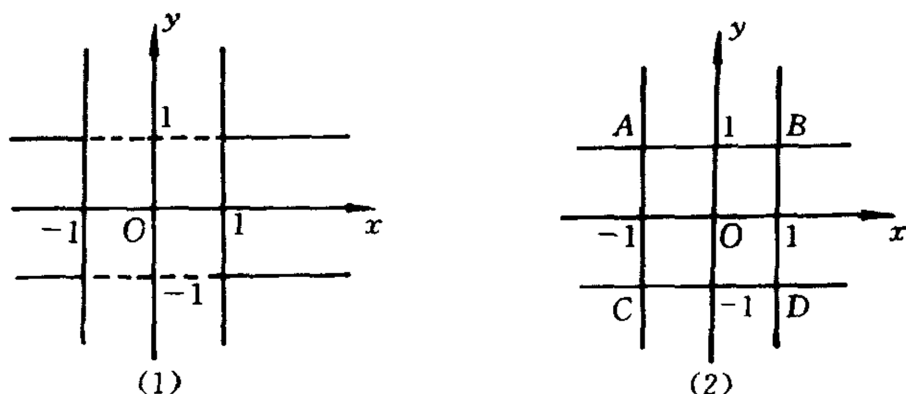


图 7－9

河南《中学生学习报》第 547 期认为，本题的正确答案为图 7－9(2). 因为线段 AB 内点的坐标为 $(m,1)(-1<m<1)$，代入方程得

$$\sqrt{m^2-1}\cdot 0=\sqrt{1-m^2}\cdot i\cdot 0=0 \quad ①$$

成立. 因此，方程所表示的曲线应加上线段 AB. 同理，也应加上线段 CD.

评析　这个解法认为，对 $-1<m<1$ 时，式①是成立的. 如果将这个式子拆成 3 个式子：

(1) $\sqrt{m^2-1}=\sqrt{1-m^2}\cdot i$；

(2) $\sqrt{m^2-1}\cdot 0=\sqrt{1-m^2}\cdot i\cdot 0$；

(3) $\sqrt{m^2-1}\cdot 0=0$.

那么，对于现行中学教材，这 3 个式子全都是错的.

首先，记号 $\sqrt{a}$，当 $a\geqslant 0$ 时，表示 a 的算术平方根，而 $a<0$ 时，该记号没有意义. 初中时是这样说的，到高中学了复数之后，负数可以开平方，-1 的平方根为 $\pm i$，但高中课本从未把虚数单位 i 定义为

$$\sqrt{-1}=i,$$

更没有

$$\sqrt{-2}=\sqrt{2}i,$$

$$\sqrt{-3}=\sqrt{3}i,$$

……

$$\sqrt{m^2-1}=\sqrt{1-m^2}i \quad (-1<m<1).$$

其次,数学上研究的运算是对有定义的对象进行的,当$|m|<1$时,$\sqrt{m^2-1}$没有定义,因而也就不能参加运算;虽然$\sqrt{1-m^2}i\cdot 0$有定义并且$\sqrt{1-m^2}\cdot i\cdot 0=0$,但它与$\sqrt{m^2-1}\cdot 0$毫无关系,让一个没有定义的东西去与0相乘,并且让它等于一个有意义的式子,既有知识性错误,又有逻辑性错误.

最后指出,"任何数乘以零都等于零",说的是有定义的数,不应误解为:任何东西(不管有意义还是没有意义)乘上零都等于0.所以当$|m|<1$时,$\sqrt{m^2-1}\cdot 0$没有意义,不能得出其值为0.没有谁会认为$x=0$是$\tan x\cdot\cot x=0$或$x\cdot\frac{1}{x}=0$的解.所以,此题的正确答案应是图7-9(1).

关于解题的错误,下一节还要从习题科学性的角度进行分析.

7-4 数学习题的科学性

这里考虑的是常规数学习题(非开放性),重点是综合题.

如果我们把每一道数学综合题都看做一定数学系统的子系统,那么,题目的条件与所在系统的公理组成的体系应具有充分性——足以推导出题目的结论;独立性——每一个条件都不是多余的;相容性——条件与条件之间、条件与结论之间不存在矛盾,这是一道题目满足科学性的逻辑基础.

此外,数学习题是数学教学的一部分,它应该服务于数学教学,与教学要求相一致,与教学目的相协调.当然,数学习题的叙述还应该是清楚的、无歧义的.这些构成了一道题目满足科学性的教学要求.

存在逻辑矛盾的题目是错题,不符合教学要求的题目是病题.错

题将绝对无解，病题也会产生暂时或相对无解．因此，错题、病题与无解题是有联系的，但又有本质的区别，错题、病题是指题目有科学性的错误，而无解题则是符合科学性的．目前，对错题、病题、无解题，还没有确切的定义．特别是在重大考试中，命题者，阅卷人与考生，往往看法很不一样．为免歧义，本书约定，"无解"只有 3 种情况：

(1)解方程(组)、解不等式(组)时，允许解集为空集．

(2)作图题、轨迹题在讨论部分，允许出现无解的情况．

(3)参数讨论题，作为一种情况允许出现空集、无解、不存在、没有意义等词．

我们认为，除这 3 种情况外，不要轻易以"无解题"作为遁词，而放弃对题目科学性的追究．在 §6－3 等处我们已经见过习题科学性的讨论．下面再看两个例子．

例 7－33　求方程 $x^2-2x\cos\frac{\pi x}{2}+1=0$ 的实数解．

解　设 x_0 是方程的实数解，有

$$x_0{}^2-2x_0\cos\frac{\pi x_0}{2}+1=0,$$

配方　$$\cos^2\frac{\pi x_0}{2}-1=\left(x_0-\cos\frac{\pi x_0}{2}\right)^2\geqslant 0 \qquad ①$$

但　$$\cos^2\frac{\pi x_0}{2}-1\leqslant 0,$$

故得　$$\cos^2\frac{\pi x_0}{2}=1.$$

得　$$x_0=2k,(k\in Z).$$

代入①，得 $k=\pm\frac{1}{2}$，这与 $k\in Z$ 矛盾．

故原方程没有实数解．□

这是无解题．

例 7－34　一个正三棱台的下底和上底的周长分别为 30cm 和 12cm，而侧面积等于两底面积之差，求斜高．

[1987 年数学高考理科题]

解 由正三棱台知,上底三角形边长为 $a=4\text{cm}$,下底三角形边长为 $b=10cm$,其侧面积为

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot h\cdot 3,$$

依题意,有 $$\frac{a+b}{2}\cdot h\cdot 3=\frac{\sqrt{3}}{4}b^2-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2,$$

得斜高 $$h=\frac{\sqrt{3}}{6}(b-a)=\sqrt{3}(\text{cm}).\square$$

评析 当侧面积等于两底面积之差时,棱台的高等于0,这样的棱台不存在.有人认为这是错题,有人认为这是病题,有人认为既无错也无病,是无解题.在考试中,这样的题目是无效的,最后,每人按满分计算.

我们认为,从中学的实际出发应算错题.

7－4－1 逻辑性要求

这里主要提出4条要求,即条件的充分性、条件的相容性、条件与结论的相容性和条件的独立性.其中前3条是绝对的,第4条是相对的.

1.条件的充分性

解数学题实质上是从条件出发到结论的一系列推理,前一步推理的结果又成为后一步推理的条件.这里面的每一步推理都要满足充足理由律,这就要求题目的条件对于推出结论是充分的.否则,题目本身是个假命题.

从教学的角度看,我们不能让学生去证明一个假命题,也不能让学生去解答一个无解的计算题.例外的情况只有本节开头关于"无解"的3个"约定".

有些条件不充分的题目,之所以能够存在,是由于解题时有心理上的"潜在假设",或逻辑上的"以偏概全".

例7－35 两条斜线段 PA,PB 和平面 α 所成的角相等的充要条件是 $PA=PB$.

[《立体几何》课本 P.30,人民教育出版社 1981 年 12 月第 1 版]

讲解 这个命题的"证明",默认了点 P 在平面外,当点 P 在平面上时,命题不成立.

例 7－36 已知实数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots$,满足 $a_{i-1}+a_{i+1}=2a_i(i=1,2,\cdots)$,求证 对于任何 n,$P(x)=a_0C_n^0(1-x)^n+a_1C_n^1x(1-x)^{n-1}+a_2C_n^2 2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+a_{n-1}C_n^{n-1}x^{n-1}(1-x)+a_nC_n^nx^n$ 是一次多项式.

[1986 年全国高中联赛试题]

证明 由已知得 $\{a_n\}$ 为等差数列,有

$$
\begin{aligned}
P(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_kC_n^kx^k(1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}[a_0+k(a_1-a_0)]C_n^kx^k(1-x)^{n-k} \\
&= a_0\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}+(a_1-a_0)\sum_{k=1}^{n}kC_n^kx^k(1-x)^{n-k} \\
&= a_0[x+(1-x)]^n+(a_1-a_0)\sum_{k=1}^{n}nC_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= a_0+(a_1-a_0)nx\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-1}^{i}x^i(1-x)^{(n-1)-i} \\
&= a_0+(a_1-a_0)nx[x+(1-x)]^{n-1} \\
&= a_0+(a_1-a_0)nx.
\end{aligned}
$$

得证 $P(x)$ 为一次多项式.□

评析 由 $P(x)=a_0+(a_1-a_0)nx$ 知,需要 $a_1-a_0\neq 0$ 才能保证 $P(x)$ 为一次多项式,条件对于推出结论是不充分的.

例 7－37 已知 $x_k+\dfrac{1}{x_k}=2\cos\theta_k(k=1,2,\cdots,n)$,求证

$$x_1x_2\cdots x_n+\frac{1}{x_1x_2\cdots x_n}=2\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n).$$

证明 由已知得

$$x_k^2 - 2x_k\cos\theta_k + 1 = 0 \qquad ①$$

解得 $$x_k = \cos\theta_k + i\sin\theta_k.$$

从而

$$\begin{aligned} & x_1x_2\cdots x_n \\ &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\cdots(\cos\theta_n + i\sin\theta_n) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n), \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x_1x_2\cdots x_n} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) - i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n).$$

相加即得.□

评析 由方程①应解得两个值

$$x_k = \cos\theta_k \pm i\sin\theta_k.$$

一般情况下,乘积 $x_1x_2\cdots x_n$ 最多可有 2^n 个不同的值. 仅当 $x_k = \cos\theta_k + i\sin\theta_k (k = 1, 2, \cdots, n)$时,才能得出结论,因此,条件对于推出结论是不充分的.

2.条件的相容性

就是条件本身不能互相矛盾.首先不能与本系统的公理、定理等相矛盾,其次是题目的多个条件之间不能互相矛盾.

例7-38 已知 $\sin\alpha = \frac{5}{7}$, $\cos(\alpha + \beta) = \frac{11}{14}$,且 α, β 都是锐角,求 $\cos\beta$.

[原高中《数学》课本第一册 P.164 复习题三第 6 题,人民教育出版社,1979 年第 1 版]

解 由$0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$,知

$$0 < \alpha + \beta < \pi,$$

又 $$\cos(\alpha + \beta) = \frac{11}{14} > 0;$$

所以 $$\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \frac{5\sqrt{3}}{14},$$

且 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$;

得
$$\begin{aligned}\cos\beta&=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]\\&=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha\\&=\frac{11}{14}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{7}+\frac{5\sqrt{3}}{14}\cdot\frac{5}{7}\\&=\frac{22\sqrt{6}+25\sqrt{3}}{98}.\square\end{aligned}$$

评析 由已知条件知

$$0<\alpha<\alpha+\beta<\pi,$$

得 $\frac{2\sqrt{6}}{7}=\cos\alpha>\cos(\alpha+\beta)=\frac{11}{14}$,

即 $4\sqrt{6}>11$,

或 $96>121$, 矛盾.

这说明题目条件之间是矛盾的.事实上,$\alpha=\arcsin\frac{5}{7}\approx45^\circ35'$,$\alpha+\beta=\arccos\frac{11}{14}\approx38^\circ12'$,与 α,β 都是锐角矛盾.

例7－39 设 a,b,c 为3个互不相等且均不为零的实数,同时满足

$$a^3+1988a-1989=0,$$
$$b^3+1988b-1989=0,$$
$$c^3+1988c-1989=0.$$

求 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 的值.

解 由已知得 a,b,c 是方程

$$x^3+1988x-1989=0 \quad ①$$

的全体根,有

$$ab+bc+ca=1988,$$
$$abc=1989.$$

从而

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ca+ab}{abc}=\frac{1988}{1989}.\square$$

评析 由①得

$$(x-1)(x^2+x+1989)=0.\square$$

可见，方程只有惟一的实根 $x=1$，与 a,b,c 互不相等矛盾，也与 a,b,c 均为实数矛盾，因而已知条件之间是不相容的.

例 7－40 在不等边△ABC 中，若

$$a\cos A+b\cos B+c\cos C=0, \qquad ①$$

$$a\sin A+b\sin B+c\sin C=0. \qquad ②$$

求证 $$\frac{\sin(B-C)}{a}=\frac{\sin(C-A)}{b}=\frac{\sin(A-B)}{c}.$$

证明 由①知 $\cos C\neq0$，否则 $\angle C=90°$，且

$$a\cos A+b\cos B=0,$$

有 $$a\cdot x\frac{b}{c}+b\cdot\frac{a}{c}=0.$$

得 $ab=0$ 与 a,b,c 为直角三角形的直角边矛盾.

将①、②变为

$$\begin{cases}a\cdot\dfrac{\cos A}{\cos C}+b\cdot\dfrac{\cos B}{\cos C}+c=0,\\[2mm] a\cdot\dfrac{\sin A}{\sin C}+b\cdot\dfrac{\sin B}{\sin C}+c=0.\end{cases}$$

这表明点 $P\left(\dfrac{\cos A}{\cos C},\dfrac{\cos B}{\cos C}\right)$，$Q\left(\dfrac{\sin A}{\sin C},\dfrac{\sin B}{\sin C}\right)$ 在直线

$$ax+by+c=0 \qquad ③$$

上. 又过 P,Q 的直线方程为

$$\left(y-\frac{\cos B}{\cos C}\right)\left(\frac{\cos A}{\cos C}-\frac{\sin A}{\sin C}\right)=\left(x-\frac{\cos A}{\cos C}\right)\left(\frac{\cos B}{\cos C}-\frac{\sin B}{\sin C}\right),$$

即 $$x\sin(B-C)+y\sin(C-A)+\sin(A-B)=0. \qquad ④$$

由于两点决定惟一的直线，故③、④重合，得对应系数成比例.

$$\frac{\sin(B-C)}{a}=\frac{\sin(C-A)}{b}=\frac{\sin(A-B)}{c}.\square$$

评析　在$\triangle ABC$中,有

$$\sin A>0,\ \sin B>0,\ \sin C>0.$$

故

$$a\sin A+b\sin B+c\sin C>0,$$

这与②式矛盾.另由②两边乘以$2R$可得

$$a^2+b^2+c^2=0,$$

也与a,b,c为三角形的三边矛盾.

例7－41　设x,y,z是3个实数,且有

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2,$$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=1.$$

则$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}$的值是(　　).

A.1　　B.$\sqrt{2}$　　C.$\frac{3}{2}$　　D.$\sqrt{3}$

[1991年南昌初中数学竞赛题]

解　由$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(2^2-1)$$

$$=\frac{3}{2}.$$

知应选C.□

评析　上述运算实际上是在复数范围内进行的,因为对于实数x,y,z,有

$$4=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2\leqslant 3\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)=3,$$

矛盾.

例7－42　已知奇函数$f(x)$的最小正周期为2,且$f(1)=1991$,则$f(3)=$______.

解法 1 由周期为 2 知

$$f(3)=f(2+1)=f(1)=1991.\square$$

解法 2 由奇函数且周期为 2 知

$$f(3)=f(2\times 2-1)=f(-1)=-f(1)=-1991.\square$$

解法 3 由奇函数及周期为 2 得

$$f(3)=f(2+1)=f(1)=-f(-1),$$

$$f(3)=f(2\times 2-1)-f(-1),$$

相加得 $f(3)=0.\square$

评析 3 种解法的结果是互相矛盾的,原因在于已知条件互相矛盾.

若承认奇函数且周期为 2,则有

$$f(-1)=-f(1),$$

$$f(-1)=f(-1+2)=f(1).$$

得 $f(1)=0$,这与 $f(1)=1991$ 矛盾.

例 7－43 从平面外一点 D 向平面引垂线段 DA 及斜线 DB, DC,且 $DA=a$, $\angle BDC=120^\circ$, $\angle ADB=\angle ADC=45^\circ$,那么点 D 到 BC 的距离为多少?

解 如图 7－10,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中,由 $\angle ADB=\angle ADC=45^\circ$ 得

$$BD=CD=\sqrt{2}a.$$

在等腰 $\triangle BCD$ 中,取 BC 的中点 E,连结 DE,则

$$DE\perp BC,$$

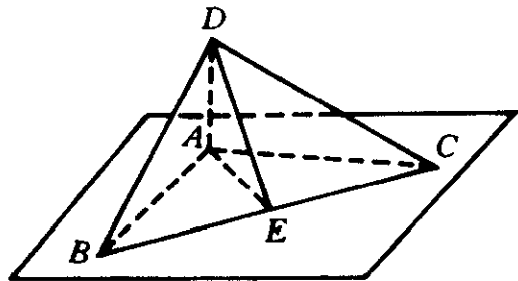


图 7－10

且 DE 平分 $\angle BDC$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BDE$ 中, $\angle BDE=\frac{1}{2}\angle BDC=60^\circ$,有

$$DE=\frac{1}{2}BD=\frac{\sqrt{2}}{2}a.\square$$

评析　由$\angle BDC>\angle ADB+\angle ADC$知与三面角的性质矛盾，这样的空间图形不存在.

3.条件与结论的相容性

就是说，同一题目中条件与结论不能互相矛盾.例6－85(P.438)，例6－86，例6－87，例6－88，例6－89中条件与选项设计就不相容.

值得指出的是，这种矛盾的原因常常在于条件之间互相矛盾.

例7－44　设θ和φ都是锐角，且

$$\frac{2}{\cos\varphi}=\frac{1}{\cos(\varphi+\theta)}+\frac{1}{\cos(\varphi-\theta)},$$

求证　$\cos\varphi=\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}$.

证明　由已知得

$$\frac{2}{\cos\varphi}=\frac{\cos(\varphi-\theta)+\cos(\varphi+\theta)}{\cos(\varphi+\theta)\cos(\varphi-\theta)}$$

$$=\frac{4\cos\varphi\cos\theta}{\cos2\varphi+\cos2\theta}$$

$$=\frac{2\cos\varphi\cos\theta}{\cos^2\varphi+\cos^2\theta-1}.$$

有

$$\cos^2\varphi=\frac{1-\cos^2\theta}{1-\cos\theta}=1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

但θ,φ均为锐角，故开方可得

$$\cos\varphi=\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}.\square$$

评析　由$0<\theta<\frac{\pi}{2}$知，$0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{4}$，有

$$\cos\frac{\theta}{2}>\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

得

$$\cos\varphi=\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}>\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1.$$

这说明条件与结论是矛盾的(根源在于条件矛盾).

例7－45　设x_1,x_2是方程$x^2-x\sin\frac{\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}=0$的两个根，

求证 $\arctan x_1+\arctan x_2=\frac{2\pi}{5}$.

解 由韦达定理有

$$x_1+x_2=\sin\frac{\pi}{5}>0,$$

$$x_1x_2=\cos\frac{\pi}{5}>0;$$

可推出 $x_1>0,x_2>0$,

有
$$\begin{aligned}&\tan(\arctan x_1+\arctan x_2)\\&=\frac{x_1+x_2}{1-x_1x_2}\\&=\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{1-\cos\frac{\pi}{5}}\\&=\cot\frac{\pi}{10}\\&=\tan\frac{2\pi}{5}.\end{aligned}$$

但 $x_1>0,x_2>0$ 时

$$0<\arctan x_1+\arctan x_2<\pi,$$

故得
$$\arctan x_1+\arctan x_2=\frac{2\pi}{5}.\ \square$$

评析 已知方程的判别式

$$\begin{aligned}\Delta&=\sin^2\frac{\pi}{5}-4\cos\frac{\pi}{5}\\&<\sin\frac{\pi}{5}-4\cos\frac{\pi}{5}\\&<\cos\frac{\pi}{5}-4\cos\frac{\pi}{5}\\&<0,\end{aligned}$$

所以,x_1,x_2 为共轭虚数,结论把它们作为实数来求反三角函数值,这两者是矛盾的.

4.条件的独立性

这要求题目的条件间既不重复也不多余,各条件之间没有因果关系.

有时候,为了降低题目的难度,有意识增加一些过剩的条件,这是另一个问题.

独立性的要求反映了数学的严谨性与简单美.

题目有过剩的、不独立的条件,反映了命题时的思考不周;解法中有多余的思维回路,不仅造成题目臃肿,还会使解题者误入歧途.

有时,多余的条件还会破坏条件的相容性.比如例7－42中的$f(1)=1991$就是一个多余的条件,并且由于赋值不当而造成矛盾.

例7－46　一个等腰梯形的下底长18cm,高$4\sqrt{3}$cm,腰长为8cm,腰与下底成60°角,求它的面积.

[原《几何》课本第一册P.214练习题3.人民教育出版社,1989年12月第2版]

讲解　此题中的高$4\sqrt{3}$,腰长8,腰与下底长成60°角,可以去掉一个而不影响求解.易得面积为$64\sqrt{3}\text{cm}^2$.

例7－47　$\triangle ABC$中,$A:B:C=1:2:6$,求证$\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a+b+c}$.

[《数学通报》1960年第3期"问题解答"]

证明　由$A:B:C=1:2:6$,得$A=20°,B=40°,C=120°$.由正弦定理得

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin 20°}{\sin 40°}=\frac{1}{2\cos 20°}.$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{a+b+c}&=\frac{\sin 20°+\sin 40°}{\sin 20°+\sin 40°+\sin 120°}\\&=\frac{2\sin 30°\cos 10°}{\sin 20°+2\sin 80°\cos 40°}\\&=\frac{\cos 10°}{\sin 20°+2\cos 10°\cos 40°}\\&=\frac{1}{2\sin 10°+2\cos 40°}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{4\cos 60^\circ\cos 20^\circ}$$

$$=\frac{1}{2\cos 20^\circ}$$

$$=\frac{a}{b}.\square$$

评析 这个证明用完了所有的条件,看不出有多余的地方.从结论入手找充要条件可以挑出多余的条件来.

$$\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{b}{a+c}$$

$$\Leftrightarrow b^2-a^2=ac$$

$$\Leftrightarrow\sin^2B-\sin^2A=\sin A\sin C$$

$$\Leftrightarrow\sin(B+A)\sin(B-A)=\sin A\sin(B+A)$$

$$\Leftrightarrow\sin(B-A)=\sin A$$

$$\Leftrightarrow B-A=A$$

$$\Leftrightarrow B=2A.$$

可见,$A:B=1:2$ 就足够了,比例式的成立与 C 的具体取值无关. $A:B:C=1:2:6$ 中有多余条件.

例 7-48 已知数列$\{a_n\}$的第一项 $a_1=\frac{3}{5}$,第二项 $a_2=\frac{31}{100}$,并且数列 $a_2-\frac{a_1}{10},a_3-\frac{a_2}{10},\cdots,a_{n+1}-\frac{a_n}{10},\cdots$是公比为$\frac{1}{2}$的等比数列,而数列 $\lg\left(a_2-\frac{a_1}{2}\right),\lg\left(a_3-\frac{a_2}{2}\right),\cdots,\lg\left(a_{n+1}-\frac{a_n}{2}\right),\cdots$是公差为$-1$的等差数列,求数列$\{a_n\}$的通项公式.
[1983 年数学高考副题]

解 因为$\left\{a_{n+1}-\frac{a_n}{10}\right\}$是公比为$\frac{1}{2}$的等比数列,所以通项公式为

$$a_{n+1}-\frac{a_n}{10}=\left(a_2-\frac{a_1}{10}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=\left(\frac{31}{100}-\frac{1}{10}\times\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

由此得 $$a_{n+1}=\frac{a_n}{10}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.\quad (n\geqslant 1) \tag{①}$$

又由 $\left\{\lg\left(a_{n+1}-\frac{a_n}{2}\right)\right\}$ 是公差为 -1 的等差数列，所以通项公式为

$$\lg\left(a_{n+1}-\frac{a_n}{2}\right)=\lg\left(a_2-\frac{a_1}{2}\right)+(n-1)(-1)$$
$$=\lg\left(\frac{31}{100}-\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\right)-(n-1)$$
$$=\lg\frac{1}{100}-n+1$$
$$=-n-1.$$

由此得

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}\quad (n\geqslant 1). \tag{②}$$

联立①、②消去 a_{n+1}，得

$$a_n=\frac{5}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}\right].\square$$

评析 由①或②均可求出 a_n 的通项公式并且相同，因而“等比数列”、“等差数列”中有一个是多余条件. 比如由①有

$$(2^n a_n)-\frac{1}{5}(2^{n-1}a_{n-1})=1,$$

$$\frac{1}{5}(2^{n-1}a_{n-1})-\frac{1}{5^2}(2^{n-2}a_{n-2})=\frac{1}{5},$$

……

$$\frac{1}{5^{n-2}}(2^2a_2)-\frac{1}{5^{n-1}}(2a_1)=\frac{1}{5^{n-2}}.$$

相加
$$2^na_n-\frac{1}{5^{n-1}}(2a_1)=1+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{5^{n-2}}$$
$$=\frac{5}{4}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right),$$

得
$$a_n=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{10^{n+1}}\right).$$

近年来，大兴选择题，有一个情况值得注意，当把一个解答题改编为选择题时，4个选择支所提供的已知信息，会使得题干的一些条件成为多余，如例6－104，例6－110等.

例7－49 在△ABC中，$AB=2\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{2}$，$BC=2$，设P为BC上任一点，则(　　).

A. $PA^2<PB\cdot PC$

B. $PA^2=PB\cdot PC$

C. $PA^2>PB\cdot PC$

D. PA^2与$PB\cdot PC$的大小关系不能确定

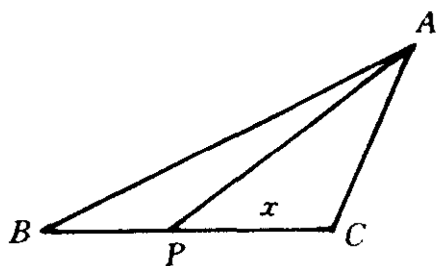


图7－11

[1990年全国初中数学联赛题]

解 设$PC=x$，记$AC=b$，由
$$AC<AB+BC,$$
知
$$b<2\sqrt{2}+2<4\sqrt{2},$$
即
$$b^2-32<0.$$

由余弦定理，有
$$\cos C=\frac{b^2+2^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot 2b}=\frac{b^2-4}{4b}.$$

故
$$PA^2-PB\cdot PC$$
$$=(x^2+b^2-2bx\cos C)-x(2-x)$$
$$=2x^2-\frac{b^2}{2}x+b^2$$

$$=2\left(x-\frac{b^2}{8}\right)^2+\frac{b^2(32-b^2)}{32}$$
$$>0.$$

可见 C 真.由于求解中没有用到“$b=\sqrt{2}$”的条件,故“$AC=\sqrt{2}$”是多余的.□

例 7－50　如图 7－12 中,$AB /\!/ EF /\!/ CD$.已知 $AB=20$,$CD=80$,$BC=100$.那么,EF 的值是(　　).

A. 10　　B. 12　　C. 16　　D. 18

[1991 年全国初中数学联赛题]

解　由 $AB /\!/ EF /\!/ CD$

可得

$$\frac{EF}{AB}=\frac{CF}{BC},$$

$$\frac{EF}{CD}=\frac{BF}{BC},$$

相加　$$\frac{EF}{AB}+\frac{EF}{CD}=\frac{BC}{BC}=1.$$

即　$$\frac{EF}{20}+\frac{EF}{80}=1.$$

解得　$EF=16$.　选 C.

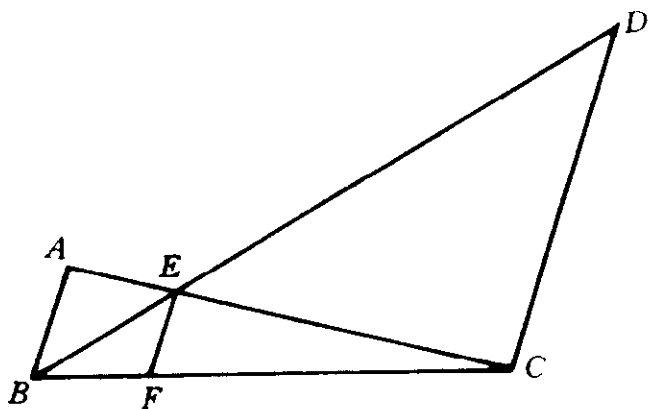


图 7－12

可见“$BC=100$”是多余的.□

例 7－51　在锐角$\triangle ABC$ 中,$AB=c$,$AC=1$,$\angle A=60°$,$\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R\leqslant1$,则(　　).

A. $\frac{1}{2}<c<2$　　　　B. $0<c\leqslant\frac{1}{2}$

C. $c>2$　　　　D. $c=2$

[1991 年全国初中数学联赛]

解　取一个满足条件的等边三角形,则 $c=1$ 是一个可取值,这就否定了 B,C,D.故选 A.□

评析　在这个解法里,条件“$R\leqslant1$”自动包括在 $AC=1$,$\angle A=60°$的要求中,其实它确实是不独立的.在锐角$\triangle ABC$ 中,当$\angle A=$

60°时,30°<∠B<90°.从而

$$\frac{1}{2} < \sin B < 1 \Leftrightarrow R < 2R\sin B < 2R.$$

但 $AC=1$,故有 $R<1<2R$,

得
$$\frac{1}{2}<R<1.$$

7－4－2 教学性要求

从教学的角度考虑科学性,主要有两条:题意的可知性与要求的适度性.

1.题意的可知性

就是说,题目的叙述经过分析是能够弄清楚、搞明白的.其基本要求为:

(1)出现的数学概念是已知的;

(2)出现的数学符号是标准的;

(3)使用的数学术语是规范的;

(4)表达的意思是无歧义的.

例 7－52 求$(-1+i)^{20}$展开式中第15项的数值.
[1982年数学高考理科题]

讲解 二项式 $a+b$ 与复数$a+bi$ 各有确切的定义.$a+bi$ 是一个数,这个数的 n 次幂还是一个复数 $A+Bi$,应不存在第几项的问题.把 $C_{20}^{14}(-1)^6 i^{14}=-38760$ 称为$(-1+i)^{20}$的第15项,实质是一种"潜在的假设"或未规范的名词.

例 7－53 抛物线的方程是 $y^2=2x$,有一个半径为1的圆,圆心在 x 轴上运动.问这个圆运动到什么位置时,圆与抛物线在交点处的切线互相垂直.
[1980年数学高考理科题]

讲解 当年的考生有两种理解,其一是在一个交点上圆的切线与抛物线的切线互相垂直,这与命题的本意相同.其二是两个交点上抛物线的切线互相垂直(当年黑龙江省抽样,有15%的人理解为第

二种情况).若出题时明确指定“一个交点上”就不会有歧义了.

例7－54　设甲数为 x,乙数为 y,用代数式表示:甲数的2倍与乙数的和乘以甲数的2倍与乙数的差.

[原初中《代数》第一册 P.78 练习第4(2)题]

讲解　有两种理解:

(1) $(2x+y)(2x-y)$;

(2) $(2x+y)\cdot 2x-y$.

例7－55　(1) －7加上－2的绝对值等于多少?

(2) 命题“矩形的对角线相等”的逆命题为____.

讲解　均有两种理解:

(1) $|(-7)+(-2)|=9$;　　$-7+|-2|=-5$.

(2) 假命题;对角线相等的四边形为矩形.

例7－56　设 $S=\{1,2,\cdots,n\}$,A 为至少含有两项的公差为正的等差数列,其项都在 S 中,且添加 S 的其他元素于 A 后均不能构成与 A 有相同公差的等差数列,求这种 A 的个数.(这里只有两项的数列也看做等差数列)

[1991年全国高中数学联赛题]

讲解　把只有两项的数列也看做等差数列,与现行课本不一致,因此,必须在题目中作出说明,这体现了题意的可知性.

但“添加 S 的其他元素于 A 后”有两种认识,其一是添加的元素在 A 中无位置约束,因而可以是新数列的首项或末项;其二是添加的元素在 A 中有位置约束,只能为末项.出题的原意是前者,但后者也有道理,这就没有达到“题意可知性”的要求.

例7－57　设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列,S_n 是其前 n 项和

(Ⅰ)证明 $\dfrac{\lg S_n+\lg S_{n+2}}{2}<\lg S_{n+1}$;

(Ⅱ)是否存在常数 c 使得

$$\frac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c) \qquad ①$$

成立.并证明你的结论.

[1995年数学高考理科题]

讲解 本题第(Ⅰ)问已在例1-12,例4-33中研究过,对于第(Ⅱ)问存在两种认识 .

(1)是否存在常数 c,使得对一切 $n\in N_+$,都有等式①成立.

(2)是否存在常数 c,使得对某一 $n\in N_+$,有等式①成立.

原意是第(2)种理解,但确有考生产生第(1)种理解,给出证法如下①:

这样的 $c>0$ 不存在.若存在 $c>0$,使等式成立,不妨取 $n=1$,则等式更应成立.这时必有

$$\begin{cases}(S_1-c)(S_3-c)=(S_2-c)^2,\\ S_1-c>0.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}[(S_2-c)-a_2][(S_2-c)+a_3]=(S_2-c)^2,\\ S_1-c>0.\end{cases}$$

展开并化简,得$\begin{cases}a_1-c=-cq<0,\\ a_1-c>0.\end{cases}$

这一矛盾,说明这样的 $c>0$ 不存在.□

2.要求的适度性

就是说,要与教学的要求相一致,要与学生的水平相协调.

例7-58 求函数 $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ 的最大值或最小值.

解 由

$$y=\frac{1}{x^2-3x+2}$$
$$=\frac{1}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}$$

① 见湖北《中学数学》1995年第9期第3页.

$$\leqslant \frac{1}{-\frac{1}{4}}$$

$$= -4$$

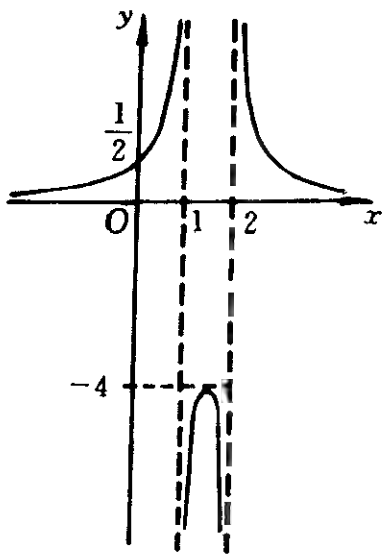


图 7-13

知，当 $x = -\frac{3}{2}$ 时，函数有最大值 -2. □

评析　上述题目是错误的，解法也是错误的. 事实上，函数在其定义域内没有最值，只有极大值(如图 7-13)，学习微积分之前，中学生很难弄清这两个概念的联系与区别. 有的资料甚至让初中生去做，这就更不恰当了.

例 7-59　已知 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$，求证 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = -1$.

证明　由已知得

$$(a+b)^2 = ab, \tag{①}$$

即

$$a^2 + b^2 = -ab.$$

两边除以 ab，得

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = -1. \square$$

评析　表面上看初中生能够完成上述运算，但由①式可得

$$0 = a^2 + b^2 + ab = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2.$$

在实数范围内 $a = b = 0$，与已知条件矛盾. 所以，此题只能在复数范围内考虑，而这超出了初中的范围，要求是不恰当的. 例 7-41 去掉 x, y, z 为实数的条件，对高中生可以求解，对初中生依然是不恰当的.

例 7-60　解方程组

$$\begin{cases} lx = my = nz, \\ ax + by + cz = d. \end{cases}$$

[原高中《数学》第二册 P.42,人民教育出版社,1974 年 4 月第 1 版]

讲解 本题有 7 个字母系数,讨论时要分 4 个层次,情况复杂,对于高中学生过于繁难,后来就被删去了.

7-5 数学习题的编拟

编拟数学习题是教师进行创造性教学活动的基本功,编拟数学题应做到:

1. 目的明确

就是说,应该由题目的使用目的和题目的使用对象来决定题目的形式、综合程度和知识覆盖面.

2. 内容科学

主要指符合上述 6 条科学性标准.

3. 形式优美

如简练的叙述,对称的结构,规则的排列,深刻的寓意、精巧的数据等.

4. 解法合理

就是说,求解活动的展开和连接,线索清楚、舒展自然;能避免推理模式超过中学教学的范围;能避免数据或条件在非实质的技节上作过多的纠缠;能避免知识点的简单重复等.

编拟数学题需要深厚的知识功底,良好的思维素质和熟练的编题技巧.有时候,创造一个问题比解决一个问题更为困难.事实上,会解题的不一定会出题,而会出题的大多都很会解题.

下面介绍几个常用的编题方法:演绎法、倒推法、基本量法、模拟法、改编法、模型法.

7-5-1 演绎法

这是一种从一般真命题或一组条件出发,通过逻辑推理编制数学习题的方法.

例 7－61　有这样一个真命题"二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根 $\Leftrightarrow b^2\geqslant 4ac$."据此，可任取 $x=x_0$，从而编拟出一类条件不等式题.

已知　$ax_0{}^2+bx_0+c=0$，

求证　$b^2\geqslant 4ac$.

61－1　已知　$a+b+c=0$，求证　$b^2\geqslant 4ac$.

61－2　已知　$a=b+c$，求证　$b^2+4ac\geqslant 0$.

61－3　已知　$a+2b+3c=0$，求证　$b^2\geqslant 3ac$.

证明　若 $a=0$ 时显然成立．若 $a\neq 0$，则由已知得

$$\begin{cases}ax^2+2bx+3c=0,\\ x=1.\end{cases}$$

从而　$$\Delta=(2b)^2-4\cdot a\cdot(3c)\geqslant 0,$$

即　$$b^2\geqslant 3ac.\square$$

61－4　已知　$5c=2a+3b$，

求证　$(a+b-2c)(a-3b+2c)\geqslant 0$.

证明　若 $b=c$，则 $a=b=c$，结论显然成立；若 $b\neq c$，则

$$\begin{cases}(b-c)x^2+(a-b)x+(b-c)=0,\\ x=2.\end{cases}$$

从而　$$\begin{aligned}0\leqslant\Delta&=(a-b)^2-4(b-c)^2\\&=(a+b-2c)(a-3b+2c).\square\end{aligned}$$

评析　也可以作方程 $x^2+(a-b)x+(b-c)^2=0$ 有实根 $x=2(b-c)$ 来证明．

61－5　已知　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{4}$，求证　$\cos^2\theta+\sin\theta\geqslant 0$.

证明　显然 $\sin\theta\neq 0$. 由已知有

$$\begin{cases}x^2\sin\theta+x\cos\theta-\dfrac{1}{4}=0,\\ x=1.\end{cases}$$

从而　$$\begin{aligned}\Delta&=\cos^2\theta-4\times\left(-\frac{1}{4}\right)\sin\theta\\&=\cos^2\theta+\sin\theta\end{aligned}$$

$\geqslant 0$. □

例 4－24(P. 185)就是根据同样的思路编拟出来的.

例 7－62　若方根与被开方数只有小数点位置上的不同,那么

$$\sqrt[k]{x}=10^{n}x. \qquad ①$$

据此,可编拟一类避免给出两次数据(对数与反对数)的对数计算题.首先,由①有

$$x=10^{-\frac{nk}{k-1}}, \qquad ②$$

得

$$\lg x=-\frac{nk}{k-1}. \qquad ③$$

62－1　取 $n=1,k=3$,由②有

$$x=10^{-\frac{3}{2}}=0.03162.$$

已知　$\lg 3.162=\frac{1}{2}$,求$\sqrt[3]{0.03162}$.

解　由 $\lg\sqrt[3]{0.03162}=\frac{1}{3}\times\bar{2}.5=\bar{1}.5$,

得　　$\sqrt[3]{0.03162}=0.3162.$

被开方数与方根正好差一位小数点($n=1$).同理可编出

62－2　已知 $\lg 4.642=\frac{2}{3}$,求$\sqrt[4]{0.04642}$.

62－3　已知 $\lg 5.623=\frac{3}{4}$,求$\sqrt[5]{0.05623}$.

62－4　已知 $\lg 6.310=\frac{4}{5}$,求$\sqrt[6]{0.0631}$.

62－5　已知 $\lg 6.813=\frac{5}{6}$,求$\sqrt[7]{0.06813}$.

62－6　已知 $\lg 7.197=\frac{6}{7}$,求$\sqrt[8]{0.07197}$.

62－7　已知 $\lg 7.499=\frac{7}{8}$,求$\sqrt[9]{0.07499}$.

还可以取 $n=2,3,\cdots$等编出更多的题.

7－5－2　倒 推 法

这是一种先给出题目预期结果,由此结果倒推出所需的条件的

一种编制数学习题的方法.

例7－63　根式$\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}+\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}$计算题的编拟. 分为3步:

(1)提前取定根式的实数值为 $x=a$.

(2)用一个无实根的二次三项式去乘 $x-a$,得三次方程

$$(x-a)(x^2+bx+c)=0,\quad (b^2<4c).$$

(3)展开并用卡当法解三次方程,得一个实根

$$x=\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}+\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}.$$

则必有　$$\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}+\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}=a.$$

63－1　预先取根式的值为1,用一个无实根的二次三项式去乘,比如

$$(x-1)(x^2+x+2)=0,$$

展开　$$x^3+x-2=0.$$

代入卡当公式,得实根

$$x=\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}.$$

于是得到一道题:求值(或化简、或计算)

$$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}.$$

并预知结论为1.[1956年北京中学生数学竞赛题]

63－2　预先取根式值为2,作乘积构造方程

$$(x-2)(x^2+2x+7)=0,$$

即　$$x^3+3x-14=0.$$

解出实根　$$x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}.$$

可得一道题:求证

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2.$$

63－3　对 $a>\frac{1}{8}$,作方程

$$(x-1)(x^2+x+2a)=0. \quad ①$$

得题目:求证　对 $a>\frac{1}{8}$,有

$$\sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}=1.$$

证明 1　设左边的第一项为 u,第二项为 v,且 $y=u+v$,则

$$\begin{aligned} y^3&=(u+v)^3\\ &=u^3+v^3+3uv(u+v)\\ &=2a+(1-2a)y, \end{aligned}$$

即
$$(y-1)(y^2+y+2a)=0. \quad ②$$

但 $a>\frac{1}{8}$时,$y^2+y+2a\neq 0$,故 $y=1$.□

这里①与②是一样的,求解的实质循编拟的反方向化归为方程.

证明 2　设 $t=\sqrt{\frac{8a-1}{3}}>0$,则

$$a=\frac{3t^2+1}{8},\ \frac{a+1}{3}=\frac{t^2+3}{8}.$$

$$\begin{aligned} \text{左边}&=\sqrt[3]{\frac{3t^2+1}{8}+\frac{t^2+3}{8}t}+\sqrt[3]{\frac{3t^2+1}{8}-\frac{t^2+3}{8}t}\\ &=\frac{t+1}{2}+\frac{1-t}{2}\\ &=1. \end{aligned}$$
□

这种解法已经看不见编拟的痕迹.

63－4　对 $a>1$,作方程

$$(x-2)(x^2+2x+a)=0,$$

得题目:化简

$$\sqrt[3]{a+\frac{a+8}{3}\sqrt{\frac{a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+8}{3}\sqrt{\frac{a-1}{3}}}.$$

并预知结论为 2.

63－5　对 $|a|>2$,作方程

$$(x-a)(x^2+ax+a^2-3)=0,$$

得题目:化简

$$\sqrt[3]{\frac{a^3-3a+(a^2-1)\sqrt{a^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{a^3-3a-(a^2-1)\sqrt{a^2-4}}{2}}.$$

并预知结果为 a.

例 7－64　根式方程 $\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}=k$ 的编拟,分为4 步:

(1)任写出一个数字 $x=2$ 为方程的根.

(2)写一个包括 2 的数字恒等式.如

$$2+4=6,$$

即

$$\sqrt{4}+\sqrt{16}=6.$$

(3)把 16 写成关于 $x=2$ 的代数式

$$16=cx+d,(\text{如 } 16=5x+6)$$

从而

$$4=ax+b,\quad (4=6-x)$$

(4)得方程

$$\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}=6,$$

如

$$\sqrt{6-x}+\sqrt{5x+6}=6.$$

值得注意的是,由编拟过程知 $x=2$ 必定为方程的根,但不能保证为惟一根.

例 7－65　编制一道 $x=2,y=-1$ 的方程.

(1)编方程组

对 $x=2,y=-1$ 两边分别乘以一些数值并相加,可得方程组

$$\begin{cases}ax+by=2a-b,\\cx+dy=2c-d.\end{cases}$$

当 a,b,c,d 取具体数字时有

$$\begin{cases}2x+y-3=0,\\x+2y=0.\end{cases}\quad ①$$

$$\begin{cases}5x+4y-6=0,\\3y+3=0.\end{cases}\quad ②$$

$$\begin{cases}5y+4x-3=0,\\3x-6=0.\end{cases}\quad ③$$

(2)编不定方程有定解

将①、②、③中有各式平方,然后分别相加,有

$$(2x+y-3)^2+(x+2y)^2=0,$$
$$(5x+4y-6)^2+(3y+3)^2=0,$$
$$(5y+4x-3)^2+(3x-6)^2=0.$$

展开后均为

$$5x^2+8xy+5y^2-12x-6y+9=0.$$

这个方程的解为 $x=2,y=-1$,可仿例 5-2(P.273)用配方法或判别式法来求解.

7-5-3 基本量法

在一个问题系统中,存在着 n 个量,使其余所有量都可以用这 n 个量来表示,而这 n 个量中的任何一个都不能用其他 $n-1$ 个量来表示,我们就称这 n 个量为基本量.

通过给出基本量来编制数学习题的方法叫做基本量法.

例如,三角形系统的基本量为 3 个,要编拟一道解三角形的问题,必须且只须给出 3 个独立的条件.

又如,等差(比)数列的基本量是 3 个,因而从 $a_1,n,a_n,d(q)$, S_n 中任取 3 个为已知,便可编出 C_5^3 类不同的数列题. 为了得出难度更大的综合题,可以从条件或结论上增加层次.

再如,二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的基本量是 3 个,给出 3 个独立的条件便可确定解析式. 可供选择的条件常有点 $(x_1,0)$, $(x_2,0)$, $(0,c)$, $(1,a+b+c)$, $(-1,a-b+c)$,最高(低)点,对称轴方程、极值、图像与 x 轴交点的性质等.

例 7-66 解三角形习题的编拟,分 5 步完成.

(1)考虑解三角形问题系统的元素:a,b,c,A,B,C,h(高),t(角平分线),m(中线),R(外接圆半径),r(内切圆半径),s(半周长),$\triangle$(面积).

(2)确定问题系统的基本量,给出基本量的预期数值. 比如取 a

$=5, b=12, c=13$.

(3)设计条件.由基本量可以计算出其他元素.如 $C=\frac{\pi}{2}$, $A=\arcsin\frac{5}{13}$, $B=\arcsin\frac{12}{13}$, $R=6.5$, $r=2$, $s=15$, $\triangle=30$, $\tan A=\frac{5}{12}$, $\tan B=\frac{12}{5}$ 等.由所有这些量取出独立的 3 个便可以编拟不同层次的题目.

(4)编题

66－1　已知 $\triangle ABC$ 中, $a=5$, $b=12$, $c=13$, 求三角形的 3 个角.

66－2　已知 $\triangle ABC$ 中, $C=\frac{\pi}{2}$, $a=5$, $b=12$, 求 c 边及 $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$, $\cot A$.

66－3　已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90°$, $AB=13$, 面积为 30, 求三角形内切圆半径.

66－4　已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90°$, 外接圆半径为 6.5, 三角形面积为 30, 试求斜边 c 上的高.

66－5　已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90°$, 外接圆半径与内切圆半径的比为 13:4, 试求两个锐角的正切值.

66－6　已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90°$, 面积 $\triangle=30$, 内切圆半径 $r=2$. 求三角形的 3 边长.

(5)检验条件,给出解答.

7－5－4　模拟法

根据已知题目的数量特征、结构特征、图形特征或求解思路,进行模仿编拟.为了得到更有创新性的题目,这种模拟不仅需要"类比",而且还常常作推广.

例 7－67　利用切点的惟一性编拟习题.

(1)有一道已知的题目(见例 4－35):

若 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$,则 $a^2+b^2=1$.

由这道题目的启发(例 4-35 证明 5),我们可以这样编拟:任取二次曲线 $F(x,y)=0$ 上的两点

$$A(a,f(a)),\quad F(a,f(a))=0;$$
$$B(g(b),b),\quad F(g(b),b)=0.$$

过 B 作曲线的切线,再把 A 的坐标代入,便可得关于 a,b 的一个等式

$$G(a,b)=0. \qquad ①$$

而这个等式表明,曲线上有两点在同一切线上,但二次曲线与切线的交点是惟一的,故 A,B 重合,即

$$\begin{cases}a=g(b),\\ f(a)=b;\end{cases}$$

得
$$F(a,b)=F(a,f(a))=0. \qquad ②$$

即由①可推出②,由此得题目:

$$\text{若 } G(a,b)=0,\text{ 则 } F(a,b)=0. \qquad ③$$

(2)取二次曲线为单位圆,$A(a,\sqrt{1-a^2})$,$B(\sqrt{1-b^2},-b)$,有

67-1 若 $a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2}=1$,则 $a^2+b^2=1$.

(3)在单位圆上取 $A(-a,\sqrt{1-a^2})$,$B(\sqrt{1-b^2},-b)$,有

67-2 若 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=-1$,则 $a^2+b^2=1$.

(4)取 $A(a,\sqrt{R^2-a^2})$,$B(\sqrt{R^2-b^2},b)$,有

67-3 若 $a\sqrt{R^2-b^2}+b\sqrt{R^2-a^2}=R^2$,则 $a^2+b^2=R^2$.

(5)取等轴双曲线 $x^2-y^2=1$ 上两点 $A(a,\sqrt{a^2-1})$,$B(\sqrt{1+b^2},b)$,有

67-4 若 $a\sqrt{1+b^2}-b\sqrt{a^2-1}=1$,则 $a^2-b^2=1$.

(6)取椭圆 $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ 上两点 $A\left(a,\frac{n}{m}\sqrt{m^2-a^2}\right)$,

$B\left(\frac{m}{n}\sqrt{n^2-b^2},b\right)$，有

67－5　若 $a\sqrt{n^2-b^2}+b\sqrt{m^2-a^2}=mn\ (m>0,n>0)$，则$\frac{a^2}{m^2}+\frac{b^2}{n^2}=1$.

例 7－68　一道国际竞赛题的由来.

(1)1985 年全国“五四”青年智力竞赛由首都师范大学周春荔老师提供了一道饶有趣味的题目：

68－1　原题　地面上有 A,B,C 三点. 一只青蛙位于地面上距 C 为 0.27 米的 P 点处，青蛙第一步从 P 跳到关于 A 点的对称点 P_1，第二步从 P_1 跳到关于 B 点的对称点 P_2，第三步从 P_2 跳到关于 C 点的对称点 P_3，第四步从 P_3 跳到关于 A 点的对称点 P_4，…. 按这种方式一直跳下去，若青蛙在第 1985 步跳到了 P_{1985}，问 P 与 P_{1985} 相距多少厘米？（答案为 54 厘米，题中嵌入了 1985 年 5 月 4 日的数字）

(2)这个问题引起中国科学技术大学常庚哲教授和齐东旭教授的兴趣. 1986 年 3 月，在浙江大学“计算几何”学习讨论会上，他们“设想青蛙有更高一点的智商，会拐弯”，设计出一道类似题，成为 1986 年全国“五四”青年智力竞赛题：

68－2　模拟题　在同一平面上，有点 A 和点 P，一个人从点 P 开始，向点 A 直线前进，到达 A 点后，向左转 90°，继续直线前进. 走同样长的一段距离到达一点 P_2. 这样，我们说这个人完成了一次关于 A 点的“左转弯运动”.

设 A,B,C,D 是平面上的正方形的 4 个顶点，另一点 P 距离点 D 为 10 千米，一个人从点 P 出发，先关于点 A 作左转弯运动，到达 P_1 点，接着再对 B 作一次左转弯运动，到达 P_2，然后关于 C,D,A,B…连续地作左转弯运动，作过 11111 次左转弯运动后，到达点 Q，问 Q 距出发点多少千米？

(3)事实上，“左转弯运动”不一定要转 90°，在深入研究周期点

列性质的基础上,向 IMO_{27} 提交了一道 60°拐弯的题目:

68－3 **备选题** 平面上给出 3 点 A,B,C,一个人从同一平面上的一点 P 出发,直线行进到 A,向左转 60°之后继续直线前进走过一相同距离之后,到达一点 P_1,我们称他关于 A 点作了一次左转弯 60°的运动,接着,从 P_1 出发对 B 作左转 60°的运动到达 P_2,再从 P_2 出发对 C 作左转 60°的运动到达 P_3.然后依次对 $A,B,C,A,B\cdots$ 作左转 60°的运动,经过 1986 步之后,此人发现已回到了原出发点 P.

求证 $\triangle ABC$ 必为等边三角形,而且 $A\to B\to C$ 是逆时针方向绕行的.

(4)经过东道主的修改,成为 IMO_{27} 的第二题:

68－4 **竞赛题** 平面上给定 $\triangle A_1A_2A_3$ 及点 P_0,定义 $A_s=A_{s-3}$,$s\geqslant 4$.点列 $P_0,P_1,P_2,\cdots$,使得 P_{k+1} 为绕中心 A_{k+1} 顺时针旋转 120°时 P_k 所达到的位置,$k=0,1,2,\cdots$.若 $P_{1986}=P_0$,证明 $\triangle A_1A_2A_3$ 为等边三角形.

与原题相比,国际竞赛保留了“周期点列”的本质,但认识已大大深化,并且改变了设问的方向,使问题更深刻也更有趣.

例 7－69 一道高中数学联赛题的由来.

很多年前,有一道平面几何题①:

69－1 在等腰三角形 ABC 中,作内切半圆,直径在底边 AC 上.向半圆引一切线,与边 AB 交于 M 点,与 BC 交于 N 点.求证 AM 和 CN 的乘积是一常量(例 4－30).

这题证明的本质步骤是(如图 7－14):

$$\triangle AOM\backsim\triangle CNO\Rightarrow AM\cdot NC=\left(\frac{AC}{2}\right)^2.$$

抓住这个本质步骤,笔者将其再增加一个层次,编拟了 1995 年高中数学联赛第二试第三题.

① (原苏联)沙赫诺.数学试题汇集,P.43 第 440 题,新知识出版社,1957 年 8 月第 10 次印刷.

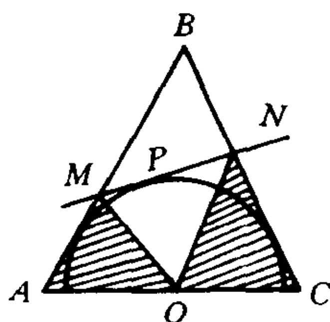


图 7 - 14

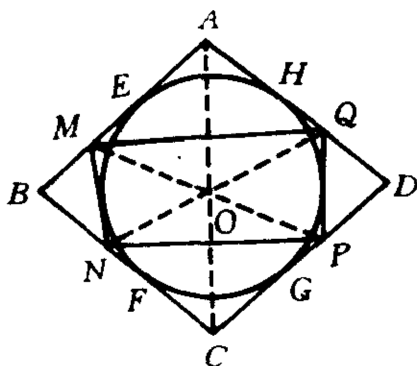


图 7 - 15

69－2　竞赛题　如图 7 - 15，菱形 $ABCD$ 的内切圆 O 与各边分别切于 E,F,G,H，在 $\overset{\frown}{EF}$ 与 $\overset{\frown}{GH}$ 上分别作⊙O 的切线交 AB 于 M，交 BC 于 N，交 CD 与 P，交 DA 于 Q. 求证　$MQ\parallel NP$.

证明　下面给出一个射影几何证法①. 如图 7 - 15，因六边形 $AMNCPQ$ 外切于圆，故由布利安桑定理知，AC,MP,NQ 共点 O，则 O 又是△AMQ 与△CPN 三对对应顶点连线的交点. 故由笛沙格定理又得三双对边 $AM,CP;AQ,CN;MQ,PN$ 的交点共线. 但 $AM\parallel CP,AQ\parallel CN$，所以 $MQ\parallel NP$. □

可把题中的圆推广为椭圆、双曲线.

7－5－5　改编法

就是直接将概念、定理、成题改编为题目，常用的方法有：仿造、推演、转化、逆转、改变信息形态、改变条件或结论等.

例 7－70　对二次方程

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0),\qquad ①$$

作配方　$$4a^2x^2+4abx+4ac=0,$$

① 李长明. 例谈高等几何对初等几何的指导作用. 数学教学，1996，4，P.21.

有 $$(2ax+b)^2-(b^2-4ac)=0,$$
得 $$b^2-4ac=(2ax+b)^2. \qquad ②$$

这表明,二次方程判别式就是完全平方式$(2ax+b)^2$,它是配方法的结果(§5－2－1,§5－2－2).但是,人们常常离开方程而把判别式看成是一个孤立的式子,因而对判别式 b^2-4ac 的实质与功能都缺乏认识.为了引起注意,我们把上述从①到②的推导编成选择题,这就是1992年全国初中数学联赛第一(2)题,后来又为各种考试所采用:

70－1 若 x_0 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的根,则判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 与平方式$M=(2ax_0+b)^2$ 的关系是(　　).

A. $\Delta>M$　　　　B. $\Delta=M$

C. $\Delta<M$　　　　D. 不能确定

注意到上述从①到②的推导在复数范围内也是成立的,因而可以继续对高中编出同样的题目:

70－2 若 x_0 是实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的一个虚根,则判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 与平方式$M=(2ax_0+b)^2$ 的关系是(　　).

A. $\Delta>M$　　　　B. $\Delta=M$

C. $\Delta<M$　　　　D. 不能比较大小

70－3 若 x_0 是复系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的一个虚根,记 $\Delta=b^2-4ac$, $M=(2ax_0+b)^2$,则 $\Delta-M$ 的值与0关系为(　　).

A. 大于0　　　　B. 等于0

C. 小于0　　　　D. 不能确定

例7－71 已经见过一道题目:已知 $ab=1$, $a\neq b$,求证

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}=1.$$

对其增加一个层次,隐去 $ab=1$,有

71－1 已知 $a\neq b$,是方程 $x^2-4x+1=0$ 的两个根,不解方程

求$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}$的值(例4－9).

再隐去方程的外形,改用同形等式,有

71－2　已知$a\neq b$,且

$$a^2+ka+1=0,$$
$$b^2+kb+1=0.$$

求值$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$.

对这个题目用配对解法.设

$$x=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b},\ y=\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}.$$

则

$$x+y=2,$$

$$\begin{aligned}x-y&=\frac{1-a}{1+a}+\frac{1-b}{1+b}\\&=\frac{1-a}{1+a}+\frac{ab-b}{ab+b}\qquad(\because ab=1)\\&=\frac{1-a}{1+a}+\frac{a-1}{a+1}\\&=0.\end{aligned}$$

这就得到两个代数式x,y的值是相等的.据此,笔者将其编成1995年全国初中数学联赛第一(1)题:

71－3　实数a,b满足$ab=1$,记$M=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$,$N=\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$,则$M,N$的关系为(　　).

A. $M>N$　　　　B. $M=N$

C. $M<N$　　　　D. 不确定

上述$M=N$的关系实质上与a,b是否为实数无关,因而可以改编为复数题:

71－4　对复数$z\neq\pm1$,$|z|=1$,记

$$z_1=\frac{1}{1+z}+\frac{1}{1+\bar{z}},$$

$$z_2=\frac{z}{1+z}+\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}}.$$

则 z_1 与 z_2 的关系为(　　).

A. 不能比较大小　　B. $z_1>z_2$

C. $z_1=z_2$　　D. $z_1<z_2$

回到实数范围内,作字母个数推广,有

71－5　已知 $abc=1,ab+a+1\neq0$,记

$$M=\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1},$$

$$N=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}.$$

$$P=\frac{ab}{ab+a+1}+\frac{bc}{bc+b+1}+\frac{ca}{ca+c+1},$$

试比较 M,N,P 的大小.

这也是例 2－5 的逆向问题(习题四第 14 题).

71－6　$M=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+a+1}$,求证 $M\leqslant1$.

71－7　a,b,c 为正数,$abc=1$,则

$$\frac{ab}{a^{3n+2}+b^{3n+2}+ab}+\frac{bc}{b^{3n+2}+c^{3n+2}+bc}+\frac{ca}{c^{3n+2}+a^{3n+2}+ca}\leqslant1.$$

71－8　已知 $abcd=1$,且 $abc+ab+a+1\neq0$,求值

$$\frac{a}{abc+ab+a+1}+\frac{b}{bcd+bc+b+1}+\frac{c}{cda+cd+c+1}+\frac{d}{dab+da+d+1}.$$

71－9　已知 $a_1a_2\cdots a_n=1$,且 $a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}+a_1a_2a_3\cdots a_{n-2}+a_1a_2a_3\cdots a_{n-3}+\cdots+a_1a_2+a_1+1\neq0$,求证

$$\frac{a_1}{a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}+a_1a_2a_3\cdots a_{n-2}+\cdots+a_1a_2+a_1+1}+$$

$$\frac{a_2}{a_2a_3a_4\cdots a_n+a_2a_3a_4\cdots a_{n-1}+\cdots+a_2a_3+a_2+1}+\cdots+$$

$$\frac{a_i}{a_ia_{i+1}\cdots a_na_1\cdots a_{i-2}+a_ia_{i+1}\cdots a_na_1\cdots a_{i-3}+\cdots+a_ia_{i+1}+a_i+1}+\cdots+$$

$$\frac{a_n}{a_na_1a_2\cdots a_{n-2}+a_na_1a_2\cdots a_{n-3}+\cdots+a_na_1+a_n+1}=1.$$

取消条件 $a_1a_2\cdots a_n=1$，代数式的值还会等于1吗？会恒小于1吗？

例7－72　初中《代数》课本有一道分母有理化的题目：

$$\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}.$$

将 a,b 取成它的相反数（增加一个隐含条件）；然后对分母平方之后再开平方（增加一个算术根的层次），有

$$\frac{(-a)-(-b)}{\sqrt{-a}+\sqrt{-b}}=\frac{b-a}{\sqrt{(\sqrt{-a}+\sqrt{-b})^2}}=\frac{b-a}{\sqrt{2\sqrt{ab}-a-b}}.$$

由此可以得到一道隐含 $a<0,b<0$ 的题目

72－1　若 $\dfrac{b-a}{\sqrt{2\sqrt{ab}-a-b}}$ 有意义，则可化简为（　　）.

A. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$　　　　B. $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}$

C. $\sqrt{-b}-\sqrt{-a}$　　　　D. $\sqrt{-a}-\sqrt{-b}$

由于 $\sqrt{2\sqrt{ab}-a-b}=\sqrt{-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=0$ 与分母不为零矛盾，故只有

$$\sqrt{2\sqrt{ab}-a-b}=\sqrt{(\sqrt{-a}+\sqrt{-b})^2}=\sqrt{-a}+\sqrt{-b}.$$

对于高中，可以将 a,b 表示为三角函数.有

72－2　已知三角式 $\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sqrt{\sqrt{2\sin2\theta}-\sin\theta-\cos\theta}}$ 有意义，则可化简为（　　）.

A. $\sqrt{-\cos\theta}-\sqrt{-\sin\theta}$　　B. $\sqrt{-\sin\theta}-\sqrt{-\cos\theta}$

C. $\sqrt{\cos\theta}-\sqrt{\sin\theta}$　　D. $\sqrt{\sin\theta}+\sqrt{\cos\theta}$

将相除的形式改写成斜率,有

72-3　把直线 l 沿 y 轴平移 $\sin\theta-\cos\theta\neq 0$ 个单位,再沿 x 轴平移 $\sqrt{\sqrt{2}\sin\theta-\sin\theta-\cos\theta}>0$ 个单位,所得到的直线与原直线重合,则原直线的斜率为(　　).

A. 不存在　　B. $\sqrt{-\cos\theta}-\sqrt{-\sin\theta}$

C. $\sqrt{-\sin\theta}-\sqrt{-\cos\theta}$　　D. $\sqrt{\cos\theta}+\sqrt{\sin\theta}$

例 7-73　取一个等差数列

$$a_n-a_{n-1}=1,\ (n=1,2,\cdots)$$

有
$$a_n=a_0+n.$$

作变换 $a_n=\dfrac{1}{f_n^{\ 2}}$,并记 $f_0=x$,有

$$\frac{1}{f_n^{\ 2}}=\frac{1}{x^2}+n,$$

取
$$f_n=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

当 $n=1$ 时,取

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

并记
$$f_2(x)=f[f(x)].$$
$$\cdots\cdots$$
$$f_n(x)=f[f_{n-1}(x)].$$

便可得到这样的题目.

已知 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $\underbrace{f(f\cdots f}_{n个f}(x)\cdots)$.

并预知其答案为 $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx}}$.

例 7-74　熟知不等式

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}<\frac{n}{n+1}.$$

将其增加一个层次

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1\cdot2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}.$$

可得

74－1 求证 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$.

再增加一个层次，又可得(参见例 6－78)

74－2 对任意的正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，求证

$$\frac{1}{a_1^{\ 2}}+\frac{1}{a_2^{\ 2}}+\cdots+\frac{1}{a_n^{\ 2}}<2-\frac{1}{n}.$$

7－5－6 模 型 法

就是将实际问题经过分析、综合、概括、抽象之后，进行数学化处理编成数学习题.常用的模型可考虑：自然模型，社会模型，经济模型，物理模型，生活模型，几何模型等.

例 7－75 在自由竞争的市场经济中，商品的价格(记为 y)是由消费者根据商品的数量(记为 x)决定的，两者的函数关系可用一条曲线来表示，这条曲线称为需求曲线，记为 $y=f(x)$.由于商品的数量越多，则成交的价格就越低，因而它是一条下降的曲线，如图 7－16.

另一方面，市场上商品的数量 x 又是由生产者根据商品的价格 y 决定的，它们的函数关系也可以用一条曲线表示，这条曲线称为供应曲线，记为 $y=g(x)$.由于商品价格越高，利润越大，生产商品的数量就越多，因此，供应曲线是一条上升曲线，如图 7－17.

供应曲线与需求曲线的交点 M(如图 7－18)，称为供需平衡点.在 M 点商品的供应价格等于需求价格，供应数量等于社会的需求数量，这时，市场经济处于平衡状态.但在实际情况中，商品的价格和数量是由市场调节的，它们受到各种因素的影响，必然会偏离平衡

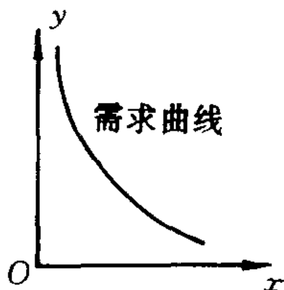


图7-16

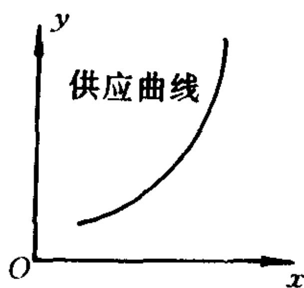


图7-17

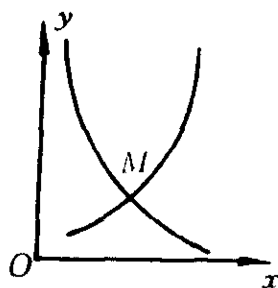


图7-18

点，当市场出现供需不平衡时，就需要通过调节商品价格或商品数量的手段使之趋于平衡.

在社会主义市场经济的条件下，实施政府补贴是保障国计民生的一个调控手段.根据这一经济模型，1995年数学高考设计了一道应用题：

某地为促进淡水鱼养殖业的发展，将价格控制在适当范围内，决定对淡水鱼养殖业提供政府补贴.设淡水鱼的市场价格为 x 元/千克，政府补贴为 t 元/千克.根据市场调查，当 $8 \leqslant x \leqslant 14$ 时，淡水鱼的市场日供应量 P 千克与市场日需求量 Q 千克近似地满足关系

$$P = 1000(x + t - 8) \quad (x \geqslant 8,\ t \geqslant 0),$$

$$Q = 500\sqrt{40 - (x-8)^2} \quad (8 \leqslant x \leqslant 14).$$

当 $P = Q$ 时的市场价格称为市场平衡价格.

(1)将市场平衡价格表示为政府补贴函数，并求出函数的定义域.

(2)为使市场平衡价格不高于每千克10元，政府补贴至少为每千克多少元?

例7－76 据王观杰教授回忆，他从电视里看到打台球节目，台球经过球桌边缘的几次反射后击中预定目标，由此获得灵感，将生活游戏模型编拟为1981年全国高中数学联赛试题：

一张台球桌形状是正六边形 $ABCDEF$. 一个球从 AB 的中点 P 击出，击中 BC 边上的某点 Q，并且依次碰击 CD,DE,EF,FA 各边，最后击中 AB 边上某一点. 设 $\angle BPQ=\theta$，求 θ 的取值范围.

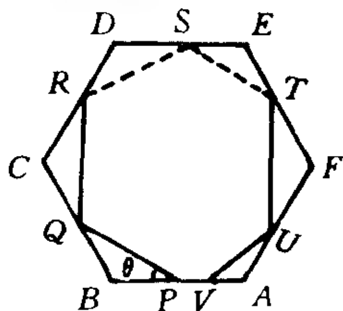


图 7-19

习　题　七

检验第 1～27 题中的解答，若有错误请分析其性质.

1. 有 5 个人从左到右排成一排，其中甲站在首位或乙站在末位的排法有多少种？

解　甲站在首位乙不站在末位的排法有 $C_1^3P_3^3$ 种，乙站在末位而甲不在首位的排法有 $C_1^3P_3^3$ 种，故本题的答案为 $C_1^3P_3^3+C_1^3P_3^3=36$ 种.

2. $\triangle ABC$ 中，D 为 BC 的中点，求证 $AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$.

证明　如图 7-20，在 $\triangle ABC$ 内，以 D 为顶点分别作 $\angle BDE=\angle B$ 交 AB 于 E，作 $\angle CDF=\angle C$ 交 AC 于 F，则 $EB=ED$，$FC=FD$，在 $\triangle AED$ 中，

有　$$AB=AE+ED>AD.$$

同理　$$AC=AF+FD>AD.$$

相加即得所求.

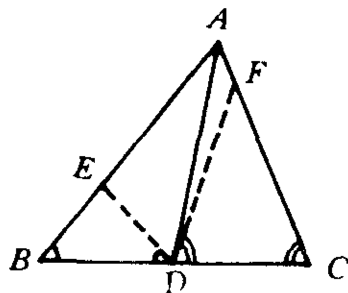


图 7-20

3. 已知 $a>0$，$b>0$，$c>0$，求证

$$\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a+b+c}\geqslant abc.$$

证明　由 $a>0$，$b>0$，$c>0$，有

$$b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\geqslant 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4},$$
$$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc},$$

两式相除,得

$$\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a+b+c}\geqslant abc.$$

4. 已知在△ABC 中,$\cot B=1$,$\cos C=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$b=10$. 求其他两边及三角形的面积.

解 由 $\cot B=1$,$0°<B<180°$,得$\angle B=45°$.

又由 $\cos C=\frac{\sqrt{5}}{5}>0$,知 $0°<\angle C<90°$,故有

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{2}{5}\sqrt{5}.$$

应用正弦定理,得

$$c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{10\cdot\frac{2}{5}\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4\sqrt{10}.$$

代入余弦定理

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B,$$

得
$$100=a^2+160-2a\cdot 4\sqrt{10}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},$$

即
$$a^2-8\sqrt{5}a+60=0,$$

解得
$$a_1=6\sqrt{5},\ a_2=2\sqrt{5}.$$

相应的面积为

$$S_1=\frac{1}{2}a_1c\sin B=60,$$

$$S_2=\frac{1}{2}a_2c\sin B=20.$$

5. 如图 7-21,已知 D 是△ABC 的边 AC 上的一点,$AD:DC=2:1$,$\angle C=45°$,$\angle ADB=60°$,求证 AB 是△BCD 的外接圆的切线.

证明　因为$\angle ACB=45°$，所以$\overset{\frown}{BD}=90°$，又$\angle ADB=60°$，所以$\angle BDC=120°$，$\overset{\frown}{BEC}=240°$。得

$$\angle A=\angle BDC-\angle DBA$$
$$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BEC}-\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}=75°$$

从而　$\angle ABD=180°-75°-60°$
$$=45°=\angle C.$$

因此，$\angle ABD$是弦切角，即AB为$\angle BCD$外接圆的切线.

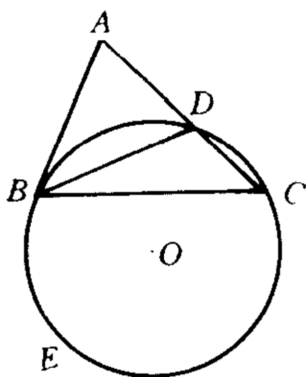


图 7-21

6. 设a为实数，试解关于x的四次不等式

$$x^4-2ax^2+a^2+2a-3>0.$$

解法 1　以a为主元，得到关于a的二次不等式

$$a^2+2(1-x^2)a+(x^4-3)>0.$$

恒成立．故判别式小于零

$$\Delta=[2(1-x^2)]^2-4(x^4-3)=8(2-x^2)<0.$$

解得　　$x<-\sqrt{2}$或$x>\sqrt{2}$.

解法 2　原式即

$$(x^2-a)^2>3-2a.$$

(1)当$3-2a<0$，即$a>\frac{3}{2}$时，x可取一切实数.

(2)当$3-2a=0$即$a=\frac{3}{2}$时，$x^2\neq\frac{3}{2}$，即x可取$\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$之外的一切实数.

(3)当$3-2a>0$即$a<\frac{3}{2}$时，有

$$x^2>a+\sqrt{3-2a}, \tag{①}$$

或　　$$x^2<a-\sqrt{3-2a}. \tag{②}$$

对①有

1)当 $a=-3$ 时,x 为非零实数;

2)当 $a<-3$ 时,x 为全体实数;

3)当 $-3<a<\frac{3}{2}$ 时,

$$x>\sqrt{a+\sqrt{3-2a}} \text{或} x<-\sqrt{a+\sqrt{3-2a}}.$$

对②有

1)当 $a\leqslant 1$ 时,无解;

2)当 $1<a<\frac{3}{2}$ 时,

$$-\sqrt{a-\sqrt{3-2a}}<x<\sqrt{a-\sqrt{3-2a}}.$$

7.求实数 m,使方程

$$x^2+(m+2i)x+(2+mi)=0$$

至少有一实根.

解 由判别式非负,有

$$\Delta=(m+2i)^2-4(2+mi)=m^2-12\geqslant 0,$$

可解得 $m\geqslant 2\sqrt{3}$ 或 $m\leqslant -2\sqrt{3}$.

8.若方程 $x^2+(m-2)x+(5-m)=0$ 的两实根都比 2 大,求实数 m 的范围.

解 m 的取值由

$$\begin{cases}x_1+x_2>4,\\ x_1x_2>4,\\ \Delta\geqslant 0\end{cases}$$

确定.即

$$\begin{cases}2-m>4,\\ 5-m>4,\\ (m-2)^2-4(5-m)=m^2-16\geqslant 0.\end{cases}$$

解得 $m\leqslant -4$.

9.求函数 $y=\operatorname{arccot}\sqrt{2x-x^2}$ 的值域.

解 因为 $\sqrt{2x-x^2}\geqslant 0$,

所以 $$0<\operatorname{arccot}\sqrt{2x-x^2}<\frac{\pi}{2}.$$

即值域为$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

10. 解方程$\left|\frac{1-x}{1+x}\right|=\frac{1-x}{1+x}$.

解　由$|x|=a\Leftrightarrow x=a$ 或 $x=-a$,知原方程为

$$\frac{1-x}{1+x}=\frac{1-x}{1+x}\Rightarrow x\neq-1,$$

或 $$\frac{1-x}{1+x}=-\frac{1-x}{1+x}\Rightarrow x=1.$$

合并得 $x\neq-1$.

11. 某仓库存有电线杆60根,要把它们埋在线路上,第一根离仓库300米,以后每隔100米埋1根,现在仓库有一辆汽车每次可装运电线杆7根,用这辆汽车将全部电线杆运送到目的地,然后返回仓库,问最少要行驶多少千米路程?

解　为了使行驶的路程最少,汽车必须满载,8趟满载后,第9趟运剩下的4根,前8趟往返路程构成以2千米为首项,公差为1.4千米的等差数列,由此得

$$\begin{aligned}S&=\frac{2+(2+1.4\times7)}{2}\times8+(2+1.4\times7+0.8)\\&=67.8(\text{千米}).\end{aligned}$$

12. 求$(\sec^4\theta-1)(\csc^4\theta-1)$的最小值.

解

$$\begin{aligned}&(\sec^4\theta-1)(\csc^4\theta-1)\\=&(\sec^2\theta+1)(\sec^2\theta-1)(\csc^2\theta+1)(\csc^2\theta-1)\\=&(\sec^2\theta+1)(\csc^2\theta+1)\\\geqslant&2|\sec\theta|\cdot2|\csc\theta|\\=&\frac{4}{|\sin\theta\cos\theta|}\\=&\frac{8}{|\sin2\theta|}\\\geqslant&8.\end{aligned}$$

当 $\theta=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$时,有最小值8.

13.设 a 是大于1的整数,而所有小于等于$\sqrt{a}$的素数都不能整除a,则 a 是素数.

证明 设 a 是合数$a=bc$,b,c 是大于1的整数,因此 b,c 均可整除a,所以 $b>\sqrt{a}$,$c>\sqrt{a}$,从而 $bc>a$,这与 $bc=a$ 相矛盾,所以 a 是素数.

14.在条件$\frac{x-2}{x+1}<1$下,结论 $x-2<x+1$ 对吗?

解 不对,因为 $x+1$ 可能大于0也可能小于0,当 $x+1<0$,应有 $x-2>x+1$.

15.当 m 是什么数值时,方程 $x^2-(m-1)x-(m-2)=0$ 有两个互为相反数的实根.

解 当一次项系数为零,$-(m-1)=0$,即 $m=1$ 时,方程有两个互为相反数的实根.

16.已知 $\sin x+\cos x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}(0<x<\pi)$,求 $\cos 2x$ 的值.

解 由已知平方,得

$$1+\sin 2x=1-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

即
$$\sin 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

又由
$$0<x<\pi,$$

有
$$0<2x<2\pi,$$

得
$$\cos 2x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}=\pm\frac{1}{2}.$$

17.当 m 为何值时,方程组

$$\begin{cases}mx+y=\sqrt{17},\\17x+my=17\end{cases}$$

无解.

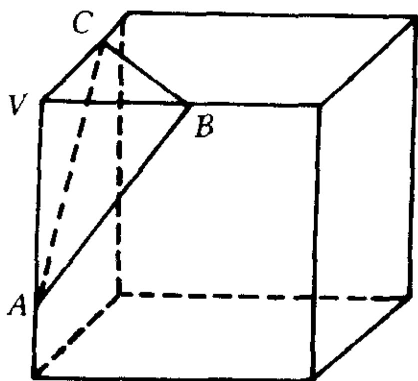
解 方程组无解,其系数行列式为0,

$$D=\begin{vmatrix} m & 1 \\ 17 & m \end{vmatrix}=0,$$

有　　　　$m^2=17,$

得　　　　$m=\pm\sqrt{17}.$

18.将正方体截去一个角,求证截面三角形一定是锐角三角形.(图 7－22(1))



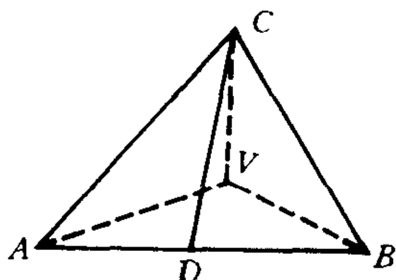


图 7－22

证明　如图 7－22(2),截面为$\triangle ABC$,过 C 作 AB 边上的高 CD,则在 Rt$\triangle ADC$ 与 Rt$\triangle BDC$ 中,$\angle A$ 与$\angle B$ 均为锐角.

同理,可证$\angle A$,$\angle C$ 也是锐角,故$\triangle ABC$ 为锐角三角形.

19.圆锥底面半径 $OA=10$ 厘米,母线 $VA=30$ 厘米.由 A 点绕侧面一周的最短路程是多少?

解　如图 7－23,过 A 点作 $AB\perp A'V$,垂足为 B,可算得 $AB=\dfrac{40\sqrt{2}}{3}$,所求的最短路程就是以 AB 为直径的圆周长,得$\dfrac{40\sqrt{2}}{3}\pi$(厘米).

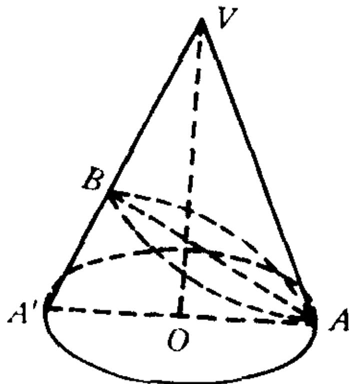


图 7－23

20. 设 $f(x)=\dfrac{x}{ax+b}$，$f(2)=1$，且方程 $f(x)-x=0$ 有惟一解. 求 $f(x)$ 的表达式.

解 由 $f(2)=1$，有

$$2a+b=2. \qquad ①$$

又由 $f(x)-x=0$ 有惟一解知，方程

$$ax^2+(b-1)x=0 \text{ 有惟一解，得 } b=1. \qquad ②$$

由①、②可得 $a=\dfrac{1}{2}$，从而

$$f(x)=\frac{2x}{x+2}.$$

21. 已知 $f(x)=1+2+3+\cdots+n\ (n\in \mathrm{N}_+)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n^2)}{[f(n)]^2}$ 的值.

解 $f(n^2)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，

$$[f(n)]^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

得
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n^2)}{[f(n)]^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}=0.$$

22. 求证 $\log_n(n+1)>\log_{n+1}(n+2)$.

证明 用反证法，若不然，则

$$\log_n(n+1)\leqslant\log_{n+1}(n+2).$$

取 $n=3,4,5,6,7,8$，得

$$\log_3 4<\log_4 5<\log_5 6<\log_6 7<\log_7 8<\log_8 9<\log_9 10,$$

从而
$$\log_9 16=\log_3 4<\log_9 10,$$

有
$$16<9.$$

这一矛盾说明原不等式成立.

23. 计算 $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}$

解 原式 $=\sqrt[6]{(2-\sqrt{5})^2}\cdot\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}$

$$=\sqrt[6]{(2-\sqrt{5})^2(9+4\sqrt{5})}$$
$$=\sqrt[6]{(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}$$
$$=\sqrt[6]{1}$$
$$=1.$$

24. 若 $2^{10}+2^8+2^n$ 为完全平方数，求自然数 n 的值.

解　设 $2^5=x$，则 $2^{10}=x^2$，$2^8=8x$，于是原式为

$$x^2+8x+2^n,$$

由这个二次三项式为完全平方式知判别式为0，

$$8^2-4\times1\times2^n=0,$$

得　$n=4$.

25. 已知 A,B,C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角，且 $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}=1$. 求证 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

证明　由已知可得

$$\begin{cases}\sin A+\sin B+\sin C=1,\\ \sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A=k,\\ \sin A\sin B\sin C=k.\end{cases}$$

于是，以 $\sin A,\sin B,\sin C$ 为根的三次方程为

$$x^3-x^2+kx-k=0.$$

显然 $x=1$ 是这个方程的一个根，故 $\sin A,\sin B,\sin C$ 中必有一个为1，从而，A,B,C 中必有一个是直角. 得证 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

26. 求实数 k 的集合，使方程

$$|x^2-2|=3x+k$$

恰有3个相异的实数解.

解　在直角坐标系上作出两曲线

$$C:\ y=|x^2-2|, \qquad ①$$

$$l:\ y=3x+k \qquad ②$$

的图像，原方程有3个相异实数根时，存在两种情况：

(1)直线与曲线在$|x|\leqslant\sqrt{2}$内相切.如图 7-24 中 l_1.

联立①、②消去 y,得

$x^2+3x+(k-2)=0.$

由判别式为 0,得

$9-4(k-2)=0,$

解出 $k_1=\frac{17}{4}$.

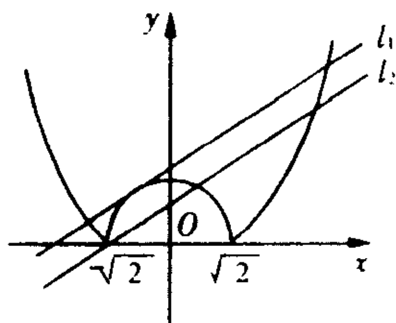


图 7-24

(2)直线过点$(-\sqrt{2},0)$,如图 7-24 中 l_2.

把$(-\sqrt{2},0)$代入②,得

$0=-3\sqrt{2}+k,$

解出 $k_2=3\sqrt{2}$.

综上得,k 的集合为$\left\{\frac{17}{4},3\sqrt{2}\right\}$.

27. 设数列的前 n 项和为 S_n,若对于所有的自然数 n,都有 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$. 证明 $\{a_n\}$是等差数列.(例 6-9)

证明 引进参数列$\{b_n\}$,使

$$a_n=a_1+(n-1)(a_2-a_1)+b_n, \quad ①$$

然后求和,并应用等差数列的求和公式,有

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n(a_1+a_n)}{2}+\sum_{k=1}^{n}b_k, \quad ②$$

再把已知代入,得$\sum\limits_{k=1}^{n}b_k=0,k\in\mathbf{N}_+$. 推出 $b_n=0$,代入①可得$\{a_n\}$是等差数列.

分析第 28~57 题中的习题科学性错误.

28. 已知$\triangle ABC$,AD 是高,且 $AD^2=BD\cdot CD$. 求证$\angle BAC=90°$.

[原初中《几何》课本第二册 P.67 第 17 题]

证明 如图 7-25,由 $AD^2=BD\cdot CD$,

有　　$2AD^2=2BD\cdot CD$,

两边加上 BD^2+CD^2,得

$$(BD^2+AD^2)+(AD^2+CD^2)$$
$$=(BD+DC)^2,$$

即　　$AB^2+AC^2=BC^2$.

得$\triangle ABC$ 为直角三角形,$\angle BAC=90°$.

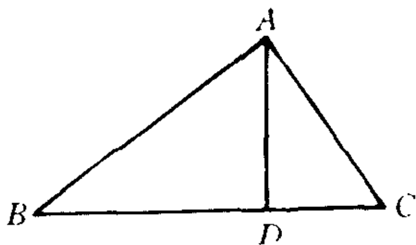


图 7-25

29. 设 α,β,γ 是满足 $\alpha+\beta+\gamma<\pi$ 的正实数,证明用长为 $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ 的线段可以构成一个三角形,且它的面积不大于 $\frac{1}{8}(\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma)$.

[IMO_{28}候选题]

证明　作一个顶点处面角分别为 $2\alpha,2\beta,2\gamma$,侧棱为 $\frac{1}{2}$ 的四面体,这个四面体底面是一个三角形,边长恰为 $\sin\alpha,\sin\beta,\sin\gamma$. 可证得第一个结论成立.

再由底面积小于 3 个侧面积之和可得第二个结论成立.

30. 锐角$\triangle ABC$ 与锐角$\triangle DBC$ 的周长和面积分别相等,BC 为公共边,AB 之长是 AB,AC,DB,DC 中的最大者,且 AB 与 AC, DB, DC 均不相等,则(　　).

A. $\angle A>\angle D$　　　　B. $\angle A<\angle D$

C. $\angle A=\angle D$　　　　D. $\angle A$ 与$\angle D$ 的大小不能确定

解　设 $AB=a$, $AC=b$, $DB=c$, $DC=d$,则由题设得

$$a+b=c+d,\ a>b,\ a>c,\ a>d.$$

有　　$a-d=c-b=t>0.$

　　　$a-c=d-b>0,$

得　　$a=d+t,\ c=b+t,$

从而　　$cd-ab=(b+t)d-(d+t)b=(d-b)t>0,$

所以　　$cd>ab.$

但由面积相等有

$$\frac{1}{2}ab\sin A=\frac{1}{2}cd\sin D,$$

所以 $\sin A>\sin D$.

又因为$\angle A,\angle D$均为锐角,所以$\angle A>\angle D$. 选 A.

31. 若长方体的对角线长为8,其长、宽、高之和为14,则其全面积为______.

解 由

$$a+b+c=14,$$

$$a^2+b^2+c^2=64.$$

得

$$\begin{aligned}S&=2(ab+bc+ca)\\&=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\\&=132.\end{aligned}$$

32. 设α,β,γ为锐角三角形的3个内角,且设

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2,$$

$$m=\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma.$$

试求m的取值范围.

解 由 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$,

推得 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

从而,可作一长方体,其3条共点棱与体对角线的夹角分别为α,β,γ. 若记长方体的长、宽、高为a,b,c. 由

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi,$$

有 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$.

得

$$\begin{aligned}m&=\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma\\&=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}\cdot\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{b}+\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}\\&\geqslant\frac{\sqrt{2ab}}{c}\cdot\frac{\sqrt{2ac}}{b}\cdot\frac{\sqrt{2bc}}{a}\\&=2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

所以,m的取值范围为$[2\sqrt{2},+\infty)$.

33. 已知$\triangle ABC$的周长为18cm,其内切圆的半径为3cm,求$S_{\triangle ABC}$.

解　$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(a+b+c)r=\frac{1}{2}\times18\times3=27(\text{cm}^2)$.

34. 在$\triangle ABC$中,$\angle A=60^\circ$,边AB,AC分别为方程

$$x^2-11x+24=0 \quad ①$$

的两根,且边$BC=6$,求BC边上的高.

解法1　如图7－26,设BC边上的高为AD,由AB,AC分别为方程①的两根,有

$$AB\cdot AC=24,$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin60^\circ=6\sqrt{3}.$$

又　$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=3AD.$$

故得BC上的高$AD=2\sqrt{3}$.

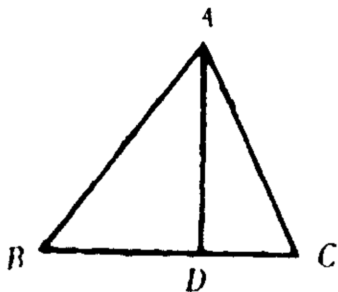


图7－26

解法2　不妨设$AB>AC$,

从而$\angle B<\angle C$.由方程①可解出

$$AB=8,\ AC=3.$$

从而　$$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{91}{96},$$

进而　$$\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\frac{\sqrt{935}}{96},$$

得　$$AD=AB\cdot\sin B=\frac{\sqrt{935}}{12}.$$

35. 椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$的焦点为$F_1,F_2$.$P$为椭圆上一点,已知$\angle F_1PF_2=90^\circ$,求$\triangle F_1PF_2$的面积等于多少?

解　据已知方程可得$a=5$,$b=4$,$c=3$.

又由椭圆的定义及直角三角形可得

$$|PF_1|+|PF_2|=2a=10, \quad ①$$

$$|PF_1|^2+|PF_2|^2=(2c)^2=36. \quad ②$$

①^2－②可得

$$2|PF_1|\cdot|PF_2|=64.$$

从而$\triangle F_1PF_2$的面积为

$$S=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=16.$$

36. 一桶煤油用掉一半,剩下的油连桶重40千克,用掉$\frac{2}{3}$后则连桶重25千克,问这桶油净重多少千克?

解 设这桶油净重x千克,那么

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=40-25,$$

解得 $x=90.$

即这桶油净重90千克.

37. 设a,b,c皆为素数,且$a+b+c=94,ab+bc+ca=1184$,那么乘积$abc=$______.

[1994-1995学年度5城市初中数学联合竞赛试题]

解 因为$a+b+c$是偶数,且a,b,c均为素数,所以a,b,c中必有一数为2,不妨设$a=2$,则

$$b+c=94-2=92,$$

从而 $a(b+c)=2\times92=184.$

又 $ab+bc+ca=a(b+c)+bc=1184,$

有 $bc=1184-a(b+c)=1000,$

所以 $abc=2000.$

38. 已知 $\frac{a}{b+c-a}=\frac{b}{c+a-b}=\frac{c}{a+b-c}=2,$

求证 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{27}{8}.$

证明 由已知得

$$\frac{b+c}{a}-1=\frac{c+a}{b}-1=\frac{a+b}{c}-1=\frac{1}{2},$$

分别有 $\frac{b+c}{a}=\frac{3}{2},$

$$\frac{c+a}{b}=\frac{3}{2},$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{3}{2}.$$

相乘即得.

39. 已知 $\sin\theta=\frac{a}{c}$, $\cos\theta=\frac{b}{c}\left(a>0, b>0, c>0, 且\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$,

又　$a^a=(c+b)^{c-b}=(c-b)^{c+b}$

求证　$(\lg a)^2=\lg(c-b)\cdot\lg(c+b)$.

证明　由已知得

$$a^2=c^2-b^2=(c-b)(c+b). \qquad ①$$

且

$$a\lg a=(c-b)\lg(c+b), \qquad ②$$

$$a\lg a=(c+b)\lg(c-b). \qquad ③$$

②×③ 得

$$a^2(\lg a)^2=(c^2-b^2)\lg(c-b)\cdot\lg(c+b)$$

把①代入,得

$$(\lg a)^2=\lg(c-b)\lg(c+b).$$

40. 已知平行四边形一对邻边为 $a, b(b>a)$,对角线的交角为 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$,求证　四边形的面积为$\frac{b^2-a^2}{2}\tan\theta$.

证明　如图 7－27, 设 $AC=2x$, $BD=2y$,由余弦定理有

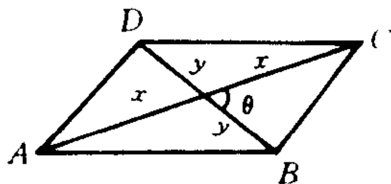


图 7－27

$$a^2=x^2+y^2-2xy\cos\theta,$$

$$b^2=x^2+y^2+2xy\cos\theta.$$

相减　$$b^2-a^2=4xy\cos\theta,$$

有　$$2xy=\frac{b^2-a^2}{2\cos\theta}.$$

代入面积公式

$$S=2xy\sin\theta=\frac{b^2-a^2}{2\cos\theta}\cdot\sin\theta$$

$$=\frac{b^2-a^2}{2}\tan\theta.$$

41. 已知 x, y 为锐角,而且

$$\frac{1}{3}\sin^2 x + 2\sin^2 y = 1,$$

$$\frac{1}{3}\sin 2x - 2\sin 2y = 0.$$

求证 $x + 2y = \frac{\pi}{2}$.

证明 由已知得

$$\frac{1}{3}\sin x \cdot \sin x = \cos 2y, \tag{1}$$

$$\frac{1}{3}\sin x \cdot \cos x = \sin 2y. \tag{2}$$

交叉相乘并移项,得

$$\frac{1}{3}\sin x \cdot \cos(x + 2y) = 0.$$

但$\frac{1}{3}\sin x \neq 0$,故

$$\cos(x + 2y) = 0,$$

又 $$0 < x + 2y < \frac{3\pi}{2},$$

得 $$x + 2y = \frac{\pi}{2}.$$

42. 在实数范围内,方程 $a^2x^2 + b^2x + c^2 = 0$ 的两根分别是 $ax^2 + bx + c = 0$ 两根的平方,求证 b 是 a, c 的比例中项.

解 设第二个方程的两根为 α, β,则第一个方程的两根为 α^2, β^2. 由韦达定理,第二个方程有

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \\ \alpha\beta = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

且对第一个方程有

$$-\frac{b^2}{a^2} = \alpha^2 + \beta^2$$
$$= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\cdot\frac{c}{a}$$

$$= \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

得　　$b^2 = ac$.

43. 已知 $a > 0, b > 0, 4ab = 4a^2 + 9b^2$，求证　$\lg\frac{2a+3b}{4} = \frac{\lg a + \lg b}{2}$

[原苏联高考题]

证明　由已知可得

$$\left(\frac{2a+3b}{4}\right)^2 = ab.$$

两边取对数，有

$$2\lg\frac{2a+3b}{4} = \lg a + \lg b,$$

即

$$\lg\frac{2a+3b}{4} = \frac{\lg a + \lg b}{2}.$$

44. 一个圆经过 $A(4,2)$，$B(-1,3)$两点，在两个坐标轴上的 4 个截距之和是 14，求这个圆的方程.

解　设所求的圆的方程是

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad ①$$

由题设条件，得

$$4D + 2E + F + 20 = 0, \quad ②$$

$$-D + 3E + F + 10 = 0, \quad ③$$

$$-D - E = 14. \quad ④$$

联立方程组可解出

$$D = -4,\ E = -10,\ F = 16.$$

代入①得所求的圆为

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 16 = 0.$$

45. 如图 7－28，正方形 $ABCD$ 中，$\triangle AEF$ 是正方形内接三角形，$\angle EAF = 45°$，$AB = 8$，$EF = 6$，求$\triangle EFC$ 的面积.

[1994 年希望杯初二数学竞赛题]

解 将 Rt△ABE 绕点 A 逆时针旋转 90°，得 Rt△ADG，则

$$\begin{aligned}\angle FAG &= \angle FAD + \angle DAG\\ &= \angle FAD + \angle BAE\\ &= 90^\circ - \angle EAF\\ &= 45^\circ\\ &= \angle EAF.\end{aligned}$$

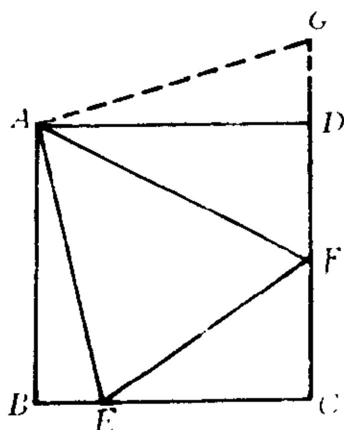


图 7-28

又 $EA = GA,\ AF = AF.$

故得 $\triangle EAF \cong \triangle GAF.$

有 $S_{\triangle EAF} = S_{\triangle GAF}$

$$= \frac{1}{2}\cdot FG\cdot AD = 24,$$

得

$$\begin{aligned}S_{\triangle EFC} &= S_{ABCD} - S_{\triangle EAF} - S_{\triangle BAE} - S_{\triangle DAF}\\ &= S_{ABCD} - 2S_{\triangle EAF}\\ &= 8^2 - 2\times 24\\ &= 16.\end{aligned}$$

46. 设 $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数，且 $f(x) = -g(x+c)$ $(c>0)$，则 $f(x)$ 是最小正周期为______的周期函数.

[1991 年四川省高中数学竞赛题]

解 由

$$\begin{aligned}f(x) &= -g(x+c)\\ &= -g[-c-(-2c-x)]\\ &= g[c+(-2c-x)]\\ &= -f(-2c-x)\\ &= -f(2c+x),\end{aligned}$$

知

$$f(x+4c) = -f(x+2c) = f(x).$$

故 $f(x)$ 的最小正周期为 $4c$.

47. 一水池有 A,B 两个进水龙头和一个出水龙头 C，如果同时打开 A,C，2 小时可注满水池；同时打开 B,C，3 小时可注满水池；

当水池满水时，先单独打开 C，2 小时，再把 A，B 也同时打开，1 小时后水池又可注满，那么单独打开 A，______小时可注满水池.

[1988 年 5 城市初中数学联合竞赛试题]

解　设 A 水管 x 小时可将空池注满，B 水管 y 小时可将空池注满，C 水管 z 小时可将满池水放空，依题意有方程组

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{3}{z}=0. \end{cases}$$

解得 $x=\dfrac{3}{4}, y=\dfrac{6}{7}, z=\dfrac{6}{5}$.

所以，单独打开 A 水管$\dfrac{3}{4}$小时可将水池注满.

48. 甲从 A 地出发到 B 地，乙从 B 地出发到 A 地. 甲先行 2 千米，则又经 2 小时后在 AB 的中点处与乙相遇；若同时出发，则相遇后甲再走 $2\dfrac{1}{2}$小时到达 B 地，乙再走 $1\dfrac{3}{5}$小时到达 A 地. 问甲、乙两人的速度各是多少?

[1984 年江苏省南通市郊县高中、中专统一招生试题]

解法 1　设甲的速度为 x 千米/小时，乙的速度为 y 千米/小时，依题意有

$$\begin{cases} 2x+2=2y, \\ 2\dfrac{1}{2}x+1\dfrac{3}{5}y=4y. \end{cases}$$

解得　　$x=24,\ y=25.$

解法 2　设 x，y 含义同上，有

$$\begin{cases} 2x+2=2y, \\ \dfrac{2\frac{1}{2}x}{y}=\dfrac{1\frac{3}{5}y}{x}. \end{cases}$$

解得　　　$x=4,\ y=5.$

49. 已知$\triangle ABC$中，$A:B:C=2:3:4$，$AB:BC=3:2$，$AC=5$. 求$\triangle ABC$的周长.

[某省 1985 年成人高考文科试题]

解法 1　设A,B,C分别为$2x,3x,4x$，则

$$2x+3x+4x=180°,$$

$$x=20°,$$

所以 $A=40°,\ B=60°,\ C=80°.$

由已知又设$AB=3y$，$BC=2y$. 根据余弦定理，有

$$25=9y^2+4y^2-2\cdot 3y\cdot 2y\cos 60°.$$

解得　　　$y-\dfrac{5\sqrt{7}}{7}.$

所以　　　$AB=\dfrac{15\sqrt{7}}{7},\ BC=\dfrac{10\sqrt{7}}{7}.$

$\triangle ABC$周长$=AB+BC+CA=\dfrac{25\sqrt{7}}{7}+5.$

解法 2　如前法求出$A=40°$，$B=60°$，$C=80°$，再作$\angle C$的平分线CD(如图 7　29)，则有

$$\triangle ABC\backsim\triangle CBD,$$

得　　　$\dfrac{CD}{CA}=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{2}{3},$

有　　$CD=\dfrac{2}{3}CA=\dfrac{10}{3}.$

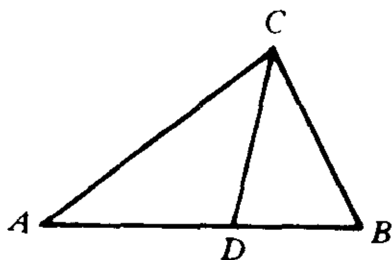


图 7－29

又因为CD是$\angle C$的平分线

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{BC},$$

$$DB=\frac{AD\cdot BC}{AC}$$

$$=\frac{DC\cdot BC}{AC}$$

$$=\frac{4}{9}AB$$

$$=\frac{4}{9}(BD+AD),$$

得 DB $\quad = \frac{4}{5}AD=\frac{4}{5}CD=\frac{8}{3}.$

又 $\quad AB=AD+DB=6,$

$$BC=\frac{2}{3}AB=4.$$

得 $\quad \triangle ABC$ 周长 $=4+6+5=15.$

50. 在$\triangle ABC$中,若 $A:B:C=1:2:6$,求证　$b^2=a(a+c)$.

51. 在圆 O 内,弦 CD 平行于弦 EF,且与直径 AB 交成 $45°$ 角,若 CD 与 EF 分别交直径 AB 于 P 和 Q,且圆 O 的半径为 1,求证:$PC\cdot QE+PD\cdot QF<2$.

[1981 全国高中数学联赛题]

52. 如图 7-30,G 是$\triangle ABC$ 内一点,直线 AG,BG,CG 分$\triangle ABC$ 为 6 个小三角形,其中 4 个小三角形的面积已在图中标出,求$\triangle ABC$ 的面积.[1985 年美国第三届邀请赛试题]

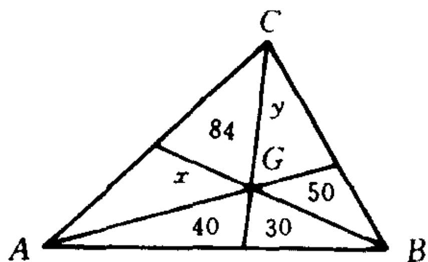


图 7-30

53. 求方程 $10x+51y=0$ 的最小正整数解.

[中师数学课本《代数与初等函数》第二册,人民教育出版社,1982 年 5 月第 1 版]

54. 平面 ABC 外一点 P 到$\triangle ABC$ 三边的距离相等,O 是$\triangle ABC$ 的内心.求证　$OP\perp$平面 ABC.

[六年制重点中学高中《立体几何》$P.52$,人民教育出版社,1981 年 12 月第 1 版]

55. $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ 展开式中前三项的系数成等差数列,求展开式中的有理项.

56. 证明四边形 $ABCD$ 为梯形的充要条件是 $\sin A\sin C=\sin B\sin D$.

57. 已知$\sqrt{2ab}=-2b$,其中a,b是有理数,那么$\sqrt{(a-b)^2}-a$等于(　　).

A. $-3b$　　B. $2a-b$　　C. a　　D. $-b$

[1994年"祖冲之杯"初二赛题]

请按题58~62的要求编拟习题

58. 由三角函数的定义,从x,y,r,α中任取3个量编题.

59. 按照方程

$$\frac{100}{\frac{x}{2}-1}-\frac{100}{x}=20\frac{5}{6}.$$

编一道应用题.

60. 编一道二元二次多项式能分解成两个一次因式的因式分解题.

61. 由$\pi^3>30$编一道不等式证明题.

62. 在$\triangle ABC$中,有

$$1<\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}.$$

由此编一道关于三角形三边长间的不等式.

附录　30个初等数学问题

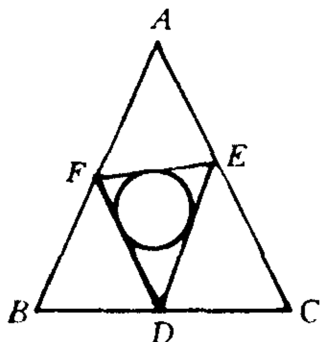
问题1　设 $x_1>0, x_i+x_{i+1}>0$, $i=1,2,\cdots,n$, 又 $x_{n+i}=x_i$, 用初等方法证明

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}\geqslant\frac{n}{2}.$$

当 $n=7,9,10,12$ 时成立.

问题2[①]　设 $a_1>0, a_{n+1}=a_1+\frac{n}{a_n}, n=1,2,\cdots$, 证明或否定：当 $n>\frac{4}{a_1^3}$ 时，总有 $a_{n+1}>a_n$.

问题3　$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 为 BC 的中点，E 与 F 分别为 AC，AB 边内的动点，当 $\triangle DEF$ 的内切圆半径取得最大值时，求证 $AE=AF$.（附图1）



附图1

问题4　称数列

$$\begin{cases}a_1=a_2=1,\\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\end{cases}$$

中的项为裴波那契数；又称以裴波那契数为边长且面积也为整数的三角形为裴波那契三角形. 问是否存在裴波那契三角形？

问题5[②]　设 P 为 $\triangle ABC$ 的费马，证明或否定

$$(PA+PB+PC)^2\leqslant BC\cdot CA+CA\cdot AB+AB\cdot BC.$$

问题6　既有外接圆又有内切圆的 n 边形叫做双圆 n 边形. 设 R，r 分别为外接圆与内切圆半径，d 为圆心距，求使下式成立的最小 m：

$$R^m\geqslant d^m+r^m\sec^m\frac{\pi}{n}.$$

---

① 数学通讯1998年第10期发表了顾克东、黄军华的文章，结论成立.

② 数学通讯1997年第3期发表了周才凯的文章，结论成立.

问题7 记$\triangle ABC$的周长为$P_{\triangle ABC}$.对于给定的$\triangle ABC$及其内接$\triangle DEF$,求证

$$P_{\triangle DEF}\geqslant \min\{P_{\triangle AFE},P_{\triangle FBD},P_{\triangle EDC}\}.$$

问题8[①] 记正n边形对角线在形内的交点数为$f(n)$,请求出$f(n)$的计数公式.

问题9 对于空间不共面的n个点,至少可以确定多少条直线?至少可以确定多少条恰好通过两点的直线?

问题10 已知四面体某三面角的三个面角值,试确定它所对的三角形面的形状.

问题11 空间中任给n个不同点,r_n表示两点间最大距离与最小距离之比,求r_n的最小值.

问题12 设n边形($n\geqslant 3$)的顶点坐标为$A_i(x_i,y_i)$,$i=1,2,\cdots,n$.其中x_1,x_k分别为横坐标x_i集合中的最小值与最大值.

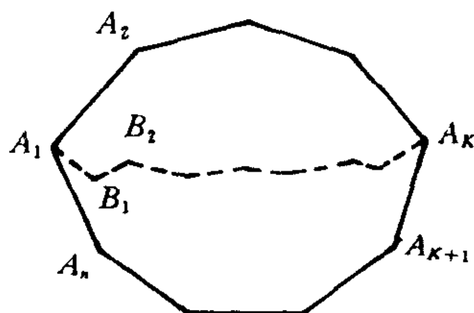
$$x_1<x_i<x_k\quad i=2,3,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n.$$

通过求解方程组可以求出折线$A_1A_2\cdots A_k$的方程

$$\begin{cases}y=f(x)=\sum\limits_{i=1}^{4}a_i\mid x-x_i\mid,\\ x_1\leqslant x\leqslant x_k.\end{cases}$$

同理求出折线$A_1A_n\cdots A_k$的方程

$$\begin{cases}y=g(x),\\ x_1\leqslant x\leqslant x_k.\end{cases}$$



附图2

再取一条中间折线$A_1B_1B_2\cdots A_k$(附图2)

---

① 数学通讯1998年第八期樊益武给出的公式为

$$f(n)=\begin{cases}C_n^4 & n\text{为奇数},\\ C_n^4-C^2_{\frac{n}{2}}+1 & n\text{为偶数};\end{cases}$$

$$y=\frac{g(x)+f(x)}{2}.$$

可得多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的绝对值方程

$$\left|y-\frac{g(x)+f(x)}{2}\right|+\frac{g(x)-f(x)}{2}=0.$$

或
$$|2y-g(x)-f(x)|+g(x)-f(x)=0.$$

请考虑如何通过多边形的绝对值方程确定边长、夹角，以及多边形之间的全等、相似？

问题 13　如果把平面上所有的点都加以染色，使得没有任何单位距离的两点同色，最少需用几种颜色？

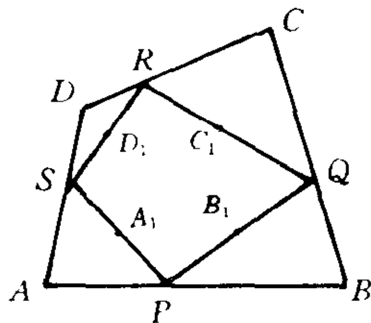
问题 14　面积相等的圆与正方形能否剖分相等？

问题 15　平面区域 S 的弦是连结 S 的两个边界点的线段. 设 P 是 S 内的一点，如果通过 P 的一切弦长都相等，则 P 称为 S 的等弦点. 问一个平面凸区域能否有两个等弦点？

问题 16　设 P 是平面凸 n 边形区域内一点，若从 P 出发的小球经过各边的反射之后能历遍多边形区域的每一点，则称 P 为照明点. 问是否每一个多边区域都有照明点？

问题 17　把集合 $S=\left\{1,2,\cdots,\frac{3^k+1}{2}\right\}(k\geqslant 2)$ 划分为 k 个子集 $S_1,S_2,\cdots,S_k$，是否存在一个集合 S_m $(1\leqslant m\leqslant k)$，使得在 S_m 上方程 $x+y=z$ 有解？

问题 18　设 $PQRS$ 是四边形 $ABCD$ 的内接四边形，A_1,B_1,C_1,D_1 分别为 SP,PQ,QR,RS 的中点，则 AA_1,BB_1,CC_1,DD_1 四线共点的充要条件是什么？（附图 3）



附图 3

问题 19　对任何一个自然数 $n\geqslant 2$，反复施行如下运算：若 n 为奇数，则乘以 3 再加 1；若 n 为偶数，则除以 2. 求证必可运算得出 1.

问题 20 证明或反驳:任何自然数平方的 36 倍,必可等于两对孪生素数的和.

问题 21 设有 n 个非负实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 将其从大到小排列得 $a_1'\geqslant a_2'\geqslant\cdots\geqslant a_n'$.记

$$\alpha_i=\max\left\{a_i,\frac{a_i+a_{i-1}}{2},\cdots,\frac{a_i+a_{i-1}+\cdots+a_1}{i}\right\},$$

$$\beta_i=\max\left\{a_i',\frac{a_i'+a_{i-1}'}{2},\cdots,\frac{a_i'+a_{i-1}'+\cdots+a_1'}{i}\right\}.$$

对 α_i,β_i 从大到小的排列记为

$$\alpha_1'\geqslant\alpha_2'\geqslant\cdots\geqslant\alpha_n',$$

$$\beta_1'\geqslant\beta_2'\geqslant\cdots\geqslant\beta_n'.$$

求证 $\beta_i'\geqslant\alpha_i',\quad i=1,2,\cdots,n.$

问题 22 $2n$ 支篮球队两两作单循环赛,每天安排在 n 个场地上进行,要求每个球队都要在每个球场上至少赛一场,至多赛 2 场,问能否作出安排?

问题 23 设 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是 n 个互不相同的奇素数,证明 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}-\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}$ 不是自然数.

问题 24 能否给出方程 $x^2-2y^4=-1$ 仅有两个正整数解(1,1),(239,13)的一个初等证明?

问题 25 是否对充分大的正整数 n,都有整数 x,y,z 且 x^2,y^2,z^2 均不大于 n,使方程 $n=x^2+y^2-z^2$ 有解.

问题 26 是否对于每一个正整数 $n>10^8$,方程 $\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 均有正整数解?

问题 27 对 $n>3,k>1$,求方程 $x^k=C_n^3$ 的正整数解.(x 为未知数)

问题 28 $x!+1=y^2$ 是否仅有正整数解 $(x,y)=(4,5)$,(5,11),(7,71)?

问题 29[①]　在 1000×2 的长方形里，嵌入直径为 1 的圆，任何两圆都不重叠，也没有任何一个圆的任何部位超出长方形的边界，问在长方形里最多能装多少个圆？

问题 30　找出一个面积(或周长)最小的能够覆盖任何直径为 1 的点集的凸图形.

---

① 中学数学月刊 1997 年第 4 期张殿书证明了最多能装 2012 个 .

参考文献

[1] 徐利治.数学方法论选讲.华中工学院出版社,1988年2月第2版.
[2] 郑毓信.数学方法论.广西教育出版社,1991年7月第1版.
[3] 徐利治、朱梧槚、郑毓信.数学方法论教程.江苏教育出版社,1992年7月第1版.
[4] 朱梧槚、肖奚安.数学方法 *ABC*.辽宁教育出版社,1986年.
[5] 李翼忠.中学数学方法论.广东高教出版社,1986年.
[6] 刘兆明等.中学数学方法论.湖北教育出版社,1987年3月第1版.
[7] 赵振威.中学数学方法指导.科学出版社,1988年9月第1版.
[8] 王仲春、李元中等.数学思维与数学方法论.高等教育出版社,1989年11月第1版.
[9] 华民、陆克毅、张文贵等.中学数学方法论.天津人民出版社,1990年2月第1版.
[10] 解恩泽、徐本顺等.数学思想方法.山东教育出版社,1989年11月第1版.
[11] 戴再平.数学习题理论.上海教育出版社,1996年10月第2版.
[12] [美]克莱恩.古今数学思想(1－4).张理京、张锦炎等译,上海科学技术出版社,1979年10月第1版.
[13] 朱学志、周金才、高沛田.数学的历史、思想和方法(上、下).哈尔滨出版社,1990年12月第1版.
[14] 王振鸣等.数学解题方法论.南海出版公司,1990年12月第1版.
[15] 李玉琪等.数学方法论.南海出版公司,1991年4月第1版.
[16] 徐利治主编.数学方法论丛书(1－12).江苏教育出版社,1988～1990.
[17] 十三院校协编组编.中学数学教材教法(总论).人民教育出版

社,1980 年 9 月第 1 版.
[18] [苏]A·A·斯托利亚尔. 数学教育学. 丁尔陞等译,人民教育出版社,1984 年 7 月第 1 版.
[19] 张奠宙、唐瑞芬、刘鸿坤. 数学教育学. 江西教育出版社,1991 年 11 月第 1 版.
[20] 章士藻. 中学数学教育学. 江苏教育出版社,1996 年 7 月第 2 版.
[21] 郭思乐、刘远图. 中学数学教学. 光明日报出版社,1987 年 10 月第 1 版.
[22] 王屏山、傅学顺. 数学思维能力的训练. 广东人民出版社,1985 年.
[23] 王屏山、傅学顺. 中学生数学灵感的培育. 广东教育出版社,1991 年.
[24] 傅学顺、王屏山. 数学才能的培养. 暨南大学出版社,1991 年 9 月第 1 版.
[25] 张乃达. 数学思维教育学. 江苏教育出版社,1990 年 4 月第 1 版.
[26] 任樟辉. 数学思维论. 广西教育出版社,1990 年 9 月第 1 版.
[27] [美]波利亚. 怎样解题. 阎育苏译,科学出版社,1982 年 1 月第 1 版.
[28] [美]波利亚. 数学的发现(一、二). 刘景麟、曹之江、邹清莲译,内蒙古人民出版社,1979~1981;欧阳绛译,科学出版社,1982 年.
[29] [美]波利亚. 数学与似真推理. 杨迅文、王学沂、汪成钦译,福建人民出版社,1984 年 10 月第 1 版;李心灿等译,科学出版社,1985 年.
[30] [苏]弗里德曼. 怎样学会解数学题. 陈淑敏、尹世超译,黑龙江科学技术出版社,1981 年 5 月第 1 版. 北京师范大学出版社,1988 年,丁家泰、赵素兰译.

[31] [美]威克尔格伦.怎样解题.汪贵枫、袁崇义译,原子能出版社,1981年9月第1版.

[32] 唐以荣.中学数学综合题解题规律讲义.西南师范大学出版社,1987年5月第1版.

[33] 过伯祥、杨象富.中学数学综合题的解法发现.江苏教育出版社,1988年.

[34] 胡炳生.数学解题研究与发现.中国展望出版社,1989年8月第1版.

[35] 罗增儒.怎样解答高考数学题.陕西师范大学出版社,1997年3月第2版第4次印刷.

[36] 过伯祥.怎样学好数学.江苏教育出版社,1995年10月第1版.

[37] 芦正勇.数学解题思路.福建教育出版社,1980年5月第1版.

[38] 吴振奎.中学数学计算技巧.辽宁人民出版社,1982年11月第1版.

[39] [苏]瓦西列夫斯基.数学解题教学法.李光宇、王力新译,湖南科学技术出版社,1982年7月第1版.

[40] [美]拉松.通过问题学解题.陶懋颀等译,安徽教育出版社,1986年6月第1版.

[41] 裘宗沪主编.奥林匹克数学教程(小学、初中、高中).开明出版社,1994年.

[42] 梅向明主编.中学数学奥林匹克丛书(共6册).北京师范学院出版社,1988年.

[43] 常庚哲主编.中学生数学竞赛丛书(共4册).中国展望出版社,1989年.

[44] 单墫主编.数学奥林匹克系列丛书.北京大学出版社,1990~1991.

[45] 罗增儒主编.数学竞赛教程.陕西师范大学出版社,1993年12月第1版.